This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

HARVARD COLLEGE

SCIENCE CENTER
LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

24407

GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

Verlag von Mayer & Müller, Berlin.

Heliogr. Meisenbach Riffarth & Co, Berlin.

L. Fuchs

GESAMMELTE
MATHEMATISCHE WERKE

L. FUCHS.

HERAUSGEGEBEN

VON

LUDWIG SCHLESINGER

IN KLAUSENBURG.

ERSTER BAND:

ABHANDLUNGEN (1858—1875)

BESORGT

VON

L. SCHLESINGER.

MIT EINEM BILDNISSE DES VERFASSERS.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1904

[illegible] Turks

GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

HERAUSGEGEBEN

VON

RICHARD FUCHS IN BERLIN. UND LUDWIG SCHLESINGER IN KLAUSENBURG.

ERSTER BAND:

ABHANDLUNGEN (1858—1875)

REDIGIRT

VON

L. SCHLESINGER.

MIT EINEM BILDNISSE DES VERFASSERS.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1904.

HARVARD COLLEGE
APR 25 1905
LIBRARY.
Farrar fund
(I)

Alle Rechte vorbehalten, einschliesslich des Übersetzungsrechtes.

VORWORT.

Der vorliegende erste Band der Gesammtausgabe von L. Fuchs' Werken enthält die achtzehn in den Jahren 1858—1875, bis zur Übersiedelung nach Heidelberg (April 1875), veröffentlichten Arbeiten. Diese sind in chronologischer Reihenfolge treu nach den Originaltexten wieder abgedruckt worden, alle irgendwie nennenswerthen Änderungen sind in den den einzelnen Abhandlungen hinzugefügten Anmerkungen angegeben; nur offenbare Druckfehler wurden meist stillschweigend berichtigt und für alle in deutscher Sprache abgefassten Abhandlungen als einheitliche Orthographie die bis vor kurzem im Journal für die reine u. angew. Mathematik üblich gewesene durchgeführt. Die Seitenzahlen der Originaldrucke sind immer am äusseren Rande derjenigen Zeile zu finden, die das erste Textwort oder Formelzeichen der betreffenden Seite des Originals enthält.

Alle Arbeiten sind theils vor dem Drucke, theils während desselben einer sachlichen Revision unterzogen worden, und zwar die beiden geometrischen Abhandlungen I und II durch Herrn P. Stäckel, die beiden zahlentheoretischen III und IV durch Herrn R. Dedekind, die Abhandlung XVI durch Herrn A. Hirsch, die Übrigen durch den Unterzeichneten, der sich hierbei und bei der Correctur des ganzen Bandes der überaus werthvollen Unterstützung seines Freundes L. Heffter zu erfreuen hatte. Die französische Arbeit X wurde durch Herrn H. Vogt in sprachlicher Hinsicht revidirt, überdies haben Herr H. Lemke und der andere Herausgeber Herr Richard Fuchs je eine Correctur der Druckbogen gelesen. Allen genannten Herren sei für die von ihnen aus Pietät für

den dahingeschiedenen Verfasser in selbstlosester Weise übernommene mühevolle Arbeit der herzlichste Dank der Herausgeber ausgesprochen. Ganz besonders aber drängt es mich, Herrn Geheimrath DEDEKIND aufs ehrerbietigste dafür zu danken, dass er die beiden von ihm revidirten Arbeiten durch die Anmerkungen (2) zu III, S. 66 und zu IV, S. 476), die ich nach seinen Angaben abfassen durfte, erläutert und dadurch das Andenken des ihm befreundeten Verfassers in der schönsten Weise geehrt hat.

Das freundliche Entgegenkommen der Verlagshandlung, die diese Ausgabe in der vornehmen Ausstattung der gleichfalls von ihr verlegten Werke von WEIERSTRASS und E. SCHERING durch die altbewährte DIETERICHsche Universitäts-Buchdruckerei in Göttingen herstellen lässt, hat es ermöglicht, den vorliegenden Band mit der Reproduction einer im Dezember 1898 in dem Atelier von SCHAARWÄCHTER in Berlin angefertigten Photographie des Verfassers zu zieren; das Facsimile der Unterschrift ist dem Manuscripte der Abhandlung entnommen, die der Verfasser wenige Wochen vor seinem Hinscheiden zur Säcularfeier ABELS für die Acta Mathematica geschrieben, der letzten, die er noch selbst (am 15. März 1902) zum Drucke befördert hat.

Klausenburg, im Mai 1904.

L. SCHLESINGER.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Seite

Vorwort v

I. De superficierum linéis curvaturae 1
Dissertatio inauguralis etc. Berolini, MDCCCLVIII.
Anmerkungen 40

II. Integration der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$ 41
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 58, 1861, S. 80—89.
Anmerkung 52

III. Über die Perioden, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist 53
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 61, 1863, S. 374—386.
Anmerkungen 67

IV. Über die aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen von periodischem Verhalten, insbesondere die Bestimmung der Klassenanzahl derselben . . 69
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 65, 1866, S. 74—111.
Anmerkung 110

V. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten 111
Jahresbericht über die städt. Gewerbeschule zu Berlin, Ostern 1865.
Anmerkungen 158

VI. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten 159
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 66, 1866, S. 121—160.
Anmerkungen 203

VII. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Ergänzungen zu der im 66sten Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung) 205
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 68, 1868, S. 354—385.
Anmerkungen 240

VIII. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst 241
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 71, 1870, S. 91—127.
Anmerkungen 282

Seite

IX. Über eine rationale Verbindung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale 283
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 71, 1870, S. 128–136.
Anmerkungen 293

X. Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires 295
Annali di Matematica p. ed a., Serie II, Tomo IV, 1870–1871, p. 36–49.
Anmerkungen 309

XI. Bemerkungen zu der Abhandlung: »Über hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung« in diesem Journal Bd. 71, S. 316 311
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 72, 1870, S. 255–262.
Anmerkungen 320

XII. Über die Form der Argumente der Thetafunctionen und über die Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function der Klassenmoduln 321
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 73, 1871, S. 305–323.
Anmerkung 341

XIII. Über die linearen Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der Abelschen Integrale genügen, und über verschiedene Arten von Differentialgleichungen für $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ 343
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 73, 1871, S. 324–339.
Anmerkungen 360

XIV. Über die Darstellung der Functionen complexer Variablen, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen 361
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 75, 1873, S. 177–228.
Anmerkungen 411

XV. Über die Darstellung der Functionen complexer Variablen. Anhang zur Abhandlung Bd. 75 dieses Journals S. 177 ff. 413
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 76, 1874, S. 175–176.

XVI. Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden 415
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 76, 1874, S. 177–213.
Anmerkungen 455

XVII. Über die Abbildung durch algebraische Functionen 457
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 77, 1874, S. 339–352.
Anmerkungen 472

XVIII. Über die Abbildung durch algebraische Functionen. Anhang zur Abhandlung Bd. 77, S. 339 ff. dieses Journals 473
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 78, 1875, S. 338–339.

Anmerkung zu der Abhandlung IV »Über die aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen etc.« 476

I.

DE

SUPERFICIERUM LINEIS CURVATURÆ.

DISSERTATIO INAUGURALIS
MATHEMATICA
QUAM
CONSENSU ET AUCTORITATE
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
IN
ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE FRIDERICA GUILELMA
AD
SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES
RITE CAPESSENDOS
DIE II. M. AUGUSTI A. MDCCCLVIII
H. XI.
PUBLICE DEFENDET
AUCTOR

LAZARUS FUCHS
POSNANIENSIS.

ADVERSARII ERUNT:
JULIUS WEINGARTEN, PHIL. CAND.
LEO KOENIGSBERGER, PHIL. STUD.
EDUARDUS FISCHER, PHIL. STUD.

BEROLINI
TYPIS FRATRUM UNGER.

VIRO ILLUSTRISSIMO AMPLISSIMO CELEBERRIMO

ERNESTO EDUARDO KUMMER

PHILOSOPHIAE DOCTORI ARTIUM LIBERALIUM MAGISTRO MATHESIS PROFESSORI PUBLICO ORDINARIO AQUILAE RUBRAE IN CLASSE QUATRA EQUITI ACADEMIAE SCIENTIARUM REGIAE BORUSSICAE SOCIO SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARUM GOTTINGENSIS SOCIO EXTERNO ACADEMIAE PAPALIS ROMANAE LYNCEORUM A COMMERCIO EPISTOLICO ALIARUMQUE SOCIETATUM LITTERARIARUM SODALI

SUMMA CUM REVERENTIA COLENDO

PATRI OPTIMO DILECTISSIMO,

MATRIS MANIBUS

HASCE STUDIORUM PRIMITIAS

OFFERT

AUCTOR.

DE SUPERFICIERUM LINEIS CURVATURAE.

Investiganti superficierum lineas curvaturae duae praesertim obviae sunt aequationes differentiales, altera aequatio differentialis quadratica projectionum in plano quodam coordinatorum, altera haec:

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}.$$

Nonnunquam integratio alterius harum aequationum facile effici potest, id quod evenit in superficiebus secundi gradus, cylindricis, conicis, revolutione ortis aliisque, quarum lineae curvaturae ex illis aequationibus sponte deteguntur. Sed plerumque singularibus artificiis atque problemati cuique aptis opus est, quibus ad aequationes illas integrandas perveniatur. In hac dissertatione complurium superficierum superficierumque generum lineas curvaturae explorare conati sumus.

Sed quum genera superficierum minoris vel majoris sint amplitudinis prout aequatio differentialis partialis, qua definiuntur, minoris vel majoris est ordinis, saepe superficierum generi eundem ordinem adscripsimus, ad quem aequatio differentialis pertinet. Loco coefficientium differentialium partialium $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ etc. secundum usitatam notationem Mongeianam plerumque scripsimus p, q etc., et loco ipsorum $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. posuimus y', y'' etc.

1.

De genere secundi ordinis superficierum, quae devolubiles appellantur atque aequatione $rt-s^2=0$ repraesentantur.

Integralem aequationis $rt-s^2=0$ hoc esse constat systema aequationum:

$$z = x\pi\alpha + y\alpha - \varphi\alpha, \tag{1.}$$

$$x\pi'\alpha + y = \varphi'\alpha, \tag{2.}$$

in quibus per α designatur parameter indefinitus, per $\pi\alpha$ et $\varphi\alpha$ functiones arbitrariae, atque aequatio (2.) differentiando (1.) secundum α accipitur.

Ex aequationibus (1.) et (2.) sequitur

$$p = \pi\alpha, \quad q = \alpha. \tag{3.}$$

Aequatio autem differentialis projectionum linearum curvaturae in plano ipsorum x, y est:

$$y'^2[(1+q^2)s-pqt] + y'[(1+q^2)r-(1+p^2)t] - [(1+p^2)s-pqr] = 0. \tag{4.}$$

Ope aequationum (3.) calculo simplici sequitur, in nostro casu aequationem (4.) abire in

$$y'^2[(1+\alpha^2)\pi'\alpha-\alpha\pi\alpha] + y'[(1+\alpha^2)\pi'^2\alpha-(1+\pi^2\alpha)] - [(1+\pi^2\alpha)\pi'\alpha-\alpha\pi\alpha\pi'^2\alpha] = 0. \tag{5.}$$

Methodus quae sequitur inveniendi lineas curvaturae quamquam ad aequationem (5.) ipsam adhiberi poterit, tamen prius aequationem (5.) ad simpliciorem reducamus.

2] Facile enim est intellectu, aequationem (2.), quae est aequatio projectionum linearum generatricium in plano ipsorum x, y, unam seriem linearum curvaturae repraesentare, quarum aequatio differentialis est:

$$y' = -\pi'\alpha. \tag{6.}$$

Hac radice aequationis (5.) ex ea sublata, pro altera serie linearum curvaturae evadit aequatio

$$y' = \frac{1+\pi^2\alpha-\alpha\pi\alpha\pi'\alpha}{(1+\alpha^2)\pi'\alpha-\alpha\pi\alpha} = \chi\alpha. \tag{7.}$$

Ex aequatione (2.) sequitur differentiando secundum x (si y et α ut functiones

ipsius x considerantur)

$$y' = -\pi'\alpha + (\varphi''\alpha - x\pi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx},$$

sive secundum (7.)

$$\chi\alpha = -\pi'\alpha + (\varphi''\alpha - x\pi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx},$$

sive

$$\frac{dx}{d\alpha} + \frac{x\pi''\alpha}{\chi\alpha + \pi'\alpha} = \frac{\varphi''\alpha}{\chi\alpha + \pi'\alpha}. \tag{8.}$$

Haec aequatio differentialis inter x et α ex earum est classe, quae ad quadraturas revocari possunt. Notum enim est, integralem aequationis

$$\frac{dz}{dv} + z\lambda(v) = \psi(v)$$

esse

$$z = \left[\int \psi(v).dv.e^{\int \lambda(v)\,dv} + C\right] e^{-\int \lambda(v)\,dv}.$$

Itaque ex aequatione (8.) sequitur

$$x = \left[\int \frac{\varphi''\alpha}{\chi\alpha + \pi'\alpha} d\alpha . e^{\int \frac{\pi''\alpha}{\chi\alpha+\pi'\alpha} d\alpha} + C\right] e^{-\int \frac{\pi''\alpha\, d\alpha}{\chi\alpha+\pi'\alpha}}. \tag{9.}$$

Systema aequationum (2.) et (9.) projectiones alterius seriei linearum curvaturae in plano ipsorum x, y repraesentat.

Nonnunquam in specialibus casibus lineas curvaturae quamquam non simpliciore generali methodo, tamen calculum minorem postulante invenire licet, quod multis exemplis illustraremus nisi brevitati esset parendum.

2.

De genere secundi ordinis, quod per aequationem $(1+p^2)s - pqr = 0$ significatur (de genere $(1+q^2)s - pqt = 0$).

Quum aequatio

$$(1+p^2)s - pqr = 0 \tag{1.}$$

etiam ita scribi possit

$$\frac{\frac{dq}{dx}}{q} - p\frac{\frac{dp}{dx}}{1+p^2} = 0,$$

integralis prima est:

$$\tfrac{1}{2}\log(1+p^2) = \log q + \log \varphi y,$$

ubi φy arbitraria est functio ipsius y, sive

$$1+p^2-q^2.\varphi^2 y = 0. \tag{2.}$$

Ad integrandam aequationem (2.) methodo usi, quam celeb. LAGRANGE ad integrandas aequationes differentiales partiales primi ordinis primus patefecit, celeb. JACOBI amplificavit, invenimus:

$$\left\{\begin{aligned} z &= cx + \sqrt{1+c^2}\int\frac{dy}{\varphi y} + \omega(c), \\ 0 &= x + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\int\frac{dy}{\varphi y} + \omega'(c), \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

ubi c arbitrarius est constans, ω functio arbitraria.

Atque hoc systema integralis est generalis aequationis differentialis partialis secundi ordinis (1.).

Aequatio generalis differentialis linearum curvaturae

$$y'^2[(1+q^2)s-pqt]+y'[(1+q^2)r-(1+p^2)t]-[(1+p^2)s-pqr] = 0$$

pro iis superficiebus, quae aequationi (1.) satisfaciunt, si factorem

$$(1+q^2)s-pqt$$

negligas, hanc accipit formam:

3] $$y'^2+\frac{1+p^2}{pq}y' = 0. \tag{4.}$$

Ex hac aequatione sequitur primum

$$y' = 0, \tag{5.}$$

sive

$$y = c'. \tag{6.}$$

Itaque una series linearum curvaturae invenitur, si superficies per plana secantur, quae plano ipsorum x, z sunt parallela.

Ut autem alteram seriem linearum curvaturae inveniamus ita pergimus.

Radice (5.) ex aequatione (4.) sublata remanet aequatio

$$y' = -\frac{1+p^2}{pq}. \tag{7.}$$

Si igitur pro p et q valores ex aequationibus (3.) erutos ponas, accipias

$$y' = \frac{-\sqrt{1+c^2}}{c\varphi_1' y}, \tag{8.}$$

ubi

$$\varphi_1 y = \int \frac{dy}{\varphi y}.$$

Eliminetur c inter aequationem (8.) et secundam aequationum (3.), quae etiam ita exhiberi licet

$$x + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\varphi_1 y + \omega' c = 0, \tag{9.}$$

accipitur aequatio

$$x - \frac{1}{y'\varphi_1' y}\varphi_1 y + \chi(y'\varphi_1' y) = 0. \tag{10.}$$

Si autem ponas

$$\varphi_1 y = z, \tag{11.}$$

accipias:

$$y'\varphi_1' y = \frac{dz}{dx} = z',$$

atque aequatio (10.) abit in

$$z = xz' + z'\chi z'. \tag{12.}$$

Differentiatione ex aequatione (12.) sequitur

$$(x + z'\chi' z' + \chi z')z'' = 0.$$

Ex qua sequuntur

$$x + z'\chi' z' + \chi z' = 0 \quad \text{et}$$

$$z'' = 0. \tag{13.}$$

Prima aequatio ad singularem pertinet integralem atque hic omittenda est, secunda (13.) integratione dat:

$$z' = c', \tag{14.}$$

quo valore ipsius z' in aequatione (12.) substituto accipias generalem integralem hujus aequationis

$$z = c'x + c'\chi c'. \tag{15.}$$

Itaque si pro z ipsius valor ex (11.) ponitur, sequitur, aequationem projectio-

num linearum curvaturae in plano ipsorum x, y esse hanc:

$$\varphi_1 y = c'(x + \chi c')$$

sive

$$\int \frac{dy}{\varphi y} = c'(x + \chi c'). \tag{16.}$$

Quod ad genus secundi ordinis

$$(1+q^2)s - pqt = 0 \tag{17.}$$

pertinet, nihil novi praebet.

Nam perspicuum est hanc aequationem ex aequatione (1.) oriri, si x cum y commutatur. Itaque etiam integralem aequationis (17.) accipias, si in aequationibus (3.) x cum y commutatur, atque erunt

$$\left\{ \begin{array}{l} z = cy + \sqrt{1+c^2} \int \frac{dx}{\varphi x} + \omega c, \\ 0 = y + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \int \frac{dx}{\varphi x} + \omega' c, \end{array} \right. \tag{18.}$$

quae re vera easdem superficies repraesentant quas aequationes (3.), atque si hanc formam retinere malis, aequationes linearum curvaturae accipiuntur, si in aequatione (16.) x cum y commutatur, atque si pro aequatione (6.) $x = c'$ scribitur.

3.

De genere primi ordinis superficierum, quae canalicae appellantur atque aequatione $1+p^2+q^2 = \frac{R^2}{z^2}$ continentur.

4] Si $\beta = \varphi\alpha$ curvam in plano ipsorum x, y jacentem repraesentat, quam centrum sphaerae cujusdam constanti radio se moventis describit, superficies involvens sive canalica generaliter per hoc systema aequationum repraesentatur:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\varphi\alpha)^2 + z^2 = R^2, \tag{1.}$$

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha = 0, \tag{2.}$$

inter quas, data functione φ, α est eliminandum.

Primum perspicuum est, quum aequatio (2.) pertineat ad planum per sphaerae centrum permeans, quapropter linea characteristica cum circulo quodam qui maximus dicitur coïncidit, lineas characteristicas unam repraesentare seriem linearum curvaturae. Restat ut altera inveniatur.

Differentiatione aequationis (1.) ope aequationis (2.) accipitur:

$$(3.) \qquad p = \frac{-(x-\alpha)}{z}, \quad q = \frac{-(y-\varphi\alpha)}{z}.$$

Aequationem differentialem linearum curvaturae

$$\frac{dx+pdz}{dp} = \frac{dy+qdz}{dq}$$

in hanc transigamus formam, quae saepe est utilis:

$$(4.) \qquad \frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq}.$$

Ex aequationibus (3.) sequitur

$$x+pz = \alpha, \quad y+qz = \varphi\alpha,$$

itaque aequatio (4.) abit in

$$(5.) \qquad dq = \varphi'\alpha . dp.$$

Ex aequationibus (3.) sequitur

$$pz + qz\varphi'\alpha = -\{(x-\alpha) + (y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha\},$$

sive propter aequationem (2.),

$$(6.) \qquad pz + qz\varphi'\alpha = 0.$$

Ex aequationibus (5.) et (6.) sequitur

$$\frac{z}{dp}(pdp+qdq) = 0,$$

ex qua aequatione factore $\frac{z}{dp}$ neglecto sequitur

$$(7.) \qquad p^2+q^2 = c,$$

ubi per c constans significatur arbitrarius. Valoribus ex aequationibus (3.) substitutis sequitur aequatio

$$(8.) \qquad z^2 = \frac{R^2}{1+c},$$

ex qua elucet, ut altera linearum curvaturae series accipiatur, necesse esse superficiem per plana secari, quae plano ipsorum x, y sunt parallela.

Sed genus superficierum, quod modo tractavimus, specialis est casus generis secundi ordinis, quod nunc tractabimus. Illud separatim non considera-

vissemus nisi methodo tam simplici absolvi posset. Generalis autem qui sequitur casus quamquam non minus simplicem patitur methodum, tamen haec plane est alia nec, ut videbimus, ad hanc superficierum classem solam restricta. Sed prius adhuc annotare liceat nonnulla de connexu, qui exstare videtur inter theoriam linearum curvaturae et theoriam involutionis superficierum.

Si characteristicae lineae sunt curvaturae superficierum involutarum, etiam sunt lineae curvaturae superficiei involventis, quia utraeque superficies eandem habent normalem. Altera serie linearum curvaturae nota aequatio differentialis linearum curvaturae linearis solvenda est ut altera inveniatur, sive alia methodus rei apta adhibenda, cujus in sequentibus dabimus exemplum.

Vice versa, quum quaevis superficies infinite multis modis ut involvens considerari possit superficierum quarundam, si eo perveniri potest, ut superficiei datae talis superficierum ab ea involutarum series substituatur, quarum characteristica nota una sit ex earum lineis curvaturae, unam habeas seriem linearum curvaturae superficiei datae. Hoc fieri posse ex eo elucet, quod vice versa secundum lineas curvaturae cujusvis superficiei infinite multis modis duas alias aliasque superficies infinite inter se propinquas atque inter se tangentes reddere possis. Nihil impedit, quominus altera linearum curvaturae series eodem modo inveniatur. Quum autem generaliter in unaquaque superficie duae tantum linearum curvaturae series exstent, perspicuum est, problema propositum generaliter duas tantum admittere solutiones.

5] 4.

De iis superficiebus, quarum una series linearum curvaturae est plana atque singulae cum sectionibus principalibus coïncidunt. De genere superficierum, quae involvunt sphaeram constanti radio ita se moventem, ut centrum curvam quamlibet in spatio sitam describat.

I.

De iis superficiebus, quarum una series linearum curvaturae est plana atque singulae cum sectionibus principalibus coïncidunt.

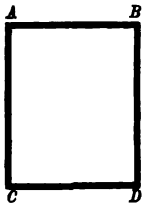
Notum est elementa linearia linearum curvaturae ad series diversas pertinentium se recto angulo secare atque utrumque in alterutrius sectionis prin-

cipalis plano esse situm. Ex quo sequitur, si linea curvaturae est plana atque cum sectione sua principali coïncidens, elementum alterius lineare planum hujus curvae recto angulo secare.

In superficiebus quas consideramus alteram seriem linearum curvaturae hoc affectu imbutam supposuimus, atque eam brevitatis causa primam appellamus seriem, alteram autem secundam. His positis dico, si ex secunda serie una curva aequatione definita datur, omnes ex ea derivari posse atque sequenti modo.

Curvam planam alii curvae planae parallelam dici notum est, si puncta illius constanti distantia in normalibus punctorum correspondentium hujus sunt sita. Quum ignoremus, num haec definitio in curvas quaslibet in spatio sitas extensa sit, dicimus curvam quamlibet in spatio sitam alii esse parallelam, si puncta illius constanti distantia in planis normalibus punctorum correspondentium hujus, praeterea autem in eadem superficie sunt sita. Perspicuum est curvam curvae parallelam hoc modo plane esse definitam.

Praeterea facile sequitur, si curva quaedam (1.) curvae (2.) est parallela etiam curvam (2.) curvae (1.) esse parallelam, i. e. utramque in punctis correspondentibus idem habere planum normale. Sit enim AB elementum curvae (2.), CD elementum correspondens curvae (1.), quum $AC = BD$ supposuerimus, quantitatibus infinite parvis secundi ordinis neglectis colligitur CD parall. AB, quapropter CD planum normale curvae (2.) recto angulo secat, id quod diximus.



Sit igitur aequatio unius curvae ex serie quam secundam appellavimus quodammodo inventam haec:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{1.}$$

atque aequatio superficiei, cujus lineae curvaturae quaeruntur:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2.}$$

Quaeramus curvam parallelam curvae (1.) constanti distantia c atque in superficie (2.) sitam. Aequatio plani normalis curvae (1.) sit

$$a(\xi - x) + b(\eta - y) + \zeta - z = 0,$$

in qua a et b quantitates sunt definitae ex aequationibus (1.) et (2.) eruendae. Coordinatis punctorum curvae quaesitae punctis x, y, z correspondentium per

x', y', z' significatis, inter x, y, z, x', y', z' has habemus aequationes:

$$a(x'-x)+b(y'-y)+z'-z = 0, \tag{3.}$$

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{4.}$$

$$f(x, y, z) = 0, \tag{5.}$$

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2 = c^2. \tag{6.}$$

Si inter has x, y, z elimines, invenitur

$$\psi(x', y', z', c) = 0, \tag{7.}$$

quae cum aequatione $f(x', y', z') = 0$ conjuncta curvam quaesitam determinat.

Nunc autem facile est visu, curvam (7.) lineam esse curvaturae secundae seriei. Nam quum planum normale curvae (7.) lineam quandam curvaturae primae seriei contineat, elementum curvae (7.) eo affectu est imbutum, quo 6] supra lineas curvaturae secundae seriei determinatas esse vidi|mus. Itaque tota secunda series per aequationem (7.) repraesentatur, si constanti c continue alios aliosque valores tribuas.

II.

De genere superficierum, quae involvunt sphaeram constanti radio ita se moventem, ut centrum curvam quamlibet in spatio sitam describat.

Generalis superficierum classis quam modo tractavimus speciale est genus quod accipitur, si superficies involvens quaeritur sphaerae constanti radio ita se moventis, ut centrum ejus curvam quamlibet in spatio sitam describat. Nam sint aequationes hujus curvae:

$$\zeta = \alpha, \quad \xi = \varphi\alpha, \quad \eta = \psi\alpha, \tag{1.}$$

aequatio superficiei involventis accipitur, si inter aequationes:

$$(x-\varphi\alpha)^2+(y-\psi\alpha)^2+(z-\alpha)^2 = r^2, \tag{2.}$$

$$(x-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+(y-\psi\alpha)\psi'\alpha+z-\alpha = 0 \tag{3.}$$

α eliminatur. Eodem autem modo quo in superficiebus canalicis perspicitur, lineas characteristicas, quae per aequationes (2.) et (3.) repraesentantur, unam constituere seriem linearum curvaturae; quum autem characteristica circulus sit maximus sphaerae (2.), normales superficiei involventis in punctis ejus,

quia etiam normales sunt sphaerae, in plano characteristico sitae sunt, quapropter lineae characteristicae simul sunt lineae curvaturae atque sectiones principales, et methodus generalis in I. exhibita ad superficies quas nunc tractamus adhiberi potest. Sicuti in I. characteristicas primam dicimus constituere seriem linearum curvaturae, alteram secundam appellamus.

Ut aequationem unius curvae secundae seriei, quae aequationi (1.) in I. correspondeat, inveniamus, ita pergimus.

Aequationes lineae rectae, quae planum (3.) in puncto x, y, z recto angulo secat, sunt

$$\xi - x = \varphi'\alpha(\zeta - z), \quad \eta - y = \psi'\alpha(\zeta - z).$$

Ex quo elucet omnia elementa curvarum seriei secundae, quae eandem characteristicam secant, parallela esse ei elementi curvae (1.), ad quod characteristica pertinet.

Itaque pro omnibus curvis secundae seriei habemus

$$\frac{dx}{dz} = \varphi'\alpha, \quad \frac{dy}{dz} = \psi'\alpha. \tag{4.}$$

Ex aequationibus (2.) et (3.) sequitur

$$p = -\frac{(x - \varphi\alpha)}{z - \alpha}, \quad q = -\frac{(y - \psi\alpha)}{z - \alpha}. \tag{5.}$$

Si porro aequationem differentialem linearum curvaturae eadem forma scribimus qua in superficiebus canalicis

$$\frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq},$$

facile ex aequationibus (5.) sequitur

$$\frac{p + \varphi'\alpha}{dp} = \frac{q + \psi'\alpha}{dq} \tag{6.}$$

sive

$$\frac{p + \varphi'\alpha}{r\,dx + s\,dy} = \frac{q + \psi'\alpha}{s\,dx + t\,dy}.$$

Si loco ipsius $\frac{dy}{dx}$ ponitur $\frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}$, sequitur

$$\frac{p + \varphi'\alpha}{r\varphi'\alpha + s\psi'\alpha} = \frac{q + \psi'\alpha}{s\varphi'\alpha + t\psi'\alpha}, \tag{7.}$$

quae aequatio ad unam pertinet ex lineis curvaturae secundae seriei.

Ut secundum methodum generalem in I. ex hac omnes derivemus, inter has aequationes

$$(8.)\quad \begin{cases} (x'-x)\varphi'\alpha + (y'-y)\psi'\alpha + z'-z = 0, \\ (x'-\varphi\alpha)^2 + (y'-\psi\alpha)^2 + (z'-\alpha)^2 = r^2, \\ (x'-\varphi\alpha)\varphi'\alpha + (y'-\psi\alpha)\psi'\alpha + z'-\alpha = 0, \\ (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 = c^2, \\ (x-\varphi\alpha)^2 + (y-\psi\alpha)^2 + (z-\alpha)^2 = r^2, \\ \dfrac{p+\varphi'\alpha}{r\varphi'\alpha + s\psi'\alpha} = \dfrac{q+\psi'\alpha}{s\varphi'\alpha + t\psi'\alpha} \end{cases}$$

7] x, y, z, α eliminandum est, quod quum duobus modis fieri possit, accipimus has duas aequationes

$$(9.)\qquad \omega(x', y', z', c) = 0, \quad \chi(x', y', z', c) = 0,$$

quae secundam seriem linearum curvaturae repraesentant.

Adnotandum est aequationem primam in (8.) accipi, si exprimitur punctum x', y', z' (ad curvas secundae seriei pertinens) in plano normali situm esse curvae (7.), cujus aequatio propter aequationem (4.) est

$$(\xi-x)\varphi'\alpha + (\eta-y)\psi'\alpha + \zeta - z = 0,$$

porro in ultima aequationum (8.) loco p, q, r, s, t valores eorum ex aequationibus (2.), (3.), (4.) derivatos ponendos esse. Numerus aequationum in nostro casu numerum aequationum in I. propterea superat, quod hic etiam α eliminandum est. Constanti c valores a zero usque ad $2r$ sunt tribuendi.

5.

De duobus superficierum generibus quorum alterum aequatione $x+zp = cp$, alterum aequatione $x+zp = k(y+zq)$ repraesentantur (de superficiebus cylindricis).

Forma aequationis differentialis linearum curvaturae supra adhibita

$$(1.)\qquad \frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq}$$

ad inveniendas lineas curvaturae superficierum generum

$$(2.)\qquad x+zp = cp,$$

$$(3.)\qquad x+zp = k(y+zq),$$

ubi c et k sunt constantes, sponte adducit.

Integralis aequationis (2.) facile invenitur

$$x^2 + z^2 - 2cz + 2\varphi y = 0, \tag{4.}$$

ubi φ arbitraria est functio.

Ex aequationibus (1.), (2.) sequitur

$$c\,dq = d(y + qz),$$

ex quo

$$cq + c_1 = y + qz, \tag{5.}$$

ubi c_1 novus est constans. Atque invenitur linearum curvaturae unam seriem hoc systemate aequationum repraesentari

$$\begin{cases} \varphi' y + c_1 = y, \\ x^2 + z^2 - 2zc + 2\varphi y = 0. \end{cases} \tag{6.}$$

Quod ad aequationem (3.) pertinet, methodo usi LAGRANGEiana, quam jam supra in superficiebus aequatione

$$(1+q^2)s - pqt = 0$$

contentis adhibuimus, hanc invenimus ejus integralem

$$\Phi\left(\frac{z^2}{2} - klx - \frac{(1+k^2)x^2}{2},\ kx + y\right) = 0, \tag{7.}$$

ubi l novus est constans.

Aequatio autem (1.) propter (3.) abit in

$$dq = k\,dp,$$

ex quo

$$q = kp + m, \tag{8.}$$

ubi m est constans. Inter derivatas aequationis (7.) et aequationem (8.) p et q eliminatis accipitur aequatio unius seriei linearum curvaturae.

Superficierum cylindricarum lineae curvaturae quamquam sunt notae, tamen hic adnotare convenit eas e forma aequationis (1.) sponte emanare.

Sit enim aequatio differentialis superficierum cylindricarum

$$ap + bq = 1, \tag{9.}$$

fit

$$a\,dp + b\,dq = 0,$$

itaque ex aequatione (1.) sequitur

$$x + pz + \frac{b}{a}(y + qz) = n, \tag{10.}$$

ubi n est constans, atque eliminanda erunt p et q inter aequationem (10.) et aequationes derivatas aequationis

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

quae est integralis aequationis (9.), ut lineae curvaturae inveniantur.

Simul relatio resultat inter superficies cylindricas et superficies (3.). Aequatio enim (10.) e genere est aequationis (3.), aequatio autem (8.) e genere aequationis (9.), ex quo concluditur lineas curvaturae superficierum (3.) accipi, si eae per superficies cylindricas secantur, lineas autem curvaturae superficierum cylindricarum accipi, si eae per superficies e genere aequationis (3.) secantur.

s] 6.

De superficie quadam generis secundi ordinis aequatione differentiali $s = 0$ contenti.

Ex aequatione differentiali

$$s = 0 \tag{1.}$$

sequitur

$$p = \varphi x, \quad q = \psi y. \tag{2.}$$

Ex quo deducitur

$$z = fx + f_1 y, \tag{3.}$$

ubi f et f_1 duae sunt arbitrariae functiones.

Aequatio differentialis linearum curvaturae

$$y'^2[(1+q^2)s - pqt] + y'[(1+q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

transit in hancce:

$$f'x \cdot f_1' y \cdot f_1'' y \cdot y'^2 - y'[(1+f_1'^2 y)f''x - (1+f'^2 x)f_1'' y] - f_1' y f' x f'' x = 0. \tag{4.}$$

Si nunc ex superficiebus (3.) eam quaeras, quae etiam aequationi differentiali:

$$(1+q^2)r - (1+p^2)t = 0, \tag{5.}$$

de quo genere infra plura afferemus, satisfaciat, pro aequatione (5.) hancce habeas:

$$\frac{f''x}{1+f'^2x} = \frac{f_1''y}{1+f_1'^2y}. \tag{6.}$$

Haec aequatio propterea, quod utraque pars separata est functio ipsorum x et y resp., constare non potest, nisi his duabus aequationibus satisfiat:

$$\frac{f''x}{1+f'^2x} = c, \tag{7.}$$

$$\frac{f_1''y}{1+f_1'^2y} = c. \tag{8.}$$

Ex aequatione (7.) sequitur

$$\operatorname{arc\,tg}(f'x) = cx + c_2,$$

sive

$$\operatorname{tg}(cx+c_2) = f'x. \tag{9.}$$

Ex hac aequatione sequitur

$$fx = \int \operatorname{tg}(cx+c_2)\,dx + c_3, \tag{10.}$$

ex qua facile eruas

$$fx = \frac{1}{c}\log\frac{1}{\cos(cx+c_1)} + c_3. \tag{11.}$$

Eodem modo accipias:

$$f_1y = \frac{1}{c}\log\frac{1}{\cos(cy+c_2)} + c_4. \tag{12.}$$

Itaque superficiei quaesitae aequatio est haec:

$$z = \frac{1}{c}\log\frac{1}{\cos(cx+c_1)} + \frac{1}{c}\log\frac{1}{\cos(cy+c_2)} + \frac{1}{c}p, \tag{13.}$$

ubi c, c_1, c_2, p sunt numeri constantes; quae etiam sub hanc formam redigi potest:

$$z = \frac{1}{c}\log\frac{\mu}{\cos(cx+c_1)\cos(cy+c_2)},$$

ubi $\mu = e^p$, sive sub hanc

$$z = \frac{1}{c}\log\frac{2\mu}{\cos[c(x+y)+c_1+c_2] + \cos[c(x-y)+c_1-c_2]}.$$

Nunc lineas curvaturae quaeramus hujus superficiei (13.).

Quum haec superficies aequationi (6.) satisfaciat, aequatio (4.) transit in

$$y' = \pm\sqrt{\frac{f''x}{f_1''y}}\ ^{*}),$$

quae ope aequationum praecedentium in hanc transformatur

$$y' = \pm\frac{\cos(cy+c_2)}{\cos(cx+c_1)}. \tag{14.}$$

Primum superius consideremus signum itaque integremus aequationem differentialem:

9] $$y' = \frac{\cos(cy+c_2)}{\cos(cx+c_1)}. \tag{15.}$$

Si ponitur

$$\cos(cy+c_2) = v,$$
$$\cos(cx+c_1) = w,$$

aequatio (15.) in hanc abit:

$$\frac{dv}{v\sqrt{1-v^2}} = \frac{dw}{w\sqrt{1-w^2}}. \tag{16.}$$

Integratione facta accipitur:

$$\frac{\sqrt{1-v^2}-1}{v} = m\frac{\sqrt{1-w^2}-1}{w},$$

ubi per m constans significatur.

Si pro v et w eorum valores substituuntur, accipitur:

$$\frac{\sin(cy+c_2)-1}{\cos(cy+c_2)} = m\frac{\sin(cx+c_1)-1}{\cos(cx+c_1)}. \tag{17.}$$

Si signum inferius in aequatione (14.) consideramus, pro aequatione (17.) accipimus

$$\frac{[\sin(cy+c_2)-1][\sin(cx+c_1)-1]}{\cos(cy+c_2)\cos(cx+c_1)} = m_1, \tag{18.}$$

ubi m_1 alius est constans.

Aequationes (17.) et (18.) projectiones utriusque seriei linearum curvaturae superficiei (13.) in plano ipsorum x, y repraesentant.

*) Vide infra No. 9 de superficiebus $(1+q^2)r-(1+p^2)t$ etc.

7.

De superficiei elasticae lineis curvaturae.

Axibus ellipsoidis ut axibus coordinatorum sumptis aequatio ellipsoidis est:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.}$$

Superficies elastica invenitur, si e centro ellipsoidis versus planum quodque tangens perpendiculum demittitur, atque continuum punctorum, in quibus perpendicula plana tangentia secant, superficiem elasticam constituit. Significatis igitur coordinatis variabilibus literis x', y', z' aequatio plani tangentis ellipsoidis in puncto x, y, z est:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Aequationes autem perpendiculi de centro in hoc planum demissi sunt:

$$a^2zx' = c^2xz' \quad \text{et} \quad b^2zy' = c^2yz'.$$

Si igitur x, y, z inter quattuor aequationes praecedentes eliminantur, resultat aequatio superficiei elasticae:

$$(x'^2+y'^2+z'^2)^2 = a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2. \tag{2.}$$

Hujus superficiei lineas curvaturae exploraturis, priusquam ad problema ipsum aggrediamur, eae aequationes relationis, in quibus praecipue ratiocinium nostrum innititur, nobis sunt eruendae.

Appellabimus punctum ellipsoidis et punctum superficiei elasticae correspondentia, si hoc punctum in superficie elastica situm congruit cum pede*) perpendiculi de centro versus planum ellipsoin in illo puncto tangens demissi. Coordinatis punctorum ellipsoidis per x, y, z significatis, x', y', z' sunto coordinata punctorum correspondentium. Curvam in superficie elastica sitam curvae in ellipsoide sitae correspondentem vocamus, si ex punctis inter se correspondentibus constant.

Ex aequatione ellipsoidis (1.) sequitur

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}. \tag{3.}$$

*) Pes perpendiculi idem significet, quod Germanice: Fußpunkt des Perpendikels.

10] Si quadratum longitudinis perpendiculi a centro ellipsoidis usque ad superficiem elasticam per v significatur, ita ut sit

$$v = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{4.}$$

atque ponas

$$\frac{dz'}{dx'} = p', \quad \frac{dz'}{dy'} = q',$$

ex aequatione (2.) sequitur:

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = \dfrac{2v - a^2}{c^2 - 2v} \cdot \dfrac{x'}{z'}, \\ q' = \dfrac{2v - b^2}{c^2 - 2v} \cdot \dfrac{y'}{z'}. \end{array} \right. \tag{5.}$$

Facile e definitione superficiei elasticae est visu inter duo puncta correspondentia has exstare relationes

$$\frac{x'}{z'} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{y'}{z'} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}. \tag{6.}$$

Si etiam p et p', q et q' resp. ad punctum ellipsoidis et superficiei elasticae pertinent, ope aequationum antecedentium hae evadunt aequationes:

$$p' = \frac{a^2 - 2v}{c^2 - 2v} p, \quad q' = \frac{b^2 - 2v}{c^2 - 2v} q. \tag{7.}$$

Porro ex aequatione (3.) et (6.) sequitur

$$x' = -pz', \quad y' = -qz'. \tag{8.}$$

Aequatione plani tangentis ellipsoidis et aequationibus (8.) adhibitis accipitur

$$z'(1 + p^2 + q^2) = \frac{c^2}{z},$$

sive

$$z' = \frac{c^2}{z(1 + p^2 + q^2)}. \tag{9.}$$

Ex aequationibus (8.) et (9.) sequitur

$$v = \frac{c^4}{z^2(1 + p^2 + q^2)} = \frac{c^2 \cdot z'}{z}, \tag{10.}$$

ex qua sequitur

$$c^2 - 2v = \frac{c^2}{z}(z - 2z'). \tag{11.}$$

Nunc ad problema ipsum, scilicet ad lineas curvaturae inveniendas, aggrediamur. Sed pro eo, ut statim has lineas eruamus, ita potius agemus, ut in eas curvas in ellipsoide sitas, quae lineis curvaturae superficiei elasticae correspondent, prius inquiramus; disquisitione exacta ex his facile lineae curvaturae ipsae superficiei elasticae deduci possunt. Aequatio differentialis linearum curvaturae superficiei elasticae sit

$$\frac{dx'+p'dz'}{dp'} = \frac{dy'+q'dz'}{dq'}, \tag{12.}$$

quaeritur aequatio differentialis earum linearum ellipsoidis, quae lineis curvaturae (12.) correspondent.

Ex aequationibus (8.) et (12.) derivatur:

$$\frac{(p'-p)dz'-z'dp}{dp'} = \frac{(q'-q)dz'-z'dq}{dq'}. \tag{13.}$$

Ex aequationibus (7.) sequitur ope aeq. (11.)

$$\begin{cases} p'-p = \dfrac{(a^2-c^2)z}{c^2(z-2z')}p, \\ q'-q = \dfrac{(b^2-c^2)z}{c^2(z-2z')}q, \end{cases} \tag{14.}$$

$$\begin{cases} dp' = \dfrac{2(a^2-c^2)(zdz'-z'dz)p}{c^2(z-2z')^2} + \dfrac{a^2z-2c^2z'}{c^2(z-2z')}dp, \\ dq' = \dfrac{2(b^2-c^2)(zdz'-z'dz)q}{c^2(z-2z')^2} + \dfrac{b^2z-2c^2z'}{c^2(z-2z')}dq. \end{cases} \tag{15.}$$

Aequatione (13.) in hanc formam

$$\frac{dp'}{(p'-p)dz'-z'dp} = \frac{dq'}{(q'-q)dz'-z'dq} \qquad [11$$

redacta valoribusque (14.), (15.) substitutis calculo facile instituendo accipitur:

$$A.dp-B.dq = 0, \tag{16.}$$

si brevitatis gratia ponitur

$$\begin{cases} A = a^2(b^2-c^2)qz^2dz'-c^2a^2(z-2z')zz'dq+2(c^2-b^2)c^2qz'^2dz, \\ B = b^2(a^2-c^2)pz^2dz'-c^2b^2(z-2z')zz'dp+2(c^2-a^2)c^2pz'^2dz. \end{cases} \tag{17.}$$

Facile est visu, A transire in B, si x cum y, p cum q, a cum b simul commutantur, itaque satis erit, si directe ipsius A modo valor eruitur. Ex aequationibus (3.) et (9.) sequitur, posito

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=N,$$

$$z'=\frac{z}{c^2N}. \tag{18.}$$

Hujus aequationis et aequationum (1.) et (3.) ope facile eruitur

$$A=\frac{zz'}{N}[Pq\,dz+Q\,dy], \tag{19.}$$

ubi

$$\left\{\begin{aligned} P&=2c^2-b^2-2a^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2+\frac{(2c^2-b^2)(a^2-c^2)}{c^4}z^2,\\ Q&=\frac{c^2}{b^2}(c^2-2a^2)+\frac{c^2(2b^2-c^2)(a^2-b^2)}{b^6}y^2+\frac{a^2-c^2}{b^2}z^2. \end{aligned}\right. \tag{20.}$$

Si nunc ponas

$$B=\frac{zz'}{N}[P'p\,dz+Q'dx], \tag{21.}$$

facile eruitur

$$\left\{\begin{aligned} P'&=2c^2-a^2-2b^2+\frac{b^2-a^2}{a^2}x^2+\frac{(2c^2-a^2)(b^2-c^2)}{c^4}z^2,\\ Q'&=\frac{c^2}{a^2}(c^2-2b^2)+\frac{c^2(2a^2-c^2)(b^2-a^2)}{a^6}x^2+\frac{b^2-c^2}{a^2}z^2. \end{aligned}\right. \tag{22.}$$

Habetur nunc aequatio differentialis curvarum ellipsoidis, quae lineis curvaturae superficiei elasticae correspondent, neglecto factore $\frac{zz'}{N}$,

$$[Pq\,dz+Q\,dy]\,dp=[P'p\,dz+Q'dx]\,dq,$$

sive, quum facile inveniatur esse $P'=P$,

$$dp\,[Pq\,dz+Q\,dy]=dq\,[Pp\,dz+Q'dx]. \tag{23.}$$

Ex qua calculo facile instituendo derivatur

$$M\,dx^2+N\,dx\,dy+R\,dy^2=0, \tag{24.}$$

ubi invenitur

$$M = \frac{xy}{a^2}(c^2P - a^2Q'),$$

$$N = \frac{Pc^4}{s^2}\left[\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2} - \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}\right] + Q(b^2-y^2) - Q'(a^2-x^2),$$

$$= \frac{Pc^4}{s^2}\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) + Q(b^2-y^2) - Q'(a^2-x^2),$$

$$= Pc^2\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right) + Q(b^2-y^2) - Q'(a^2-x^2),$$

$$R = \frac{xy}{b^2}(b^2Q - c^2P).$$

Quae aequatio, valoribus ipsorum M, N, R erutis, in hanc transformari potest:

$$\left(\nu\frac{x^2}{a^2}+\mu\frac{y^2}{b^2}+\lambda\right)\left[\frac{xy}{b^2}dy^2 + \left(-\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}\right)dx\,dy + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{xy}{a^2}dx^2\right] = 0,$$

ubi ponitur

$$\text{(25.)} \qquad \begin{cases} \nu = (a^2-c^2)(c^2-b^2), \\ \mu = -\dfrac{a^2}{b^2}(b^2-c^2)^2, \\ \lambda = a^2(b^2-c^2), \end{cases}$$

[12

et factore $\nu\frac{x^2}{a^2}+\mu\frac{y^2}{b^2}+\lambda$ ad tempus neglecto accipitur

$$\text{(26.)} \qquad \frac{xy}{b^2}dy^2 + \left(-\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}\right)dx\,dy + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{xy}{a^2}dx^2 = 0.$$

Haec aequatio est simplicissima forma aequationis differentialis projectionum earum curvarum ellipsoidis in plano ipsorum x, y, quae correspondent lineis curvaturae superficiei elasticae, atque simillima est aequationi differentiali projectionum linearum curvaturae ellipsoidis in plano ipsorum x, y; haec enim est:

$$\text{(27.)} \qquad \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}xyy'^2 + \left(x^2 - \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}\cdot y^2 - \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}\right)y' - xy = 0.$$

Methodus autem, qua celeb. MONGE ad resolvendam aequationem (27.) usus est, etiam ad aequationem (26.) adhiberi potest atque sequenti modo.

Ponamus primum

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} = A, \quad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2} = B,$$

aequatio (26.) transit in

$$A\frac{xy}{b^2}y'^2 + \left(\frac{x^2}{a^2} - A\frac{y^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2b^2}B\right)y' - \frac{xy}{a^2} = 0. \tag{28.}$$

Quae aequatio differentiata facile ad hanc reducitur formam:

$$\frac{\frac{A}{b^2}y'^2 + \frac{1}{a^2}}{y'}[xyy'' + y'(xy'-y)] = 0. \tag{29.}$$

Ex hac aequatione sequitur

$$\frac{\frac{A}{b^2}y'^2 + \frac{1}{a^2}}{y'} = 0, \tag{30.}$$

quae singularem praestat integralem, quam nunc nondum consideramus. Altera autem aequatio est

$$xyy'' + y'(xy'-y) = 0, \tag{31.}$$

quae praestat generalem integralem.

Si eodem modo aequationem (27.), quae est aequatio differentialis linearum curvaturae ellipsoidis, tractaveris, invenias generalem integralem hujus aequationis praecise per eandem aequationem (31.) offerri. Itaque primum nostra disquisitio nos ad hoc theorema adduxit:

Projectiones linearum curvaturae ellipsoidis in plano ipsorum x, y eadem aequatione differentiali secundi ordinis definiuntur, qua projectiones earum ellipsoidis curvarum, quae lineis curvaturae superficiei elasticae correspondent.

Sed ut insequens disquisitio docet, projectiones linearum ellipsoidis lineis curvaturae superficiei elasticae correspondentium in plano ipsorum x, y, quamquam eodem modo, quo projectiones linearum curvaturae ellipsoidis ipsius, sunt ellipses et hyperbolae, tamen hae projectiones cum illis non coïncidunt, exceptis nonnullis casibus.

Generalis integralis aequationis (31.) est

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta, \tag{32.}$$

ubi α, β constantes significant, inter quos exstat relatio:

$$\beta = -\frac{\frac{Bc^2}{a^2b^2}\alpha}{\frac{A}{b^2}\alpha + \frac{1}{a^2}}. \tag{33.}$$

Atque simili modo atque in ellipsoidis lineis curvaturae indagandis pergens atque $a > b > c$ ponens, invenias aequationem (32.) abire in

$$\frac{x^2}{\xi^2} \pm \frac{y^2}{\eta^2} = 1, \tag{34.}$$

[13

aequationem autem (33.) in hancce

$$\frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2-c^2}{a^2(a^2-b^2)}\xi^2 \mp \frac{a^2}{c^2}\frac{b^2-c^2}{b^2(a^2-b^2)}\eta^2 = 1. \tag{35.}$$

Signa in utraque aequatione (34.) et (35.) inter se sunt correspondentia.

Itaque quaesitae projectiones earum linearum ellipsoidis, quae lineis curvaturae superficiei elasticae correspondent, in plano ipsorum x, y sunt partim ellipses, partim hyperbolae, quae per aequationem (34.) repraesentantur. Axes harum ellipsium vel hyperbolarum ita determinari necesse est, ut coordinata sint puncti cujusdam resp. hyperbolae vel ellipseos, quae per aequationem (35.) data est.

Aequatione (27.) eodem modo quo (28.) tractata invenitur projectiones linearum curvaturae ellipsoidis in plano ipsorum x, y esse ellipses vel hyperbolas repraesentatas per aequationem

$$\frac{x^2}{\xi'^2} \pm \frac{y^2}{\eta'^2} = 1, \tag{36.}$$

ubi axes ξ', η' coordinata esse debent puncti cujusdam resp. hyperbolae vel ellipseos, quae aequatione

$$\frac{a^2-c^2}{a^2(a^2-b^2)}\xi'^2 \mp \frac{b^2-c^2}{b^2(a^2-b^2)}\eta'^2 = 1 \tag{37.}$$

continetur.

Si aequationes (36.) et (37.) cum aeq. (34.) et (35.) comparantur et ad nonnullos factores, quos supra calculum ad eruendam aequationem (28.) instituentes negleximus, respicitur, e disquisitione facile instituenda, quam brevitatis causa hic omittimus, invenitur, e lineis curvaturae ellipsoidis et e

curvis aequationum (34.) et (35.) exhibitis praeter eas quae in planis coordinatorum sunt sitae nullas coïncidere.

Sed supra etiam hunc factorem negleximus

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2} - \frac{y^2a^2(b^2-c^2)}{b^4} = a^2. \tag{38.}$$

Facile est demonstratu hanc esse singularem integralem aequationis differentialis linearum ellipsoidis lineis curvaturae superficiei elasticae correspondentium, itaque ad aequationem (34.) et (35.) non pertinentem; sed non minus facile invenitur, aequationem (38.) particularem esse integralem aequationis (27.), ex quo concluditur: praeter sectiones planorum coordinatorum etiam curvam (38.) simul esse lineam curvaturae ellipsoidis atque correspondentem lineae cuidam curvaturae superficiei elasticae.

Ex aequatione (30.) nil novi invenitur. Haec ad projectiones earum linearum ellipsoidis, quae lineis curvaturae superficiei elasticae correspondent, in eo plano, quod maximam et mediam continet ellipsoidis axes, satis esto.

Facile esset etiam projectiones in eo plano considerare, quod maximam et minimam et in eo, quod mediam et minimam continet axin. Sed quum simili modo fieri perspicuum sit, hoc omittamus.

Nunc restat aequationes linearum curvaturae superficiei elasticae ipsarum indicare, quae facillime ex aequationibus (34.) et (35.) derivari possunt. Nam formulis initio hujus disquisitionis explicatis adhibitis invenitur

$$\frac{a^4x'^2}{\xi^2} \pm \frac{b^4y'^2}{\eta^2} = (x'^2+y'^2+z'^2)^2, \tag{39.}$$

quae conjuncta cum aequatione superficiei elasticae ipsa

$$(x'^2+y'^2+z'^2)^2 = a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2 \tag{40.}$$

utramque hujus superficiei linearum curvaturae seriem repraesentat, si ipsis ξ et η eos des valores, qui aequationi

$$\frac{b^2}{c^2}\frac{a^2-c^2}{a^2(a^2-b^2)}\xi^2 \mp \frac{a^2}{c^2}\frac{b^2-c^2}{b^2(a^2-b^2)}\eta^2 = 1, \tag{41.}$$

signis in aequationibus (39.) et (41.) inter se correspondentibus, satisfaciant.

Lineam autem curvaturae, quae singulari integrali (38.) correspondet, invenias

$$x'^2(a^2-c^2)+y'^2(b^2-c^2) = (x'^2+y'^2+z'^2)^2, \tag{42.}$$ [14

quae cum (41.) conjungenda est, ut singularem lineam curvaturae superficiei elasticae accipiamus.

Nunc generali problemate absoluto nonnullas hac occasione annotationes adjicere liceat, quae et geometrice et adhibendis aequationibus modo exhibitis analytice deduci possunt, a nobis autem brevitatis causa breviter modo perstringendae.

1. Superficies elastica, quae ad ellipsoin revolutione ortam pertinet, ipsa est e superficiebus revolutione ortis atque axin revolutionis eandem habet quam ellipsois. Curvae meridionales ellipsoidis et circuli ejus axin recto angulo secantes simul sunt lineae curvaturae ellipsoidis et lineis curvaturae superficiei elasticae correspondentes, sive lineae curvaturae superficiei elasticae sunt curvae pedales linearum curvaturae ellipsoidis.

2. Haec relatio ad superficies omnes revolutione ortas extendi potest.

Si enim de puncto quodam fixo axis revolutionis in plana tangentia superficiei perpendicula demittuntur, superficies, quae pedibus eorum gignitur, superficies pedalis appelletur; punctum superficiei et punctum superficiei pedalis correspondentia vocentur, si hoc cum pede congruit perpendiculi de puncto fixo axis in planum superficiem in illo puncto tangens demissi. Curvae in utraque superficie correspondentes sunto eae, quae e punctis correspondentibus constant. Superficies pedalis item est superficies revolutione orta. Tum generaliter sequitur: Lineas curvaturae superficiei et pedalis ejus esse curvas correspondentes.

3. Denique notandum est, si generaliter in quadam superficie de puncto quodam fixo in plana tangentia perpendicula demittas et superficiem pedibus eorum formatam superficiem ejus pedalem voces, atque ut supra puncta et curvas correspondentes accipias, fieri posse, ut punctum fixum ita determinetur, ut lineae superficiei pedalis, quae lineis curvaturae primitivae superficiei correspondent, facilius eruantur quam lineae curvaturae superficiei ipsius. Perspicuum est, his lineis inventis, lineas curvaturae superficiei primitivae tum semper de iis facile deduci posse.

Atque vice versa.

8.

De ea superficie, quae superficies spiralis (windschiefe Schraubenfläche) vocatur.

Notum est aequationem hujus superficiei esse:

$$(1.) \qquad z = a.R.\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

ubi R est radius circuli, qui est basis cylindri, et $a = \operatorname{tg}\varphi$, φ designante angulum constantem, quem linea generatrix cylindri format cum tangente lineae spiralis. Basis cylindri est planum ipsorum x, y, axis cylindri axis ipsorum z.

Si ex aequatione (1.) valores ipsorum p, q, r, s, t eruas, invenitur $r = -t$ atque calculo facile instituendo aequationem differentialem linearum curvaturae:

$$y'^2[(1+q^2)s - pqt] + y'[(1+q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0,$$

si factorem $\frac{aR}{(x^2+y^2)^2}$ negligas, in hanc transformes:

$$(2.) \quad \left(y^2 - x^2 - \frac{a^2R^2x^2}{x^2+y^2}\right)y'^2 + 2xy\left(2 + \frac{a^2R^2}{x^2+y^2}\right)y' - \left(y^2 - x^2 + \frac{a^2R^2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0,$$

quae in hanc transmutari potest:

$$-\frac{a^2R^2}{x^2+y^2}(xy'-y)^2 - (xy'-y)^2 + (yy'+x)^2 = 0.$$

Ex qua sequitur

$$yy' + x = \pm(xy'-y)\sqrt{1+\frac{a^2R^2}{x^2+y^2}},$$

quae eadem est atque haec:

15] $$(3.) \qquad \tfrac{1}{2}d(x^2+y^2) = \pm x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{1+\frac{a^2R^2}{x^2+y^2}}.$$

Si nunc ponas

$$x^2+y^2 = v^2,$$
$$\frac{y}{x} = t,$$

sequitur

$$x^2 = \frac{v^2}{1+t^2}.$$

Itaque ex aequatione (3.) sequitur

$$\tfrac{1}{2}d(v^2) = \pm dt \cdot \frac{v^2}{1+t^2} \cdot \sqrt{1+\frac{a^2R^2}{v^2}},$$

sive si ponas

$$v^2 = z,$$

$$\tfrac{1}{2}dz = \pm dt \cdot \frac{z}{1+t^2} \cdot \sqrt{1+\frac{a^2R^2}{z}},$$

ex qua sequitur

$$\frac{\pm \tfrac{1}{2}dz}{\sqrt{z^2+a^2R^2z}} = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Qua integrata ad aequationes advehimur:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \log c\,[\sqrt{x^2+y^2+a^2R^2}+\sqrt{x^2+y^2}], \tag{4.}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \log c_1[\sqrt{x^2+y^2+a^2R^2}-\sqrt{x^2+y^2}], \tag{5.}$$

ubi c et c_1 constantes sunt.

Aequationes (4.) et (5.) utramque seriem linearum curvaturae superficiei spiralis repraesentant.

Aequationes autem (4.) et (5.) simpliciores fiunt, si coordinata polaria adhibentur. Sit r radius vector, φ angulus polaris atque centrum coordinatorum rectangulorum polus. Tum accipitur

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} \log c\,[\sqrt{r^2+a^2R^2} \pm r],$$

sive

$$\varphi = \log c\,[\sqrt{r^2+a^2R^2} \pm r], \tag{6.}$$

ubi signum superius aequationi (4.), inferius aequationi (5.) correspondet. Ex aequatione (6.), per quam curva ad spiralium genus pertinens exprimitur, facile etiam r ut functionem explicitam anguli φ extrahere possis.

9.

De lineis curvaturae superficierum generis secundi ordinis, aequatione $(1+q^2)r-(1+p^2)t = 0$ contenti.

Ad integrandam aequationem differentialem partialibus differentiis secundi ordinis

$$Rr + Ss + Tt = V, \tag{1.}$$

ubi R, S, T, V sunt functiones ipsorum x, y, z, p, q, exstare constat hanc methodum a celeb. MONGE inventam.

Propter

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

aequatio (1.) etiam talis adhiberi potest:

$$(2.) \qquad R\,dp\,.\,dy + T\,dq\,.\,dx - V\,dx\,.\,dy = s(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2).$$

Quaerantur duae aequationes inter x, y, z, p, q, quarum systema tribus his aequationibus differentialibus

$$(3.) \qquad R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dy\,dx = 0,$$

$$(4.) \qquad R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0,$$

$$(5.) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

satisfaciat.

Sint hae aequationes:

$$(6.) \qquad f_1(x, y, z, p, q) = a_1,$$

$$(7.) \qquad f_2(x, y, z, p, q) = a_2,$$

tum generalis integralis aequationis (1.) inter x, y, z, p, q est

$$(8.) \qquad f_2 = \varphi f_1,$$

ubi φ arbitrariam significat functionem. Si haec methodus ad aequationem

16] $$(9.) \qquad (1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t = 0$$

adhibetur, aequationes, quae aequationibus (3.), (4.) correspondent, sunt hae

$$(10.) \qquad (1+q^2)\,dp\,dy - (1+p^2)\,dq\,dx = 0$$

et

$$(11.) \qquad (1+q^2)\,dy^2 - (1+p^2)\,dx^2 = 0.$$

Ex aequatione (11.) sequitur

$$(12.) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}.$$

Hoc valore in aequatione (10.) substituto accipitur

$$\sqrt{1+q^2}\,.\,dp \mp \sqrt{1+p^2}\,.\,dq = 0,$$

quae has duas praebet aequationes:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} \tag{13.}$$

et

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = 0. \tag{14.}$$

Ex quibus sequitur: aut

$$\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{q+\sqrt{1+q^2}} = c, \tag{15.}$$

aut

$$(p+\sqrt{1+p^2})(q+\sqrt{1+q^2}) = c. \tag{16.}$$

Quas formulas non ad integrandam aequationem (9.) eruimus, quum facile sit ostensu, hic methodum MONGEianam irritam fieri. Sed animadvertimus ope harum formularum lineas curvaturae superficierum (9.) secundum methodum inveniri posse, quae notitiam integralis aequationis (9.) non desiderat.

Data sit enim aequatio superficiei cujusdam, quae aequationi (9.) satisfacit, scilicet

$$\psi(x, y, z) = 0. \tag{17.}$$

Ex hac aequatione deriventur successive secundum x et y differentiando

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z, p) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z, q) = 0. \end{cases} \tag{18.}$$

Contendo, si inter aequationes (15.) et (18.) p et q eliminantur, aequationem resultantem conjunctam cum aequatione (17.) unam seriem linearum curvaturae superficiei (17.) repraesentare. Si eadem eliminatio fit inter aequationes (16.) et (18.) ad alterius seriei linearum curvaturae aequationem perveniri.

Demonstratio. De aequatione (15.) sola dicamus, idem ad aequationem (16.) valebit.

Aequatio differentialis linearum curvaturae quadratica fit in nostro casu

$$[(1+q^2)s - pqt]y'^2 - [(1+p^2)s - pqr] = 0,$$

sive

$$(1+q^2)dy^2 - (1+p^2)dx^2 = 0. \tag{19.}$$

Jam aequatio (2.) pro aequatione (9.) transit in hanc:

$$(20.) \qquad (1+q^2)\,dp\,.\,dy-(1+p^2)\,dq\,.\,dx = s[(1+q^2)\,dy^2-(1+p^2)\,dx^2].$$

Inter $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$, quae ad lineam quandam curvaturae pertinent, tum aequatio (11.) tum aequatio (20.) consistit, ergo etiam aequatio (10.), quapropter etiam aut aequatio (15.) aut aequatio (16). Ex quo sequitur, valores ipsorum p et q ex aequationibus (18.) derivatos pro linea quadam curvaturae aut aequationi (15.) aut aequationi (16.) satisfacere debere. Eliminatis igitur p et q inter aequationes aut (15.) et (18.) aut (16.) et (18.), aequationes resultant

$$(21.) \qquad \psi_1(x, y, s) = 0$$

aut

$$(22.) \qquad \psi_2(x, y, s) = 0,$$

quae cum aequatione (17.) conjunctae resp. unam et alteram seriem linearum curvaturae praebent.

Exemplum hujus methodi applicandae adjicere liceat.

Supra in No. 6 superficiem tractavimus, cujus aequatio et aequationi (9.) et aequationi $s = 0$ satisfacit.

Hanc superficiem, quamquam specialis est hujusce discussionis casus, propterea supra singulariter tractavimus, quia et aequationem ejus indicare voluimus et aequatio linearum ejus curvaturae simplicissimo modo directe derivari potuit. Nunc easdem lineas curvaturae methodo modo explicata invenire volumus, aequationesque earum identicas inveniemus cum aequationibus in No. 6.

17] Aequationibus (18.) correspondent aequationes ex No. 6

$$(23.) \qquad \begin{cases} p = \operatorname{tg}(cx+c_1), \\ q = \operatorname{tg}(cy+c_2). \end{cases}$$

Positis his valoribus ipsorum p et q in aequatione (15.) sequitur

$$(24.) \qquad \frac{\operatorname{tg}(cx+c_1)+\dfrac{1}{\cos(cx+c_1)}}{\operatorname{tg}(cy+c_2)+\dfrac{1}{\cos(cy+c_2)}} = m,$$

ubi m loco ipsius c in aequatione (15.) ut arbitrarium constantem ponimus, sive

$$\frac{\sin(cx+c_1)+1}{\cos(cx+c_1)} = m\frac{\sin(cy+c_2)+1}{\cos(cy+c_2)}.$$

Multiplicatis et nominatore et denominatore in recta parte cum $\sin(cy+c_2)-1$, in laeva cum $\sin(cx+c_1)-1$, accipias:

$$\frac{\sin(cy+c_2)-1}{\cos(cy+c_2)} = m\frac{\sin(cx+c_1)-1}{\cos(cx+c_1)}. \tag{25.}$$

Quae aequatio cum aequatione (17.) in No. 6 identica est.

Si autem valores ipsorum p, q ex aequationibus (23.) ponas in aequatione (16.), accipitur:

$$\frac{[\sin(cy+c_2)+1][\sin(cx+c_1)+1]}{\cos(cy+c_2)\cos(cx+c_1)} = P_1,$$

ubi P_1 constans est.

Multiplicatis et nominatore et denominatore cum

$$[\sin(cy+c_2)-1][\sin(cx+c_1)-1]$$

evadit

$$\frac{[\sin(cy+c_2)-1][\sin(cx+c_1)-1]}{\cos(cy+c_2)\cos(cx+c_1)} = \frac{1}{P_1}, \tag{25a.}$$

quae identica est cum aequatione (18.) in No. 6, si ponas $\frac{1}{P_1} = m_1$.

Itaque re vera adhibitis duabus aequationibus (15.) et (16.) conjunctis cum aequationibus ex aequatione superficiei differentiatione emanantibus utramque seriem linearum curvaturae invenimus.

Annotatio. Pro duobus generibus primi ordinis superficierum ad genus (9.) pertinentibus nostra methodus unam modo seriem linearum curvaturae invenire docet, altera per eam indefinita relinquitur, scilicet pro his generibus:

$$\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{q+\sqrt{1+q^2}} = c \tag{26.}$$

et

$$(p+\sqrt{1+p^2})(q+\sqrt{1+q^2}) = c'. \tag{27.}$$

Nam quod ad genus (26.), aequatio (15.) propterea nihil detegit, quod pars ejus laeva per aequationem (26.) in constantem redit. Manet aequatio

(16.), quae cum ea aequatione, quae est integralis aequationis (26.) et iis aequationibus, quae aequationibus (18.) correspondent, conjuncta unam dat seriem linearum curvaturae.

Quod autem ad genus (27.), eodem modo perspicuum est, aequationem (16.) nihil detegere, aequationem autem (15.) ad unam adducere seriem linearum curvaturae.

Genera (26.) et (27.) ad superficies devolubiles pertinent, earumque igitur lineae curvaturae alia methodo supra explicata inveniri possunt.

Sed si unam seriem linearum curvaturae cognovisse sat sit, etiam pro his superficiebus methodus, quam modo tradidimus, suppeditat.

Consideremus enim primum genus (26.). Generalis integralis aequationis (26.) ut ad superficies devolubiles pertinentis facile eruitur hoc systema:

$$(28.)\qquad \begin{cases} z = x\dfrac{c^2L^2-1}{2cL} + y\dfrac{L^2-1}{2L} - \varphi\left(\dfrac{L^2-1}{2L}\right), \\ \dfrac{c^2L^2+1}{c(L^2+1)}x + y = \varphi'\left(\dfrac{L^2-1}{2L}\right), \end{cases}$$

ubi L parameter indefinitus, φ functio arbitraria. Porro est

18] $$(29.)\qquad q = \frac{L^2-1}{2L}, \quad p = \frac{c^2L^2-1}{2cL}.$$

Si hos valores in aequatione (16.) substituas, invenitur:

$$\frac{(c^2L^2-1+c^2L^2+1)}{2cL}\cdot\frac{(L^2-1+L^2+1)}{2L} = M,$$

ubi M loco ipsius c in aequatione (16.) ponimus, sive

$$cL^2 = M,$$

sive

$$(30.)\qquad L = P,$$

ubi P constans est. Si hunc valorem ipsius L in aequatione secunda (28.) substituas, aequatio unius seriei linearum curvaturae est:

$$(31.)\qquad \frac{c^2P^2+1}{c(P^2+1)}x + y = \varphi'\left(\frac{P^2-1}{2P}\right),$$

quae est aequatio lineae rectae.

Eodem modo inveniri potest, projectiones unius seriei linearum curvaturae superficierum (27.) in plano ipsorum x, y esse lineas rectas, quarum aequatio

$$-\frac{P'^2+c'^2}{c'(1+P'^2)}x+y=\varphi'\left(\frac{P'^2-1}{2P'}\right). \tag{32.}$$

Atque re vera et generis (26.) et generis (27.) alteram seriem linearum curvaturae in plano ipsorum x, y secundum lineas rectas projici etiam alio modo intelligi potest. —

VITA.

Natus sum Lazarus Fuchs die Vto mens. Maji anni MDCCCXXXII Moschini urbe provinciae Posnaniensis, patre Raphael, matre Caecilia, quam morte mihi ereptam lugeo. Primis literarum elementis in schola urbis patriae eruditus anno XLVI Posnaniam me contuli, ubi primum literis antiquis privatim eruditus sum. Anno XLVIII tertiam classem gymnasii adii, quod Posnaniae Friderico Guilelmini floret, tum rectore viro excell. Kiessling. Anno LIII rectore viro excell. Heydemann maturitatis testimonio instructus de gymnasio decessi. Tum annum privatim Posnaniae moratus anno LIV Berolinum me contuli, ubi rectore magnif. celeb. Encke civibus hujus academiae adscriptus et decano amplissimo celeb. Trendelenburg apud facultatem philosophicam nomen professus sum. Quadriennio absoluto iterum rectore magnif. celeb. Rudorff civibus academiae adscriptus et decano amplissimo celeb. Kummer apud facultatem philosophicam nomen professus sum. Scholis interfui horum virorum celeb. et expert. Arndt, Böckh, Borchardt, Clausius, Dirichlet, Dove, Encke, Kummer, Lichtenstein, Magnus, Mitscherlich, Ohm, Poggendorff, v. Raumer, Sonnenschein, Trendelenburg, Weiss, Weierstrass. Quibus omnibus viris optime de me meritis maximas gratias ago semperque agam.

THESES. [20

1. Quae in geometria simpliciter deducuntur, analytice formulis non minus simplicibus cognosci posse oportet.
2. Criterium metacentri, quod vulgo ad aequilibrium corporis navantis adhibebatur, jure a recentioribus rejectum est.
3. Methodus mathematica plerumque ad perscrutandas res philosophicas non est adhibenda.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 1, Zeile 3 v. u. Eduardus statt Eduard,
„ 2, „ 6 aliarumque statt aliarumquae,
„ 16, „ 9 v. u. zero statt sero,
„ 19, „ 1 satisfaciat statt satisfaciant,
„ 24, „ 6 v. u. superficiei statt superficie,
„ 27, „ 6 aequationem statt aequatio,
„ 28, „ 10 esse statt est,
lineam statt linea,
correspondentem statt correspondens,
„ 30, „ 10 aequationem differentialem statt aequatio differentialis,
„ 33, Gln. (15.) und (16.) c statt c_1,
„ 34, Gl. (24.) und im folgenden m statt M,
„ 35, Zeile 12 v. u. m_1 statt m'.

SCH.

2) Die Gleichung (7.) auf S. 17 und die darauf folgende Zeile enthalten ein Versehen. Die Anwendung der Methode von LAGRANGE auf die partielle Differentialgleichung (3.), S. 16, ergiebt nämlich deren allgemeines Integral in der Form

$$\Phi\left(\frac{x^2}{2} - k(kx+y)x + \frac{(1+k^2)x^2}{2},\ kx+y\right) = 0.$$

STÄCKEL.

II.

INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right].$$

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 58, 1860, S. 80—89.)

---

1. [80

Um die Nabelpunkte einer Fläche zu finden, hat man bekanntlich die Gleichung der gegebenen Fläche mit zwei anderen zu verbinden, die man erhält, wenn man in der von MONGE angegebenen Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$[(1+q^2)s-pqt]y'^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]y'-[(1+p^2)s-pqr] = 0$$

ausser dem Coefficienten von y' noch einen der beiden andern der Null gleichsetzt. Man erhält die partiellen Differentialgleichungen:

(1.) $$(1+q^2)r-(1+p^2)t = 0,$$

(1a.) $$(1+q^2)s-pqt = 0$$

oder

$$(1+p^2)s-pqr = 0.$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass sich auf den Flächen, die einer dieser Gleichungen genügen, wenn sie überhaupt Nabelpunkte besitzen, im Allgemeinen Nabellinien befinden.

Während nun die Gleichung (1a.) leicht integrirt werden kann, verursacht die Integration der Gleichung (1.) grössere Schwierigkeiten. — Bevor ich aber

zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Arbeit, nämlich zu dieser Integration, übergehe, kann ich nicht unterlassen, in Kürze zu zeigen, dass man beide Reihen der Krümmungslinien der durch die Gleichung (1.) dargestellten Flächenfamilie finden kann, ohne dass es nöthig ist, das Integral dieser Gleichung vorher zu kennen.

Denn bildet man nach der MONGEschen Methode die Gleichungen der Characteristiken dieser Flächen, so erhält man:

$$(2.) \qquad \begin{cases} (1+q^2)\,dp\,dy - (1+p^2)\,dq\,dx = 0, \\ (1+q^2)\,dy^2 \quad - (1+p^2)\,dx^2 \quad = 0. \end{cases}$$

81] Durch Combination derselben folgt für die eine und die andere Characteristik

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = 0, \qquad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = 0,$$

oder durch Integration:

$$(3.) \qquad (p+\sqrt{1+p^2})(q+\sqrt{1+q^2}) = c,$$

$$(4.) \qquad \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{q+\sqrt{1+q^2}} = c_1,$$

wo c und c_1 Constanten sind. Andererseits geht die am Anfange erwähnte Differentialgleichung der Krümmungslinien für die Flächenfamilie der Gleichung (1.), wie man leicht findet, über in die folgende:

$$(5.) \qquad (1+q^2)\,dy^2 - (1+p^2)\,dx^2 = 0.$$

Da nun diese Gleichung mit der zweiten Gleichung (2.) identisch ist, und da aus der Combination eben dieser Gleichung mit der Gleichung (1.) die erste Gleichung (2.) erhalten wird, so ergiebt sich, dass die letztere Gleichung ebenfalls für die Krümmungslinien gelte. Man ersieht daraus, dass die Integrale der Gleichungen (2.), nämlich die Gleichungen (3.) und (4.), der einen oder der andern Reihe von Krümmungslinien angehören. Ist nun die Gleichung einer der Familie (1.) angehörigen Fläche gegeben, so hat man nur dieselbe nebst den beiden durch einmalige Differentiation nach x und y daraus abgeleiteten mit den Gleichungen (3.) und (4.) zu verbinden, um durch Elimination beide Reihen von Krümmungslinien zu erhalten. — Wir gehen nunmehr zur Integration der Differentialgleichung (1.) über.

2.

Zunächst verwandeln wir die gegebene Differentialgleichung in eine solche, in welcher die ersten Ableitungen nicht vorkommen, mit Hülfe einer von LEGENDRE (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, ann. 1787) angegebenen Transformation. Dieselbe besteht darin, dass man statt der Variabeln x, y, z drei neue p, q, ω einführt, welche mit ihnen durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$(6.) \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \omega = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z$$

und umgekehrt:

$$(7.) \qquad x = \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial \omega}{\partial q}, \quad z = p\frac{\partial \omega}{\partial p} + q\frac{\partial \omega}{\partial q} - \omega.$$

Man hat alsdann [82

$$(8.) \qquad r = \frac{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial q^2}}{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial q^2}\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p\,\partial q}\right)^2}, \quad s = -\frac{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p\,\partial q}}{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial q^2}\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p\,\partial q}\right)^2},$$

$$t = \frac{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial q^2}\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial p\,\partial q}\right)^2}.$$

Geht nun eine Differentialgleichung

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

durch diese Substitution über in:

$$\varphi\left(p, q, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial p}, \frac{\partial \omega}{\partial q}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial p\,\partial q}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2}\right) = 0,$$

und gelingt es, die letztere so zu integriren, dass man hat:

$$\omega = F[p, q, \psi(p, q), \chi(p, q)],$$

(worin ψ und χ willkürliche Functionen sind), so erhält man durch blosse Differentiation das allgemeine Integral der ersteren vermöge der Gleichungen (7.) so dargestellt, dass x, y, z als Functionen zweier Variabeln p, q auftreten, und in ihrem Ausdrucke eine hinreichende Anzahl willkürlicher Functionen

enthalten ist. Es ist zu bemerken, dass, wenn x, y, z die Coordinaten einer Fläche bedeuten, ω, p, q die Coordinaten der von MONGE so genannten reciproken Fläche sind. (Vergl. CHASLES, Aperçu historique, Note XXX.)

Unsere Gleichung (1.) geht durch die LEGENDREsche Transformation in die folgende über:

$$(9.) \qquad (1+p^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} - (1+q^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2} = 0,$$

mit deren Integration wir uns nun zu beschäftigen haben.

3.

Wir führen als Coordinaten diejenigen Curven der reciproken Flächen (9.) ein, welche den Krümmungslinien der Flächen (1.) entsprechen. (Siehe die Gleichungen (3.), (4.) und (6.).) Wir setzen also:

$$(10.) \qquad \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{q+\sqrt{1+q^2}} = u, \qquad (p+\sqrt{1+p^2})(q+\sqrt{1+q^2}) = u_1,$$

83] wo u und u_1 die beiden neuen Variabeln sind. Daraus folgt

$$(11.) \qquad p+\sqrt{1+p^2} = \sqrt{uu_1}, \qquad q+\sqrt{1+q^2} = \sqrt{\frac{u_1}{u}}.$$

Durch Differentiation erhält man

$$(12.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{u_1 du + u du_1}{uu_1}\right\}, \\ \dfrac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{-u_1 du + u du_1}{uu_1}\right\}. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial p}{\partial u} = a, \qquad \frac{\partial p}{\partial u_1} = a_1, \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = b, \qquad \frac{\partial q}{\partial u_1} = b_1,$$

so erhält man aus (12.)

$$(13.) \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\,\dfrac{1}{u}, & b = -\dfrac{1}{2}\sqrt{1+q^2}\,\dfrac{1}{u}, \\ a_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\,\dfrac{1}{u_1}, & b_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+q^2}\,\dfrac{1}{u_1}. \end{cases}$$

Um die transformirte Differentialgleichung zu erhalten, kann man z. B. die von JACOBI (dieses Journal Band 36, über eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$[1])) angegebene Reductionsmethode anwenden, wonach, wenn F eine Function von $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ bedeutet und

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u_1}-\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u}$$

gesetzt wird,

$$(14.)\quad \Delta\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial y}}\right]=\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\Delta\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial u}}\right)-\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\Delta\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial u_1}}\right)$$

ist. In unserem Falle muss man

$$(15.)\quad F=\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)^2}{1+q^2}-\frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial q}\right)^2}{1+p^2}\right\}$$

setzen. Durch Transformation ergiebt sich hieraus mit Rücksicht auf (13.)

$$(16.)\quad \Delta^2 F = e\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u_1},$$

worin [84

$$e=\frac{aa_1}{1+p^2}-\frac{bb_1}{1+q^2}.$$

Aus (15.) und (16.) folgt nun, dass in unserem Falle (14.) die Differentialgleichung liefert:

$$(17.)\quad \frac{\partial\left\{K\frac{\partial\omega}{\partial u_1}\right\}}{\partial u}+\frac{\partial\left\{K\frac{\partial\omega}{\partial u}\right\}}{\partial u_1}=0,$$

worin

$$(18.)\quad K=\frac{uu_1}{(u+u_1)(uu_1+1)}.$$

Es ist aber

$$K=\frac{1}{u+\frac{1}{u}+u_1+\frac{1}{u_1}},$$

[1]) Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 191. Sch.

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$(19.)\qquad \begin{cases} u+\dfrac{1}{u}=\alpha, \\ u_1+\dfrac{1}{u_1}=\beta \end{cases}$$

setzen,

$$K=\frac{1}{\alpha+\beta},$$

mithin geht die Gleichung (17.) über in

$$\frac{\partial\left[\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\right]}{\partial u}+\frac{\partial\left[\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\right]}{\partial u_1}=0$$

oder in

$$(20.)\qquad 2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial u_1}-\frac{d\alpha}{du}\frac{\partial\omega}{\partial u_1}-\frac{d\beta}{du_1}\frac{\partial\omega}{\partial u}=0.$$

Ich werde jetzt zeigen, dass man die Differentialgleichung (20.) sogar unter der allgemeineren Voraussetzung integriren kann, dass α und β beliebige Functionen respective von u und u_1 sind.

4.

Führt man nämlich α und β als Variabeln ein, so hat man:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{du},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial u_1}=\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{d\beta}{du_1},\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial u_1}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}\frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{du_1}.$$

85] Daher geht die Gleichung (20.) über in:

$$(21.)\qquad 2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=0.$$

Wendet man nun die Substitution

$$(22.)\qquad \begin{cases} \alpha+\beta=t, \\ \alpha-\beta=v \end{cases}$$

an, so hat man

$$(22a.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}, & \dfrac{\partial\omega}{\partial v}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}, \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}, & \dfrac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}. \end{cases}$$

Durch Subtraction der beiden letzteren Gleichungen von einander erhält man

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

oder vermöge der ersten Gleichung (22a.) und der Gleichung (21.)

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\frac{1}{t}\frac{\partial\omega}{\partial t}. \tag{23.}$$

Diese Gleichung aber ist ein specieller Fall derjenigen, die Poisson (Journal de l'École Polytechnique, cah. 19) behandelt, nämlich der folgenden:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+\frac{l}{t}\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{g}{t^2}\omega\right), \tag{24.}$$

worin l, g Constanten sind. Euler und in der erwähnten Abhandlung Poisson haben im Allgemeinen das Integral derselben oder vielmehr der durch die Substitution

$$\omega=V.t^{-\frac{1}{2}l} \tag{25.}$$

in die folgende verwandelten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{mV}{t^2}\right) \tag{26.}$$

in unendlichen Reihen gegeben.

Die Fälle, in welchen Poisson dieselben summirt, hängen wesentlich von den Wurzeln der Gleichung:

$$k(k-1)-m=0 \tag{27.}$$

ab. Ist insbesondere eine Wurzel derselben negativ, wo alsdann die andere positiv sein muss, und zwar habe die positive die Form $i+\frac{1}{2}$, wo i eine positive ganze Zahl bedeutet, so werden die Glieder der Reihen vom $2i^{\text{ten}}$ ab unendlich — aber gerade auch in diesem Falle lässt sich, wie Poisson gezeigt hat, das Integral in endlicher Form darstellen. Es ist nämlich: [86

$$\begin{aligned}V=\;&t^{i+\frac{1}{2}}\int_0^\pi\varphi(t\cos\lambda+av)\sin^{2i}\lambda\,d\lambda \\ &+t^{-i+\frac{1}{2}}\left[\psi(t+av)+A_1't\frac{\partial\psi(t+av)}{\partial t}+A_2't^2\frac{\partial^2\psi(t+av)}{\partial t^2}+\cdots+A_{2i-1}'t^{2i-1}\frac{\partial^{2i-1}\psi(t+av)}{\partial t^{2i-1}}\right] \\ &-ct^{i+\frac{1}{2}}\log t\int_0^\pi\psi'(t\cos\lambda+av)\sin^{2i}\lambda\,d\lambda+2ct^{i+\frac{1}{2}}\int_0^\pi\psi'(t\cos\lambda+av)\left[\frac{1}{2i}-(q'+c')\sin^{2i}\lambda\right]d\lambda,\end{aligned} \tag{28.}$$

worin

$$(29.)\quad \left\{\begin{array}{l} A_n' = \dfrac{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2n+1)}{(2i-1)(2i-2)\dots(2i-n)}\,\dfrac{(-1)^n}{1.2\dots n}, \\ q = \displaystyle\int_\pi^\lambda \sin^{2i}\lambda\, d\lambda, \qquad q' = 2i\int \frac{q}{\sin^{2i}\lambda}\, d\lambda, \\ \text{und } c, c' \text{ Constanten sind, die durch die folgenden Gleichungen} \\ \text{bestimmt werden:} \\ C_0 = \dfrac{1.9.25\dots(2i-1)^2}{2.1.2.3\dots(2i-1)}\,\dfrac{(-1)^i}{1.2.3\dots 2i} = \dfrac{(-1)^i}{i.4^i(1.2\dots i-1)^2}, \\ C_0 = c\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2i}\lambda\, d\lambda, \\ C_0' = -2C_0\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2i-1}\right\}, \\ C_0' = 2c\displaystyle\int_0^\pi\left[\frac{1}{2i}-(q'+c')\sin^{2i}\lambda\right]d\lambda. \end{array}\right.$$

Für die Gleichung (23.) ist nun $a=1$, $l=-1$, $m=\frac{3}{4}$, $i=1$. Man erhält daher durch einfache Rechnung:

$$A_1' = 1, \qquad C_0 = -\frac{1}{4}, \qquad c = -\frac{1}{2\pi}, \qquad C_0' = \frac{1}{2},$$

$$q = \frac{1}{2}(\lambda-\pi-\sin\lambda\cos\lambda), \qquad q' = (\pi-\lambda)\operatorname{cotg}\lambda, \qquad c' = \frac{3}{2}.$$

Bestimmen wir demnach V, und multipliciren dasselbe gemäss der Gleichung (25.) mit $t^{\frac{3}{4}}$, so erhält man als Integral der Gleichung (23.):

$$(30.)\quad \begin{aligned}\omega = {} & t^{\frac{3}{4}}\int_0^\pi \varphi(t\cos\lambda+v)\sin^2\lambda\, d\lambda + \left[\psi(t+v)+t\frac{\partial\psi(t+v)}{\partial t}\right] \\ & + \frac{1}{2\pi}t^{\frac{3}{4}}\log t\int_0^\pi \psi'(t\cos\lambda+v)\sin^2\lambda\, d\lambda \\ & - \frac{1}{\pi}t^{\frac{3}{4}}\int_0^\pi \psi'(t\cos\lambda+v)\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{2}+(\pi-\lambda)\operatorname{cotg}\lambda\right)\sin^2\lambda\right]d\lambda.\end{aligned}$$

Setzt man nun hierin für t und v die vermittelst der Gleichungen (10.), (19.), (22.) sich ergebenden Ausdrücke durch p, q, so erhält man das allgemeine 87] Integral der Gleichung (9.), und vermittelst der Gleichungen (7.), wie schon in No. 2 bemerkt worden, durch einfache Differentiation das Integral der Gleichung (1.) selbst.

5.

Ich füge noch folgende Einzelnheiten hinzu:

Man kann sich durch sehr einfache Rechnung überzeugen, dass die Gleichung (1.) befriedigt wird, wenn man an die Stelle von p und q respective $p+\sqrt{1+p^2}$ und $q+\sqrt{1+q^2}$ setzt.

Ferner sieht man leicht, dass wenn ω ein Integral der Differentialgleichung (9.) ist, auch $\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}(1+p^2)$ und $\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}(1+q^2)$ solche sind.

Ferner kann man auf folgende Weise zu einer besonderen Reihe particularer Integrale der Gleichung (9.) gelangen.

Indem wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial\omega}{\partial p}=P,\quad \frac{\partial\omega}{\partial q}=Q,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}=R,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q}=S,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}=T$$

setzen, sei

$$R=\frac{1+q^2}{c}\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial q},\quad \text{also}\quad T=\frac{1+p^2}{c}\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial q}, \tag{31.}$$

wo c eine beliebige Constante und μ eine noch zu bestimmende Function von p und q sei. Man erhält durch Integration dieser Gleichungen, mit Vernachlässigung der willkürlichen Functionen,

$$P=\frac{1+q^2}{c}\frac{\partial\mu}{\partial q},\qquad Q=\frac{1+p^2}{c}\frac{\partial\mu}{\partial p},$$

und hieraus, wegen $\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{\partial Q}{\partial p}$,

$$2q\frac{\partial\mu}{\partial q}-2p\frac{\partial\mu}{\partial p}=(1+p^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-(1+q^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}. \tag{32.}$$

Setzen wir ferner

$$\frac{1+p^2}{c}R=\lambda,\qquad \frac{1+q^2}{c}T=\lambda, \tag{33.}$$

so folgt durch successive Differentiation nach p und q

$$2p\frac{\partial R}{\partial q}-2q\frac{\partial T}{\partial p}=(1+q^2)\frac{\partial^2 T}{\partial p\,\partial q}-(1+p^2)\frac{\partial^2 R}{\partial p\,\partial q},$$

oder, da $\frac{\partial R}{\partial q}=\frac{\partial S}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{\partial S}{\partial q}$, etc. [88

$$2p\frac{\partial S}{\partial p}-2q\frac{\partial S}{\partial q}=(1+q^2)\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}-(1+p^2)\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}. \tag{34.}$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit der Gleichung (32.) folgt, dass man $S = \mu$ setzen kann. Alsdann geht (31.) über in

$$R = \frac{1+q^2}{c}\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q}, \qquad T = \frac{1+p^2}{c}\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q},$$

oder, wie leicht zu finden, in

$$R = \frac{1+q^2}{c}\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}, \qquad T = \frac{1+p^2}{c}\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}. \tag{35.}$$

Es handelt sich also um die Integration einer Differentialgleichung von der Form

$$y'' = \frac{cy}{1+x^2}. \tag{36.}$$

Entwickelt man die Function nach steigenden Potenzen von x und bezeichnet mit $y_0^{(m)}$ den Werth der m^{ten} Ableitung für $x = 0$, so ist

$$y_0^{(2m+2)} = [c-2m(2m-1)][c-(2m-2)(2m-3)][c-(2m-4)(2m-5)]\ldots[c-2]ca,$$
$$y_0^{(2m+3)} = [c-(2m+1)2m][c-(2m-1)(2m-2)][c-(2m-3)(2m-4)]\ldots[c-6]cb,$$

worin $a = y_0$, $b = y_0'$.

Nimmt man z. B. $b = 0$, so hat man die Recursionsformel:

$$y_0^{(m+4)} = y_0^{(m+2)}[c-(m+2)(m+1)],$$

und die Reihe lautet

$$y = a + \frac{x^2}{1.2}ca + \frac{x^4}{1.2.3.4}(c-2)ca + \frac{x^6}{1.2\ldots6}(c-12)(c-2)ca$$
$$+ \frac{x^8}{1.2.3\ldots8}(c-30)(c-12)(c-2)ca + \frac{x^{10}}{1.2.3\ldots10}(c-56)(c-30)(c-12)(c-2)ca + \cdots,$$

eine Reihe, die für $-1 < x < 1$ convergirt.

Für die Zahlen $c = 2, 12, 30, 56$ etc., überhaupt für $c = 2m(2m-1)$, wo m eine ganze Zahl ist, hat die Reihe nur eine endliche Anzahl von Gliedern, und man erhält particulare Integrale der Gleichung (36.) in endlicher Form und daraus auf bekannte Weise die allgemeinen. Mit Hülfe der [89] Formeln (35.) lassen sich alsdann particulare Integrale der Differentialgleichung (9.) herleiten.

Hätte man bei der Integration der Gleichungen (31.) die willkürlichen Functionen mitberücksichtigt, so hätte man statt der Gleichung (32.) eine von folgender Form:

$$2q\frac{\partial\mu}{\partial q} - 2p\frac{\partial\mu}{\partial p} = (1+p^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2} - (1+q^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2} + \varphi(p) + \psi(q)$$

erhalten, und es handelte sich darum, diese Differentialgleichung mit Rücksicht auf das Integral $\mu = S$ der Gleichung (32.) zu integriren, um zum allgemeinen Integrale der Gleichung (9.) überzugehen.

Berlin, im Januar 1860.

ANMERKUNG.

Wie R. HOPPE (Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 58, S. 369—373, Bemerkung zu der Abhandlung Seite 80 dieses Bandes über die Integration der partiellen Differentialgleichung etc.) bemerkt hat, verliert das in der Gleichung (28.) (S. 47) angegebene, der Abhandlung von POISSON entnommene Integral der partiellen Differentialgleichung (26.) (S. 47) gerade für den hier in Betracht kommenden Fall, wo i eine ganze Zahl ist, seine Bedeutung. Das richtige Resultat giebt HOPPE (a. a. O. S. 371) in der Form:

$$V = t^{i+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \left[\varphi(t\cos\lambda + av) + \psi^{(2i)}(t\cos\lambda + av) \left(\log(t\sin^2\lambda) + 2i \int \frac{q\,d\lambda}{\sin^{2i}\lambda} \right) \right] \sin^{2i}\lambda\, d\lambda$$

$$- t^{-i+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{n=2i-1} A_n t^n \psi^{(n)}(t+av),$$

wo $\psi^{(n)}(t)$ die n^{te} Derivirte von $\psi(t)$ nach t bedeutet und

$$A_n = \pi \frac{2i(2i-1)\ldots(n+1).1.2\ldots(2i-n-1)}{(2i-1)(2i-3)\ldots(2n-2i+1)} \cdot \frac{1.3\ldots(2i-1)}{2.4\ldots 2i}$$

zu setzen ist. Hiernach folgt (nach HOPPE, a. a. O.) für die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (23.) (S. 47) der Ausdruck:

$$\omega = \frac{t^2}{\pi} \int_0^{\pi} [\varphi(t\cos\lambda + v) + \psi''(t\cos\lambda + v)(\log(t\sin^2\lambda) + (\pi - \lambda)\cos\lambda)] \sin^2\lambda\, d\lambda - t\psi'(t+v) + \psi(t+v).$$

HOPPE hebt noch hervor (a. a. O. S. 372), dass die Differentialgleichung (36.) (S. 50), auf welche FUCHS in der No. 5 gewisse particulare Integrale der Gleichung (9.) (S. 44) zurückführt, als besonderer Fall in der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe enthalten ist. SCH.

III.

ÜBER DIE PERIODEN, WELCHE AUS DEN WURZELN DER GLEICHUNG $\omega^n = 1$ GEBILDET SIND, WENN n EINE ZUSAMMENGESETZTE ZAHL IST.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 61, 1863, S. 374—386.)

In einer Abhandlung (gelesen in der Berl. Acad. der Wissensch. am [374
18. Decbr. 1856) hat Herr KUMMER seiner Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, Perioden zu Grunde gelegt, welche mit Hülfe einer in n nicht enthaltenen Primzahl q aus diesen Wurzeln, analog den gewöhnlichen Kreistheilungsperioden für eine Primzahl, gebildet sind. Bei solchen Perioden tritt ein Umstand ein, der sie wesentlich von den Perioden für Primzahlen unterscheidet, dass sie nämlich verschwinden können. Da man nun ebenso viele Systeme von Perioden aufstellen kann, als man verschiedene Primzahlen q wählt, so ist zuerst zu untersuchen, für welche Zahlen n überhaupt Systeme mit verschwindenden Perioden vorhanden sind; und wenn n den nothwendigen Anforderungen genügt, so entsteht alsdann die Frage, welche von den verschiedenen Systemen diese Eigenschaft haben. — Die Erörterung dieser Fragen war in der obenerwähnten Abhandlung unnöthig, da, wie Herr KUMMER selbst bemerkt, weder die Methode noch die Resultate derselben durch das Verschwinden der Perioden irgendwie modificirt werden. Jedoch ist daselbst schon angeführt, wie n beschaffen sein müsse, damit überhaupt Systeme mit verschwindenden Perioden vorhanden seien. Ich erlaube mir nun im Folgenden an den Beweis dieser und einiger anderen ebendaselbst befindlichen Bemerkungen des Herrn KUMMER

eine genauere Untersuchung der obigen Fragen, die an sich nicht ohne Interesse zu sein scheinen, anzuschliessen.

Es mögen hier die Definition und die Grundeigenschaften der eben erwähnten Perioden, wie sie in der Abhandlung des Herrn KUMMER enthalten sind, in aller Kürze vorangeschickt werden.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $\omega^n = 1$, q eine in n nicht enthaltene Primzahl oder wenigstens eine Zahl, die einer solchen Primzahl, mod. n, congruent ist, und k eine beliebige ganze Zahl, so wird der Ausdruck

$$\pi_k = \omega^k + \omega^{kq} + \omega^{kq^2} + \cdots$$

375] bis zu demjenigen Gliede fortgesetzt, auf welches wieder ω^k folgen würde, als Periode mit dem Index k definirt.

Eine Grundeigenschaft dieser Perioden ist die, dass π_{kq^λ} für ein beliebiges ganzzahliges λ mit π_k identisch ist.

Die n Perioden, welche den Werthen $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ entsprechen, theilt Herr KUMMER derart in Gruppen ein, dass zu einer Gruppe solche Perioden gehören, deren Indices mit n denselben grössten gemeinschaftlichen Theiler haben.

Ist nun erstlich der Index k zu n prim, und gehört q, (mod. n) zum Exponenten t, so ist

$$\pi_k = \omega^k + \omega^{kq} + \omega^{kq^2} + \cdots + \omega^{kq^{t-1}}.$$

Alle Perioden, deren Indices zu n prim sind, bilden eine Gruppe, welche, da $\pi_k, \pi_{kq}, \pi_{kq^2}, \ldots, \pi_{kq^{t-1}}$ identisch sind, $\frac{\varphi(n)}{t}$ wenigstens formal verschiedene Perioden enthält.

Hat aber der Index k mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler d, und gehört q, $\left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right)$ zum Exponenten τ, so ist

$$\pi_k = \omega^k + \omega^{kq} + \omega^{kq^2} + \cdots + \omega^{kq^{\tau-1}}.$$

Da wieder $\pi_k, \pi_{kq}, \pi_{kq^2}, \ldots, \pi_{kq^{\tau-1}}$ identisch sind, so enthält die zum Divisor d gehörige Gruppe $\frac{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}{\tau}$ wenigstens formal verschiedene Perioden.

Wir wollen im Folgenden die Perioden, deren Indices mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, primitive, und die Gruppe, zu der sie gehören, die primitive Gruppe nennen.

Hat k mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler d, so dass $k = k'd$, und setzt man $\omega^d = \omega'$, so ist auch

$$\pi_k = \omega'^{k'} + \omega'^{k'q} + \omega'^{k'q^2} + \cdots + \omega'^{k'q^{\tau-1}}.$$

Da nun ω' primitive Wurzel der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ ist, und k' zu $\frac{n}{d}$ prim, so folgt daraus, dass eine aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildete Periode, deren Index mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler d hat, als eine primitive aus den Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ mit derselben Primzahl q gebildete Periode angesehen werden kann.

1. [376

Wenn eine Periode einer Gruppe verschwindet, so verschwinden alle Perioden derselben Gruppe.

Denn sind s und s_r die Indices zweier beliebiger Perioden derselben Gruppe, und d der grösste gemeinschaftliche Theiler derselben mit n, so lässt sich eine solche zu $\frac{n}{d}$ prime Zahl u finden, dass $s_r \equiv su$, mod. n. Man hat alsdann $\pi_{s_r} = \pi_{su}$, d. h. π_{s_r} und π_s, welche beide rationale Functionen einer primitiven Wurzel der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ sind, werden aus einander durch Vertauschung dieser Wurzel mit einer anderen primitiven erhalten. Da nun die Gleichung, welcher die primitiven Wurzeln genügen, (wie Herr Kronecker, Liouvilles Journal t. 19[1]), zuerst bewiesen) irreductibel ist, so folgt bekanntlich aus dem Verschwinden von π_s das Verschwinden von π_{s_r}.

Da es bekanntlich unendlich viele Primzahlen giebt, die einer der Zahlen welche kleiner als n und relativ prim zu n sind, congruent sind, mod. n, so kann man jede dieser letzteren Zahlen zur Bildung von Perioden verwenden, und auf diese Weise $\varphi(n)$ Systeme von Perioden aufstellen. (Es kommt hier nicht darauf an, ob, wie es auch wirklich der Fall ist, einzelne von diesen Systemen identisch sind.)

Unter diesen Systemen giebt es nach Herrn Kummer (s. d. ob. an. Abh. § 2) dann und nur dann solche, welche verschwindende Gruppen enthalten, wenn n durch ein Quadrat theilbar ist.

---

[1]) Kroneckers Werke, Bd. I (1895), S. 75. Sch.

Dies lässt sich folgendermassen beweisen. Soll eine Periode verschwinden, so müssen alle Perioden derselben Gruppe, daher auch ihre Summe verschwinden. Ist die Gruppe eine primitive, so ist diese Summe gleich der Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ selbst; ist sie eine nicht primitive, und gehört sie zum Divisor d von n, so ist diese Summe gleich der Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$. Bekanntlich verschwindet nun die Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^r = 1$ dann und nur dann, wenn r einen quadratischen Factor enthält. Das Verschwinden einer Periode erfordert also, dass n durch ein Quadrat theilbar sei. Dass aber umgekehrt, wenn n dieser Bedingung genügt, auch wirklich Systeme mit verschwindenden Perioden vorhanden sind, wird zwar aus dem Folgenden von selbst ersichtlich sein, lässt sich jedoch schon hier folgendermassen zeigen. 377] Es sei p^m eine der in n enthaltenen Primzahlpotenzen, so dass $n' = \frac{n}{p^m}$ nicht mehr durch p theilbar ist. Man bestimme x aus der Congruenz $n'x + 1 \equiv \alpha$, mod. p^m, wo α eine primitive Wurzel von p^m ist, alsdann ist $n'x + 1$ zu n prim. Nimmt man $q = n'x + 1$, und setzt $\omega = uv$, so dass u und v primitive Wurzeln bezüglich der Gleichungen $x^{p^m} = 1$ und $x^{n'} = 1$, dann ist

$$\pi_1 = v\left[u + u^q + u^{q^2} + \cdots + u^{q^{p^{m-1}(p-1)-1}}\right].$$

Da nun unter der gemachten Voraussetzung die Primzahl p so gewählt werden kann, dass $m > 1$, so verschwindet der Coefficient von v als Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^{p^m} = 1$; d. h. in dem mit einem solchen q gebildeten Periodensystem verschwindet die primitive Gruppe.

Für die fernere Untersuchung ist es zweckmässig, zuerst den Fall, dass n eine Primzahlpotenz ist, zu behandeln, da sich mit Hülfe der dabei gewonnenen Resultate alsdann der allgemeine Fall wird erledigen lassen.

2.

Die Perioden für den Fall, wo n eine Primzahlpotenz ist.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{p^m} = 1$, wo p eine Primzahl ist. Die Wurzel ω ist bestimmt durch die Gleichung:

$$(1.) \quad \varphi(x) = x^{p^{m-1}(p-1)} + x^{p^{m-1}(p-2)} + x^{p^{m-1}(p-3)} + \cdots + x^{p^{m-1}} + 1 = 0.$$

Wir beginnen mit dem Beweise der von Herrn KUMMER (s. d. ob. an. Abh. § 2) gemachten Bemerkung, dass zwei formal von einander verschiedene Perioden derselben Gruppe ungleich sind, ausser wenn die Gruppe verschwindet.

Einer beliebigen Periode π_r kann man die Gestalt geben

$$\pi_r = \omega^{p^{m-1}(p-1)}.\psi(\omega) + \chi(\omega),$$

worin $\psi(\omega)$ nur Potenzen von ω enthält, deren Exponenten kleiner sind als p^{m-1}, und $\chi(\omega)$ nur solche, deren Exponenten kleiner als $p^{m-1}(p-1)$. Irgend einer anderen von π_r wenigstens formal verschiedenen Periode derselben Gruppe π_s gebe man die ähnliche Gestalt:

$$\pi_s = \omega^{p^{m-1}(p-1)}.\psi_1(\omega) + \chi_1(\omega).$$

Sollte nun $\pi_r = \pi_s$ sein, so hätte man:

$$(2.) \qquad \omega^{p^{m-1}(p-1)}.\psi(\omega) + \chi(\omega) = \omega^{p^{m-1}(p-1)}.\psi_1(\omega) + \chi_1(\omega),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (1.) [378

$$(3.) \quad \begin{cases} \{\omega^{p^{m-1}(p-2)} + \omega^{p^{m-1}(p-3)} + \cdots + \omega^{p^{m-1}} + 1\}\psi(\omega) - \chi(\omega) \\ \qquad = \{\omega^{p^{m-1}(p-2)} + \omega^{p^{m-1}(p-3)} + \cdots + \omega^{p^{m-1}} + 1\}\psi_1(\omega) - \chi_1(\omega). \end{cases}$$

Da in dieser Gleichung sämmtliche Exponenten von ω kleiner sind als $p^{m-1}(p-1)$, so muss wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) die linke Seite derselben identisch mit der rechten übereinstimmen. Mit Rücksicht auf die Vorzeichen müssten aber Potenzen von ω, die aus dem $\psi(\omega)$ enthaltenden Ausdrucke entstehen, mit solchen übereinstimmen, die dem $\psi_1(\omega)$ enthaltenden Ausdrucke angehören. Dasselbe gilt von den in $\chi(\omega)$ und $\chi_1(\omega)$ vorkommenden Potenzen von ω. Allein die beiden letztgenannten Ausdrücke können keine gemeinschaftliche Potenz von ω enthalten, da sonst gegen die Voraussetzung π_r und π_s eine gemeinschaftliche Potenz von ω enthielten, also identisch wären. Ebenso wenig stimmen die beiden erstgenannten Ausdrücke in einer Potenz von ω überein. Denn wäre $\omega^{a_\lambda + hp^{m-1}} = \omega^{a_\nu + kp^{m-1}}$, wo a_λ und a_ν zwei Exponenten von Potenzen von ω bezüglich aus $\psi(\omega)$ und $\psi_1(\omega)$ sind, und h und k beide kleiner als p, so hätte man $a_\lambda \equiv a_\nu$, mod. p^{m-1}, oder, da a_λ und a_ν beide kleiner als p^{m-1}, $a = a_\nu$. Dies erforderte aber wieder die Identität von π_r

und π_s. Die Gleichung (3.) oder (2.) kann also nur bestehen, wenn jede Seite für sich verschwindet, d. h. wenn π_r und π_s verschwinden.

Wir nehmen jetzt an, dass der Fall, wo verschwindende Perioden möglich sind, Statt habe, dass also $m > 1$. Bildet man alsdann mit allen durch p nicht theilbaren Zahlen, die kleiner als p^m, sämmtliche Systeme von Perioden, so wird es zur Ermittelung derjenigen Systeme, welche verschwindende Gruppen enthalten, genügen, wenn diejenigen bestimmt werden, in welchen die primitiven Perioden verschwinden. Denn wollte man die Primzahl q ermitteln, für welche die zum Divisor d gehörige Gruppe verschwindet, so hätte man nur q so zu bestimmen, dass die primitiven Perioden der Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ verschwinden. Nach No. 1 wird also die Frage durch Betrachtung einer der primitiven Perioden erledigt, z. B. der mit dem Index 1.

Gehört die von p verschiedene Primzahl q zum Exponenten t, so ist

$$\pi_1 = \omega + \omega^q + \omega^{q^2} + \cdots + \omega^{q^{t-1}}.$$

Soll π_1 verschwinden, so muss die Function

$$F(x) = x + x^q + x^{q^2} + \cdots + x^{q^{t-1}}$$

für $x = \omega$, d. h. wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) für alle Wurzeln [379] dieser Gleichung verschwinden, so dass

$$F(x) = \varphi(x).\psi(x), \tag{4.}$$

worin $\psi(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, deren Coefficienten bekanntlich (disquis. arithm. 42 [1])) ganzzahlig sein müssen. Setzt man $x = 1$, so erhält man

$$t = p.\psi(1), \tag{5.}$$

d. h., weil $\psi(1)$ eine ganze Zahl ist, das Verschwinden der primitiven Perioden erfordert, dass t durch p theilbar sei. Schliessen wir den Fall, wo $p = 2$ ist, vorläufig aus, so verschwindet umgekehrt π_1, wenn t durch p theilbar ist, was folgendermassen bewiesen wird:

Die Congruenz $x^t \equiv 1$, mod. p^m, hat bekanntlich, weil t Theiler von $p^{m-1}(p-1)$ ist, t verschiedene reale Wurzeln. Es sei α eine derselben, so ist für eine beliebige ganze Zahl l die Zahl $\alpha + lp^{m-1}$ ebenfalls eine Wurzel, da

1) Gauss' Werke, Bd. I, S. 34. Sch.

$(\alpha + lp^{m-1})^t \equiv \alpha^t + ltp^{m-1}\alpha^{t-1} \equiv \alpha^t \equiv 1$, mod. p^m, weil $t \equiv 0$, mod. p. Hieraus folgt, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von p^{m-1} genau $\frac{t}{p}$ verschiedene Wurzeln enthalten sind. Da q eine primitive Wurzel der obigen Congruenz ist, so sind die sämmtlichen Wurzeln derselben dargestellt durch $1, q, q^2, \ldots, q^{t-1}$. Man hat daher, wenn das Summationszeichen $\sum_\alpha$ sich auf alle verschiedenen Wurzeln α, die kleiner sind als p^{m-1}, bezieht,

$$(6.) \qquad \pi_1 = \sum_{a=0}^{a=t-1} \omega^{q^a} = \sum_\alpha \sum_{l=0}^{l=p-1} \omega^{\alpha + lp^{m-1}} = \varphi(\omega) \sum_\alpha \omega^\alpha = 0,$$

was zu beweisen war.

Es gilt daher folgender Satz:

Ist p eine von 2 verschiedene Primzahl und $m > 1$, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der aus den Wurzeln der Gleichung $x^{p^m} = 1$ gebildeten primitiven Perioden darin, dass der Exponent, zu welchem q (mod. p^m) gehört, durch p theilbar sei.

Wir betrachten jetzt den oben ausgeschlossenen Fall, dass $p^m = 2^m$ ist.

Ist erstlich $m = 2$, so gehört q (mod. 4) zum Exponenten 1 oder 2, je nachdem $q \equiv 1$ oder 3, mod. 4. Im ersteren Falle ist die Periode eingliedrig und daher von Null verschieden; im letzteren Falle ist $\pi_1 = \omega + \omega^3 = \omega(1+\omega^2) = 0$.

Ist ferner $m > 2$, so gehört bekanntlich q (mod. 2^m) zu einem Divisor 2^ν von 2^{m-2}. Es sind alsdann drei Fälle möglich:

1^{tens}. $\nu = 0$, dann ist die Periode eingliedrig und von Null verschieden.

2^{tens}. $\nu = 1$, dann hat q als primitive Wurzel der Congruenz $x^2 \equiv 1$, [380 mod. 2^m, eine der drei Formen -1, $2^{m-1}-1$, $2^{m-1}+1$, und demnach π_1 resp. eine der drei Formen $\omega + \omega^{-1}$, $\omega + \omega^{2^{m-1}-1}$, $\omega + \omega^{2^{m-1}+1}$. Da ω Wurzel der irreductibeln Gleichung $x^{2^{m-1}} + 1 = 0$ ist, so sind die beiden ersten Ausdrücke von Null verschieden, während der letzte verschwindet.

3^{tens}. $\nu > 1$. Es gehört alsdann bekanntlich q (mod. 2^{m-1}) zum Exponenten $2^{\nu-1}$, und deshalb sind die Zahlen $q^{2^{\nu-1}}, q^{2^{\nu-1}+1}, q^{2^{\nu-1}+2}, \ldots, q^{2^\nu - 1}$ bezüglich congruent den Zahlen $q^0, q^1, q^2, \ldots, q^{2^{\nu-1}-1}$, mod. 2^{m-1}. Man hat daher

$$(7.) \qquad \pi_1 = \left(\omega + \omega^q + \omega^{q^2} + \cdots + \omega^{q^{2^{\nu-1}-1}}\right)\left(1 + \omega^{2^{m-1}}\right) = 0.$$

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so erhält man als Ergänzung zum obigen Satze den folgenden:

Es sei 2^ν der Exponent, zu welchem q (mod. 2^m) gehört, wenn $m > 1$, so verschwinden die aus den Wurzeln der Gleichung $x^{2^m} = 1$ gebildeten primitiven Perioden dann und nur dann, wenn entweder $\nu > 1$, oder $\nu = 1$ und im letzteren Falle zugleich $q \equiv 1$, mod. 2^{m-1}.

3.

Zusammenhang zwischen den Perioden für eine zusammengesetzte Zahl und den Perioden für die Primzahlpotenzen.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, worin n eine aus den μ verschiedenen Primzahlpotenzen $p_0^{m_0}, p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$ zusammengesetzte Zahl ist. Es bedeute, wie früher, q eine in n nicht enthaltene Primzahl, die (mod. n) zum Exponenten t gehört. Wir wollen den Zusammenhang der mit q aus der Wurzel ω gebildeten Perioden mit denjenigen Perioden ermitteln, welche aus den Wurzeln der Gleichungen

$$u_0^{p_0^{m_0}} = 1, \quad u_1^{p_1^{m_1}} = 1, \quad u_2^{p_2^{m_2}} = 1, \quad \ldots, \quad u_{\mu-1}^{p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}} = 1$$

gebildet werden. Aus dem mehrfach angegebenen Grunde genügt es, die primitiven Perioden ins Auge zu fassen. Da im Folgenden Perioden vorkommen, die nicht alle aus Wurzeln derselben Gleichung und mit demselben q gebildet werden, so wollen wir allgemein eine Periode der Wurzeln der Gleichung $z^r = 1$, mit dem Index k, wenn sie mit der in r nicht enthaltenen Primzahl s oder einer dieser (mod. r) congruenten Zahl gebildet ist, mit (z^k, s) 381] bezeichnen, so dass, wenn k zu r prim ist, und s (mod. r) zum Exponenten σ gehört,

$$(1.) \qquad (z^k, s) = z^k + z^{ks} + z^{ks^2} + \cdots + z^{ks^{\sigma-1}}.$$

Wir stellen gleich hier zwei Eigenschaften der Perioden zusammen, wovon wir Gebrauch machen. Ist nämlich $\sigma = \varphi.\psi$, so ist erstens, wenn $\beta' \equiv \beta$, mod. φ,

$$(2.) \qquad \left(z^{s^{\beta'}}, s^\varphi\right) = \left(z^{s^\beta}, s^\varphi\right),$$

zweitens, wenn l zu ψ prim ist und k eine beliebige ganze Zahl,

$$(3.) \qquad \left(z^k, s^{l\varphi}\right) = \left(z^k, s^\varphi\right).$$

Die Gleichung (2.) ergiebt sich daraus, dass, wenn λ eine beliebige ganze Zahl ist, die Reste der Zahlen $\beta+\lambda\varphi, \beta+\lambda\varphi+\varphi, \ldots, \beta+\lambda\varphi+(\psi-1)\varphi$ (mod. σ) mit den Resten der Zahlen $\beta, \beta+\varphi, \ldots, \beta+(\psi-1)\varphi$, abgesehen von der Ordnung, übereinstimmen. Ebenso stimmen, abgesehen von der Ordnung, die Reste der Zahlen $l, 2l, 3l, \ldots, (\psi-1)l$ (mod. ψ) mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \psi-1$, daher die Reste der Zahlen $l\varphi, 2l\varphi, 3l\varphi, \ldots, (\psi-1)l\varphi$ (mod. σ) mit den Zahlen $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \ldots, (\psi-1)\varphi$ überein, woraus die Richtigkeit der Gleichung (3.) erhellt.

Bezeichnet man nun mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mu-1}$ die Exponenten, zu denen die Primzahl q respective mod. $p_0^{m_0}, p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$ gehört, ferner, für $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \mu-1$, mit u_ε eine primitive Wurzel der Gleichung $u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} = 1$, mit c_ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen λ_ε und dem kleinsten Vielfachen aller übrigen λ, endlich mit a das kleinste Vielfache von $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{\mu-1}$, so ist

$$(4.) \qquad \pi_1 = (\omega, q) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=a-1} \left(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{q^\alpha}, q^{c_1}\right)\left(u_2^{q^\alpha}, q^{c_2}\right)\ldots\left(u_{\mu-1}^{q^\alpha}, q^{c_{\mu-1}}\right).$$

Die Allgemeinheit des Beweises dieser Gleichung wird, wie man sehen wird, nicht beeinträchtigt, wenn man annimmt, dass n nur aus drei Primzahlpotenzen $p_0^{m_0}, p_1^{m_1}, p_2^{m_2}$ besteht. Da nunmehr $\omega = u_0 u_1 u_2$, so hat man der Definition der Perioden gemäss,

$$(5.) \qquad \pi_1 = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=t-1} (u_0 u_1 u_2)^{q^\alpha}.$$

Bekanntlich ist t gleich dem kleinsten Vielfachen von $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, d. h., wenn man $\frac{\lambda_0}{c_0}, \frac{\lambda_1}{c_1}, \frac{\lambda_2}{c_2}$ bezüglich mit $\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2'$ bezeichnet, $t = a\lambda_0'\lambda_1'\lambda_2'$, da die Zahlen $\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2'$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Daher lässt sich die einfache Summation in (5.) in die vierfache folgende zerlegen: [382

$$(6.) \qquad \pi_1 = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=a-1} \sum_{b_0=0}^{b_0=\lambda_0'-1} \sum_{b_1=0}^{b_1=\lambda_1'-1} \sum_{b_2=0}^{b_2=\lambda_2'-1} (u_0 u_1 u_2)^{q^{\alpha+b_0\alpha+b_1\alpha\lambda_0'+b_2\alpha\lambda_0'\lambda_1'}}.$$

Da nun $\lambda_0'a$, $\lambda_0'\lambda_1'a$ durch λ_0 theilbar sind, so lässt sich in Bezug auf u_0 im Exponenten von q die Summe $b_1\alpha\lambda_0' + b_2\alpha\lambda_0'\lambda_1'$ unterdrücken. Ebenso lässt sich in Bezug auf u_1 im Exponenten von q das Glied $b_2\alpha\lambda_0'\lambda_1'$ unterdrücken, da $\alpha\lambda_0'\lambda_1'$ durch λ_2 theilbar ist. Führt man daher zuerst die Summation aus in Bezug auf b_2, die sich nur auf die Wurzel u_2 bezieht, alsdann die Summation

in Bezug auf $\mathfrak{b}_1$, welche die Wurzel u_0 nicht betrifft, darauf endlich die Summation in Bezug auf $\mathfrak{b}_0$, so erhält man

$$(7.) \qquad \pi_1 = \sum_{a=0}^{a=a-1} \left(u_0^{q^a}, q^a\right)\left(u_1^{q^a}, q^{a\lambda_0'}\right)\left(u_2^{q^a}, q^{a\lambda_0'\lambda_1'}\right).$$

Da nämlich $q^a, q^{a\lambda_0'}, q^{a\lambda_0'\lambda_1'}$ bezüglich mod. $p_0^{m_0}, p_1^{m_1}, p_2^{m_2}$ zu den Exponenten $\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2'$ gehören, und da $\frac{a}{c_0}, \frac{a\lambda_0'}{c_1}, \frac{a\lambda_0'\lambda_1'}{c_2}$ bezüglich zu $\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2'$ prim sind, so sind die in (7.) vorkommenden bezüglich mit $q^a, q^{a\lambda_0'}, q^{a\lambda_0'\lambda_1'}$ gebildeten Perioden nach Gleichung (3.) identisch mit denjenigen, die mit $q^{c_0}, q^{c_1}, q^{c_2}$ gebildet werden. Da ferner a durch c_0, c_1, c_2 theilbar ist, so liessen sich in den Indices der aus u_1, u_2 gebildeten Perioden nach Gleichung (2.) bezüglich die Zahlen $\mathfrak{b}_0 a$ und $\mathfrak{b}_0 a + \mathfrak{b}_1 a\lambda_0'$ unterdrücken. Man hat daher auch

$$(8.) \qquad \pi = \sum_{a=0}^{a=a-1} \left(u_0^{q^a}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{q^a}, q^{c_1}\right)\left(u_2^{q^a}, q^{c_2}\right), \quad \text{q. e. d.}$$

Ich bemerke hierzu noch Folgendes. Nach Gleichung (2.) stimmt die Periode $\left(u_\varepsilon^{q^a}, q^{c_\varepsilon}\right)$ für ein beliebiges a mit einer derjenigen überein, die man erhält, wenn man dem a alle Werthe von 0 bis $c_\varepsilon - 1$ beilegt. Diese c_ε Perioden sind alle von einander verschieden.

Setzt man $\frac{a}{c_\varepsilon} = a_\varepsilon$, so ist der Coefficient von $\left(u_\varepsilon^{q^a}, q^{c_\varepsilon}\right)$ in (4.)

$$(9.) \quad \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=a_\varepsilon-1} \left(u_0^{q^{a+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{q^{a+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_1}\right)\ldots\left(u_{\varepsilon-1}^{q^{a+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_{\varepsilon-1}}\right)\left(u_{\varepsilon+1}^{q^{a+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_{\varepsilon+1}}\right)\ldots\left(u_{\mu-1}^{q^{a+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_{\mu-1}}\right),$$

ein Ausdruck, der eine aus den Wurzeln der Gleichung $z^{n_\varepsilon'} = 1$ mit q^{c_ε} gebildete primitive Periode darstellt, wo $n_\varepsilon' = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}}$ ist, da derselbe unverändert bleibt, wenn man sämmtliche Indices mit q^{xc_ε} multiplicirt, worin x eine beliebige ganze Zahl ist (Gleichung (2.)).

383] Die Darstellung einer primitiven Periode mit dem Index k erhält man, indem man die Indices sämmtlicher Perioden in (4.) mit k multiplicirt.

4.

Um für die Perioden der Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$, wo n eine zusammengesetzte Zahl ist, auf die einfachste Weise dieselben Fragen zu lösen, die in No. 2 für den Fall einer Primzahlpotenz behandelt worden sind,

ist es nothwendig, den Begriff der Irreductibilität der Gleichung für die primitiven Wurzeln $F(x) = 0$ in dem verallgemeinerten Sinne aufzufassen, den ihr Herr KRONECKER (l. c.) gegeben. Danach lässt sich $F(x)$ nicht in Factoren zerlegen, deren Coefficienten rationale Functionen von α sind, wenn α Wurzel einer Gleichung $x^r = 1$ ist und r mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Daraus folgt auf die bekannte Weise, dass, wenn ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ bedeutet, die Gleichung

$$a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_k\omega^k = 0,$$

wo $k < \varphi(n)$ und $a_0, a_1, a_2, \ldots$ rationale Functionen von α sind, gleichbedeutend ist mit dem Systeme der Gleichungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_k = 0.$$

Hat man daher, unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorigen Nummer, eine Gleichung der Form

$$\sum_\alpha X_\alpha (u_\varepsilon^\alpha, q^{c_\varepsilon}) = 0, \tag{1.}$$

worin das Summenzeichen $\sum_\alpha$ sich auf eine gewisse Anzahl solcher Indices α bezieht, für welche $(u_\varepsilon^\alpha, q^{c_\varepsilon})$ verschiedene Perioden liefert, und die Coefficienten X_α rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung $x^{n'_\varepsilon} = 1$ sind, (wenn man $\frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} = n'_\varepsilon$ setzt), so ist $X_\alpha = 0$ für alle erwähnten Werthe des α.

Denn reducirt man die Perioden $(u_\varepsilon^\alpha, q^{c_\varepsilon})$ mit Hülfe der Gleichung der primitiven Wurzeln, welcher u_ε genügt, derart, dass in dem reducirten Ausdrucke R_α die Exponenten von u_ε kleiner sind als $p_\varepsilon^{m_\varepsilon - 1}(p_\varepsilon - 1)$, so haben in der Gleichung

$$\sum_\alpha X_\alpha R_\alpha = 0, \tag{2.}$$

nach den am Anfange der No. 2 an den Gleichungen (2.) und (3.) angestellten Betrachtungen, die verschiedenen R keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε. Es müssen daher nach dem Obigen, da ausserdem n'_ε zu $p_\varepsilon^{m_\varepsilon}$ prim ist, die X_α als Coefficienten verschiedener Potenzen von u_ε verschwinden.

Wir beginnen nunmehr auch für den allgemeinen Fall mit dem Be- [384
weise der Bemerkung des Herrn KUMMER, dass zwei formal verschiedene Perioden derselben Gruppe nur dann einander gleich sind, wenn sie verschwinden.

Es genügt aus dem mehrfach angegebenen Grunde, den Beweis für die primitiven Perioden zu führen. Besteht die Zahl n nur aus zwei verschiedenen Primzahlpotenzen $p_0^{m_0}$ und $p_1^{m_1}$, so ist $c_1 = c_0 = a$, und daher gemäss der Gleichung (4.) in No. 3 irgend eine primitive Periode π_r

$$\pi_r = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} \left(u_0^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right).$$

(3.) Ebenso ist eine andere von π_r formal verschiedene primitive Periode π_s

$$\pi_s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} \left(u_0^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right).$$

Verschwinden die mit q^{c_0} aus der Wurzel u_0 gebildeten primitiven Perioden, so verschwinden auch π_r und π_s. Findet dies nicht statt, so ist entweder für keinen Werth von α, $s \equiv rq^\alpha$, mod. $p_0^{m_0}$, oder diese Congruenz findet für irgend einen Werth von α statt. Im ersteren Falle sind die in π_r und π_s enthaltenen Perioden der Wurzel u_0 alle von einander verschieden, und daher erforderte die Gleichung $\pi_r - \pi_s = 0$ nach dem Obigen, dass die aus der Wurzel u_1 mit q^{c_0} gebildeten primitiven Perioden, also auch π_r und π_s verschwinden. Im zweiten Falle sind die Perioden $\left(u_0^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_0^{sq^{\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. bezüglich identisch mit den Perioden $\left(u_0^{rq^{\alpha+\alpha}}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_0^{rq^{\alpha+\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. In diesem Falle folgt nach dem Obigen aus der Gleichung $\pi_r - \pi_s = 0$, dass die Perioden $\left(u_1^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_1^{sq^{\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. bezüglich gleich sind den Perioden $\left(u_1^{rq^{\alpha+\alpha}}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_1^{rq^{\alpha+\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. Die beiden letztgenannten Periodenreihen sind aber wegen der über π_r und π_s gemachten Annahme nicht auch identisch, daher müssten nach dem ersten Satze in No. 2 die mit q^{c_0} aus der Wurzel u_1 gebildeten primitiven Perioden, also auch π_r und π_s verschwinden. Besteht die Zahl n aus drei verschiedenen Primzahlpotenzen $p_0^{m_0}, p_1^{m_1}, p_2^{m_2}$, so hat man für irgend eine primitive Periode π_r gemäss der Formel (4.) in No. 3

$$\pi_r = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} A_\alpha\left(u_0^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right),$$

(4.) und für eine von π_r formal verschiedene primitive Periode π

$$\pi_s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} B_\alpha\left(u_0^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right).$$

Wiederholt man die obigen Schlüsse, indem man nur an die Stelle [385 der Perioden $(u_1^{rq^\alpha}, q^{c_0})$, $(u_1^{sq^\alpha}, q^{c_0})$ bezüglich A_α und B_α setzt, und bedenkt man, dass diese Grössen nach der am Schlusse der vorigen Nummer gemachten Bemerkung primitive Perioden der Wurzeln der Gleichung $x^{p_1^{m_1} p_2^{m_2}} = 1$ sind, für welche der Satz eben erwiesen worden, so erfolgt die Gültigkeit des Satzes auch für den Fall, wo n aus drei Primzahlpotenzen besteht.

So fortfahrend erkennt man die Allgemeingültigkeit des obigen Satzes.

Untersuchen wir jetzt, welchen Bedingungen q genügen müsse, damit in dem dadurch entstandenen Periodensysteme verschwindende Gruppen enthalten sind. Wie bei den Primzahlpotenzen genügt es auch hier zu fragen, für welche q die Periode π_1 verschwinde. Die Gleichung $\pi_1 = 0$ ist nach Gleichung (4.) in No. 3 gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_\varepsilon-1} A_\alpha^{(\varepsilon)}\left(u_\varepsilon^{q^\alpha}, q^{c_\varepsilon}\right) = 0, \tag{5.}$$

wo ε eine der Zahlen $0, 1, \ldots, \mu-1$ ist, und nach der am Schlusse der No. 3 gemachten Bemerkung die A primitive Perioden darstellen, die aus den Wurzeln der Gleichung $x^{n'_\varepsilon} = 1$ mit q^{c_ε} gebildet sind, wenn man $n'_\varepsilon = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}}$ setzt. Aus der Gleichung (5.) folgt nach den obigen Principien

$$A_\alpha^{(\varepsilon)} = 0, \tag{6.}$$

wenn nicht die mit q^{c_ε} aus der Wurzel u_ε gebildeten primitiven Perioden verschwinden. Behandelt man die Periode $A_\alpha^{(\varepsilon)}$ ebenso wie π_1, so erfordert die Gleichung (6.) entweder das Verschwinden der mit $q^{c_{\varepsilon'}}$ gebildeten primitiven Perioden der Wurzel u_ε, wo ε' ein von ε verschiedener Zahlenwerth der Reihe $0, 1, \ldots, \mu-1$ ist, oder das Verschwinden einer primitiven Periode der Wurzel der Gleichung $x^{n'_{\varepsilon,\varepsilon'}} = 1$, wo $n'_{\varepsilon,\varepsilon'} = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon} p_{\varepsilon'}^{m_{\varepsilon'}}}$. Fährt man so fort, so sieht man, dass schliesslich für irgend einen Werth ζ aus der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots, \mu-1$ die mit q^{c_ζ} gebildeten primitiven Perioden der Wurzel u_ζ verschwinden müssen. Dass umgekehrt das Verschwinden dieser Perioden das Verschwinden von π_1 nach sich zieht, folgt daraus, dass im Ausdrucke von π_1 in Gleichung (4.) No. 3 jedes Glied eine solche Periode enthält. Da nun $q^{c_0}, q^{c_1}, \ldots, q^{c_{\mu-1}}$ respective zu den Exponenten $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_{\mu-1}$ bezüglich [386

mod. $p_0^{m_0}, p_1^{m_1}, \ldots, p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$, gehören, so haben wir mit Zuziehung der Resultate in No. 2 folgenden Satz:

Es sei n eine aus den verschiedenen Primzahlpotenzen

$$2^{m_0}, p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$$

zusammengesetzte Zahl, und es gehöre die in n nicht enthaltene Primzahl q bezüglich mod. $2^{m_0}, p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$ zu den Exponenten $2^\nu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mu-1}$; es seien ferner $2^{\nu'}, \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_{\mu-1}'$ die diesen Exponenten entsprechenden Zahlen, die man aus denselben erhält, indem man diejenigen Factoren weglässt, welche ein jeder derselben mit dem kleinsten Vielfachen aller übrigen gemein hat: so verschwindet die primitive Gruppe der aus den Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ gebildeten Perioden dann und nur dann, wenn $\lambda_\varepsilon' \equiv 0$, mod. p_ε für wenigstens einen der Werthe $\varepsilon = 1, 2, \ldots, \mu-1$, oder wenn $\nu' > 1$, oder endlich wenn $\nu' = 1$ und im letzteren Falle zugleich $q \equiv 1$, mod. 2^{m_0-1}.

Berlin, 1862.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 56, Zeile 19 p statt p^m,

„ 59, „ 1 $ltp^{m-1}\alpha^{t-1}$ statt $ltp^{m-1}\alpha$;

„ 62, „ 2 wurde das im Original auf b_0 folgende »aus« unterdrückt.

2) Zu S. 56, Zeile 14—22 sei bemerkt, dass der Fall $p = 2$ in der No. 2, S. 59 behandelt wird.

Das S. 63, Zeile 11—5 v. u. ausgesprochene, dem folgenden Beweise zu Grunde gelegte Princip beruht auf einem Irrthum, insofern das in der No. 2 über die dortigen Perioden π_r, π_s Bewiesene nicht die hier beanspruchte Tragweite besitzt; in den reducirten Ausdrücken zweier solcher wirklich verschiedenen Perioden kann sehr wohl eine und dieselbe Potenz von ω auftreten, in dem einen mit dem Coefficienten $+1$, in dem andern mit dem Coefficienten -1. Die hieraus entspringenden Bedenken haben den Verfasser ohne Zweifel veranlasst, in der No. 9 der nächstfolgenden Abhandlung (IV.) auf denselben Gegenstand noch einmal zurückzukommen. SCH.

IV.

ÜBER DIE AUS EINHEITSWURZELN GEBILDETEN COMPLEXEN ZAHLEN VON PERIODISCHEM VERHALTEN, INSBESONDERE DIE BESTIMMUNG DER KLASSENANZAHL DERSELBEN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 65, 1866, S. 74—111.)

Der Theorie der aus den Wurzeln der Einheit gebildeten complexen [74 Zahlen hat KUMMER gewisse Perioden zu Grunde gelegt, auf welche sich namentlich die Definition der idealen Primfactoren stützt (s. dieses Journal, Bd. 35 und Abhandlungen der Berl. Acad. 1856). Diese Perioden habe ich für den Fall, dass der Grad der Einheitswurzel durch eine zusammengesetzte Zahl angegeben wird, in einer früheren Arbeit (dieses Journal, Bd. 61[1])) einer näheren Untersuchung unterworfen. Das Folgende bezieht sich auf eine Art complexer Zahlen, welche mit diesen Perioden im engsten Zusammenhange stehen. Es sei nämlich ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit, und x eine Zahl, die mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so bilden im Falle, dass n eine einfache Primzahl ist, die aus den mit x gebildeten Perioden entstehenden complexen Zahlen die allgemeinste Form der complexen Zahlen $f(\omega)$, welchen die Eigenschaft $f(\omega^x) = f(\omega)$ zukommt. Anders verhält es sich im Allgemeinen im Falle, dass n keine einfache Primzahl ist. Hier sind die aus den Perioden gebildeten complexen Zahlen nur besondere Formen der allgemeineren Art complexer Zahlen, welche nur durch die Eigenschaft $f(\omega^x) = f(\omega)$ definirt sind. Mit diesen complexen Zahlen will ich mich im

---

[1]) Abh. III, S. 58—66 dieses Bandes. Sch.

Folgenden beschäftigen, und namentlich die Anzahl der Klassen der idealen Zahlen derselben bestimmen. Die Klassenanzahl der einfachen complexen Zahlen, welche KUMMER (Monatsberichte der Acad. Januar 1863) schon angegeben hat, entspricht übrigens dem besonderen Falle, wo $\varkappa = 1$ ist.

1.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, ferner $\varkappa$ eine Zahl, die mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so ist der Ausdruck

$$\pi_r = \omega^r + \omega^{r\varkappa} + \omega^{r\varkappa^2} + \cdots,$$

soweit fortgesetzt, bis das erste Glied wiederkehrt, die Periode, welche KUM- [75] MER der Theorie der aus der Wurzel ω gebildeten complexen Zahlen zu Grunde gelegt hat (vergl. die Abh. gelesen in der Academie der Wiss. 18. Decbr. 1856). — Ist r zu n prim und gehört $\varkappa$ (mod. n) zum Exponenten τ, so enthält π_r genau τ Glieder. — Die Periode π_r ist die einfachste der complexen Zahlen $f(\omega)$, welche so beschaffen sind, dass $f(\omega^\varkappa) = f(\omega)$. Wir werden daher alle complexen Zahlen der letzteren Art, mit Rücksicht auf diese Eigenschaft, als complexe Zahlen in π bezeichnen.

Es sei nun $\varphi(\omega)$ ein idealer Primfactor der nicht in n enthaltenen realen Primzahl q in der Theorie der complexen Zahlen in ω, und $\varkappa^f$ die niedrigste Potenz von $\varkappa$, die congruent einer Potenz von q (mod. n), so ist das Product der conjugirten Factoren:

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega)\varphi(\omega^\varkappa)\varphi(\omega^{\varkappa^2})\ldots\varphi(\omega^{\varkappa^{f-1}})$$

als idealer Primfactor von q in der Theorie der complexen Zahlen in π anzusehen.

Es sei ferner p eine $a$mal in n enthaltene Primzahl; setzt man $\frac{n}{p^a} = n'$ und bezeichnet mit ω' eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{n'} = 1$, mit $\chi(\omega')$ einen idealen Primfactor von p in der Theorie der complexen Zahlen in ω, und ist endlich $\varkappa^a$ die niedrigste Potenz von $\varkappa$, die congruent einer Potenz von p (mod. n'), so ist

$$\eta(\omega') = \chi(\omega')\chi(\omega'^{\varkappa})\chi\left(\omega'^{\varkappa^2}\right)\ldots\chi\left(\omega'^{\varkappa^{a-1}}\right)$$

als idealer Primfactor von p in der Theorie der complexen Zahlen in π anzusehen.

Sind überhaupt x und q zwei Zahlen, die mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist die Entscheidung über die niedrigste Potenz der einen, die einer Potenz der anderen (mod. n) congruent ist, für das Folgende wesentlich nothwendig, so dass ich erst auf diese Frage näher eingehen muss.

2.

Zunächst ergiebt sich folgender Satz:

Es sei x' die niedrigste Potenz von x, die einer Potenz von q (mod. n) congruent ist, q^ϱ die niedrigste Potenz von q, die einer Potenz von x congruent ist, und gehören x und q (mod. n) respective zu den Exponenten τ und t, so ist $\frac{\tau}{f} = \frac{t}{g}$.

Denn erstlich ist ersichtlich, dass f und g Theiler respective von τ und t sein müssen. Es sei daher $mg = t$ und $q^\varrho \equiv x^\alpha$, mod. n, so ist $m\alpha \equiv 0$, mod. τ, und es ist m als die kleinste der Zahlen, wofür die letztere Con- [76 gruenz erfüllt ist, ein Theiler von τ, und $\frac{\tau}{m}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von α und τ. Da ferner f ein gemeinschaftlicher Theiler von τ und α ist, so ist $\frac{\tau}{m} = Af$ oder $\frac{\tau g}{t} = Af$, wo A eine ganze Zahl. Aus demselben Grunde ist $\frac{tf}{\tau} = Bg$, wo B eine ganze Zahl. Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man $AB = 1$, d. h. $A = B = 1$; daher $\frac{t}{g} = \frac{\tau}{f}$, wie behauptet wurde.

Ferner beweist man ohne Mühe den Satz:

Ist n eine Primzahlpotenz, und dividirt man t durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler von t und τ, und bezeichnet den Quotienten mit t', so ist $q^{t'}$ die niedrigste Potenz von q, die congruent ist einer Potenz von x (mod. n).

Schwieriger ist die genauere Bestimmung der niedrigsten Potenz q^ϱ in dem allgemeinen Falle, dass n eine zusammengesetzte Zahl ist. Wir gelangen dahin auf dem folgenden Wege. Ich beschränke mich hierbei auf den Fall, dass n eine ungerade Zahl ist, weil in dem anderen Falle, wo n gerade ist, nur einige Modificationen erforderlich sind. Ferner wird das Gesetz in seiner Allgemeinheit schon an dem Falle, dass n nur drei verschiedene Primzahlpotenzen enthält, sichtbar.

Es sei daher $n = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}$, wo p, p_1, p_2 verschiedene ungerade Primzahlen sind; es gehöre x respective mod. $p^a, p_1^{a_1}, p_2^{a_2}$ zu den Exponenten $\delta, \delta_1, \delta_2$,

ebenso q zu den Exponenten d, d_1, d_2. Es seien ferner, indem ich mich des Zeichens $(k, l, \ldots, s)$ für das kleinste Vielfache der Zahlen $k, l, \ldots, s$ bediene, c, c_1, c_2 resp. die grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ und (δ_1, δ_2), δ_1 und (δ, δ_2), δ_2 und (δ, δ_1), und man setze $\frac{\delta}{c} = \delta'$, $\frac{\delta_1}{c_1} = \delta'_1$, $\frac{\delta_2}{c_2} = \delta'_2$. Bezeichnet man alsdann mit v, v_1, v_2 respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von d und δ', d_1 und δ'_1, d_2 und δ'_2, und die auf $p^a, p_1^{a_1}, p_2^{a_2}$ bezüglichen Indices respective mit $\mathrm{Ind}, \mathrm{Ind}_1, \mathrm{Ind}_2$, so dass

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}\, q = rb, \quad \mathrm{Ind}_1 q = r_1 b_1, \quad \mathrm{Ind}_2 q = r_2 b_2, \\ &\mathrm{Ind}\, x = \varrho\beta, \quad \mathrm{Ind}_1 x = \varrho_1 \beta_1, \quad \mathrm{Ind}_2 x = \varrho_2 \beta_2, \end{aligned}$$

wo b und β, b_1 und β_1, b_2 und β_2 die grössten gemeinschaftlichen Theiler der Indices von q und x respective mit $\varphi(p^a), \varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2})$ sind, so findet das folgende System von Congruenzen statt:

77]

$$(1.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{v}\mathrm{Ind}\, q \equiv \eta \frac{\delta'}{v} c\, \mathrm{Ind}\, x, \ \mathrm{mod.}\, \varphi(p^a), \quad \text{wo} \quad \eta\varrho \equiv r, \ \mathrm{mod.}\, \delta, \\ &\frac{d_1}{v_1}\mathrm{Ind}_1 q \equiv \eta_1 \frac{\delta'_1}{v_1} c_1 \mathrm{Ind}_1 x, \ \mathrm{mod.}\, \varphi(p_1^{a_1}), \quad \text{wo} \quad \eta_1\varrho_1 \equiv r_1, \ \mathrm{mod.}\, \delta_1, \\ &\frac{d_2}{v_2}\mathrm{Ind}_2 q \equiv \eta_2 \frac{\delta'_2}{v_2} c_2 \mathrm{Ind}_2 x, \ \mathrm{mod.}\, \varphi(p_2^{a_2}), \quad \text{wo} \quad \eta_2\varrho_2 \equiv r_2, \ \mathrm{mod.}\, \delta_2. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man mit i, i_1, i_2 die grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}$ respective mit $\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right), \left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right), \left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)$, so erhält man aus den Congruenzen (1.) die folgenden:

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)\mathrm{Ind}\, q \equiv \eta \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i} c\, \mathrm{Ind}\, x, \ \mathrm{mod.}\, \varphi(p^a), \\ &\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)\mathrm{Ind}_1 q \equiv \eta_1 \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1} c_1 \mathrm{Ind}_1 x, \ \mathrm{mod.}\, \varphi(p_1^{a_1}), \\ &\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)\mathrm{Ind}_2 q \equiv \eta_2 \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2} c_2 \mathrm{Ind}_2 x, \ \mathrm{mod.}\, \varphi(p_2^{a_2}). \end{aligned} \right.$$

Hat man aber eine Zahl z so zu bestimmen, dass

$$z \equiv a, \ \mathrm{mod.}\, m, \quad z \equiv b, \ \mathrm{mod.}\, m_1, \quad z \equiv c, \ \mathrm{mod.}\, m_2,$$

wo a, b, c, m, m_1, m_2 beliebige Zahlen bedeuten, und sind λ, μ, ν respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von m und m_1, m und m_2, m_1 und m_2, so ist bekanntlich erforderlich, dass

$$a-b \equiv 0, \text{ mod. } \lambda, \quad a-c \equiv 0, \text{ mod. } \mu, \quad b-c \equiv 0, \text{ mod. } \nu.$$

Diese Bedingungen sind aber auch zur Existenz der gesuchten Zahl s genügend. Denn zunächst kann man eine Zahl x finden derart, dass $x \equiv a$, mod. m, und $x \equiv b$, mod. m_1. Man bestimme nun eine Zahl z durch die Congruenzen $z \equiv x$, mod. (m, m_1), $z \equiv c$, mod. m_2, so ist zu deren Existenz nothwendig und hinreichend, dass $x-c \equiv 0$, mod. φ, wenn φ der grösste gemeinschaftliche Theiler von (m, m_1) und m_2 ist. Diese Bedingung ist aber offenbar erfüllt und die zuletzt gefundene Zahl z die gesuchte.

Da $\delta', \delta_1', \delta_2'$ Zahlen sind, wovon nicht zwei einen gemeinschaftlichen Theiler haben, und daher die grössten gemeinschaftlichen Theiler je zweier der Grössen δ mit denen der entsprechenden Grössen c zusammenfallen, so kann man daher eine Zahl s finden, derart dass

[78

(3.)
$$\begin{cases} s \equiv \eta \dfrac{\delta'}{v} \dfrac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i} c, \text{ mod. } \delta, \\ s \equiv \eta_1 \dfrac{\delta_1'}{v_1} \dfrac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1} c_1, \text{ mod. } \delta_1, \\ s \equiv \eta_2 \dfrac{\delta_2'}{v_2} \dfrac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2} c_2, \text{ mod. } \delta_2. \end{cases}$$

Hieraus geht mit Rücksicht auf die Congruenzen (2.) hervor, dass $\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)$ ein Multiplum des kleinsten Exponenten g ist, für den q^g congruent einer Potenz von x (mod. n).

Haben $\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}$ respective mit c, c_1, c_2 die grössten gemeinschaftlichen Theiler χ, χ_1, χ_2, so sind $v\chi, v_1\chi_1, v_2\chi_2$ respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von d und δ, d_1 und δ_1, d_2 und δ_2; es sind daher nach dem zweiten der am Anfange dieser Nummer gegebenen Sätze $\frac{d}{v\chi}, \frac{d_1}{v_1\chi_1}, \frac{d_2}{v_2\chi_2}$ respective die kleinsten Exponenten, für die eine Potenz von q congruent einer Potenz von x respective mod. $p^a, p_1^{a_1}, p_2^{a_2}$. Es bleiben daher die Congruenzen (1.) nach

ihren bezüglichen Moduln richtig, wenn man beide Seiten derselben respective durch χ, χ_1, χ_2 dividirt. Hieraus ergiebt sich, dass man die Congruenzen (2.) respective durch $\frac{\chi\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$, $\frac{\chi_1\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1}$, $\frac{\chi_2\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2}$ dividiren darf, ohne die Moduln zu dividiren. Offenbar ist aber der gesuchte Exponent g ein Vielfaches von $\left(\frac{d}{v\chi}, \frac{d_1}{v_1\chi_1}, \frac{d_2}{v_2\chi_2}\right)$, daher ist die Zahl, durch welche $\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)$ zu dividiren ist, um g zu geben, ein gemeinschaftlicher Theiler von

$$\frac{\chi\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}, \quad \frac{\chi_1\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1}, \quad \frac{\chi_2\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2}.$$

Da man aber durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler dieser drei Zahlen jede der Congruenzen (2.), unbeschadet ihrer Richtigkeit nach ihren bezüglichen Moduln, dividiren darf, so folgt,

dass $g = \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{\psi}$, wenn ψ der grösste Factor des eben erwähnten grössten gemeinschaftlichen Theilers ist, für den noch eine Zahl 79] s' ermittelt werden kann, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(4.) \qquad \begin{cases} s' \equiv \eta \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right) c}{i\psi}, \text{ mod. } \delta, \\ s' \equiv \eta_1 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right) c_1}{i_1\psi}, \text{ mod. } \delta_1, \\ s' \equiv \eta_2 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right) c_2}{i_2\psi}, \text{ mod. } \delta_2. \end{cases}$$

Ich behaupte jetzt, dass ψ mit $\frac{d}{vi}, \frac{d_1}{v_1 i_1}, \frac{d_2}{v_2 i_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Denn gesetzt ψ habe mit $\frac{d}{vi}$ einen gemeinschaftlichen Theiler σ, so ist sofort zu sehen, dass σ als Factor von $\frac{\chi\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$ oder auch von $\frac{c\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$ ein Factor von c sein muss, weil $\frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$ mit $\frac{d}{vi}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Daher hat σ auch keinen Factor mit η gemeinschaftlich, weil dieser sonst (s. Congruenz (1.)) auch Factor von r wäre, was nicht möglich

ist, weil r zu d prim ist. Ferner enthielten die Coefficienten von c_1 und c_2 in der zweiten und dritten Congruenz (2.) den Factor σ. Der Bedeutung der Grössen c gemäss muss aber jeder Primfactor von c in einer der beiden Grössen c_1 oder c_2 enthalten sein. Irgend ein Primfactor μ von σ muss daher auch in c_1 oder c_2 enthalten sein, und zwar mindestens in einer dieser beiden Grössen so oft als in c, es sei dies in c_1, alsdann erfordert das Bestehen der Congruenzen (4.), dass $\frac{c}{\sigma}$ diesen Primfactor noch ebenso oft als c_1 enthält, was aber absurd ist. Da man ebenso beweisen kann, dass ψ weder mit $\frac{d_1}{v_1 i_1}$, noch mit $\frac{d_2}{v_2 i_2}$ einen gemeinschaftlichen Theiler hat, so folgt, dass ψ der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von $\frac{\chi(i_1, i_2)}{i}$, $\frac{\chi_1(i, i_2)}{i_1}$, $\frac{\chi_2(i, i_1)}{i_2}$ ist, wofür noch die Congruenzen (4.) eine Lösung zulassen. Aber ψ muss offenbar auch ein Theiler von (χ, χ_1, χ_2) und daher auch von (c, c_1, c_2) sein; es ist also ψ der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von $\frac{\chi(i_1, i_2)}{i}, \frac{\chi_1(i, i_2)}{i_1}, \frac{\chi_2(i, i_1)}{i_2}, (c, c_1, c_2)$, wofür noch die Congruenzen (4.) lösbar [so sind, indem man jetzt unter χ, χ_1, χ_2 respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von i, i_1, i_2 und c, c_1, c_2 versteht.

Zum Bestehen der Congruenzen (4.) ist aber nach einem oben angeführten Satze das Bestehen des Systems der folgenden Congruenzen nothwendig und hinreichend:

$$\eta \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right) c}{i\psi} - \eta_1 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right) c_1}{i_1 \psi} \equiv 0, \quad \text{mod. } \tilde{\omega}_2,$$

$$\eta \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right) c}{i\psi} - \eta_2 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right) c_2}{i_2 \psi} \equiv 0, \quad \text{mod. } \tilde{\omega}_1,$$

$$\eta_1 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right) c_1}{i_1 \psi} - \eta_2 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right) c_2}{i_2 \psi} \equiv 0, \quad \text{mod. } \tilde{\omega},$$

wo $\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}$, respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von c und c_1, c und c_2, c_1 und c_2 sind.

Multiplicirt man die erste dieser Congruenzen mit $\varrho\varrho_1$, die zweite mit $\varrho\varrho_2$, die dritte mit $\varrho_1\varrho_2$, so werden dadurch den linken Seiten keine neuen Factoren der bezüglichen Moduln hinzugefügt, weil diese respective zu den Zahlen $\varrho\varrho_1, \varrho\varrho_2, \varrho_1\varrho_2$ prim sind. Da nun $\eta\varrho \equiv r$, mod. c, $\eta_1\varrho_1 \equiv r_1$, mod. c_1,

$\eta_2 \varrho_2 \equiv r_2$, mod. c_2, so verwandelt sich das letzte System von Congruenzen in das folgende:

$$r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right) c}{i\psi} - r_1\varrho \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right) c_1}{i_1\psi} \equiv 0, \quad \text{mod. } \tilde{\omega}_2,$$

$$r\varrho_2 \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right) c}{i\psi} - r_2\varrho \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right) c_2}{i_2\psi} \equiv 0, \quad \text{mod. } \tilde{\omega}_1,$$

$$r_1\varrho_2 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right) c_1}{i_1\psi} - r_2\varrho_1 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right) c_2}{i_2\psi} \equiv 0, \quad \text{mod. } \tilde{\omega}.$$

Diese Congruenzen setzen wir in andere mod. ψ um; dann können wir dieselben respective durch $\frac{d_2}{v_2 i_2}, \frac{d_1}{v_1 i_1}, \frac{d}{vi}$ dividiren. Man erhält alsdann:

$$r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{c}{\tilde{\omega}_2} - r_1\varrho \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{c_1}{\tilde{\omega}_2} \equiv 0, \quad \text{mod. } \psi,$$

$$r\varrho_2 \frac{\delta'}{v} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{c}{\tilde{\omega}_1} - r_2\varrho \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{c_2}{\tilde{\omega}_1} \equiv 0, \quad \text{mod. } \psi,$$

$$r_1\varrho_2 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{c_1}{\tilde{\omega}} - r_2\varrho_1 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{c_2}{\tilde{\omega}} \equiv 0, \quad \text{mod. } \psi.$$

81] Es ist aber, wie schon bemerkt, $(c, c_2) \equiv 0$, mod. c_1, daher $\frac{c}{\tilde{\omega}_2} \cdot \frac{c_2}{\tilde{\omega}_1} : \frac{c_1}{\tilde{\omega}_2}$ eine ganze Zahl, oder $\frac{c_2}{\tilde{\omega}_1} = A\frac{c_1}{\tilde{\omega}_2}$, wo A eine ganze Zahl. Ebenso findet man $\frac{c_1}{\tilde{\omega}_2} = B\frac{c_2}{\tilde{\omega}_1}$, wo B eine ganze Zahl. Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man $AB = 1$, d. h. $A = B = 1$. Daher ist $\frac{c}{\tilde{\omega}_2} = \frac{(c, c_2)}{c_1}$. Analog ist $\frac{c_1}{\tilde{\omega}_2} = \frac{(c_1, c_2)}{c}$, $\frac{c}{\tilde{\omega}_1} = \frac{(c, c_1)}{c_2}$, $\frac{c_2}{\tilde{\omega}_1} = \frac{(c_1, c_2)}{c}$, $\frac{c_1}{\tilde{\omega}} = \frac{(c, c_1)}{c_2}$, $\frac{c_2}{\tilde{\omega}} = \frac{(c, c_2)}{c_1}$.

Man hat also als Resultat unserer Untersuchung über den kleinsten Exponenten g, für den q^g congruent einer Potenz von x (mod. n), dass $g = \frac{d}{vi} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_1, i_2)}{\psi}$, wenn ψ der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von $\frac{\chi(i_1, i_2)}{i}, \frac{\chi_1(i, i_2)}{i_1}, \frac{\chi_2(i, i_1)}{i_2}, (c, c_1, c_2)$ ist, für welchen das folgende System von Congruenzen noch identisch erfüllt ist:

$$(5.) \quad \begin{cases} r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_2)}{c_1} - r_1\varrho \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0, & \text{mod. } \psi, \\ r\varrho_2 \frac{\delta'}{v} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2\varrho \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0, & \text{mod. } \psi, \\ r_1\varrho_2 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2\varrho_1 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c, c_2)}{c_1} \equiv 0, & \text{mod. } \psi, \end{cases}$$

wo χ, χ_1, χ_2 die grössten gemeinschaftlichen Theiler respective von i und c, i_1 und c_1, i_2 und c_2 sind.

3.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in No. 1 und 2 ist die Anzahl der conjugirten idealen Primfactoren einer nicht in n enthaltenen Primzahl q in der Theorie der complexen Zahlen in π gleich $\frac{\varphi(n)}{tf}$. Enthält eine complexe Zahl in π, $f(\omega)$, genau m ideale Primfactoren von q, so enthält die Norm derselben, nämlich

$$Nf(\omega) = f(\omega^{r_1}) f(\omega^{r_2}) \dots f(\omega^{r_\nu}),$$

wo $\nu = \frac{\varphi(n)}{\tau}$ und $r_1, r_2, \dots, r_\nu$ die ν Zahlen sind, welche kleiner als n und prim zu n und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod. n), genau die Potenz q^{mg}, da $\frac{\varphi(n)}{\tau} : \frac{\varphi(n)}{tf} = \frac{tf}{\tau} = g$ (nach No. 2). Bedeutet G den kleinsten Exponenten, für den p congruent einer Potenz von x (mod. n'), so findet man ebenso, dass die Norm einer complexen Zahl [82 in π, $f(\omega)$, welche genau M ideale Primfactoren von p enthält, genau den Factor p^{MG} hat.

Hieraus ergiebt sich, dass die Norm einer complexen Zahl in π, $f(\omega)$, die Gestalt hat:

$$Nf(\omega) = p^{MG} p_1^{M_1 G_1} p_2^{M_2 G_2} \dots q^{mg} q_1^{m_1 g_1} q_2^{m_2 g_2} \dots,$$

wenn $M, M_1, M_2, \dots, m, m_1, m_2, \dots$ ganze Zahlen und $G_1, G_2, \dots, g_1, g_2, \dots$ eine ähnliche Bedeutung wie respective G und g haben.

Ideale Zahlen in π gehören zu derselben Klasse, wenn sie mit derselben idealen Zahl in π multiplicirt eine wirkliche complexe Zahl in π zum Producte geben, d. h. eine complexe Zahl $F(\omega)$ mit der Eigenschaft $F(\omega^x) = F(\omega)$. — Man beweist nach den Principien von KUMMER, dass es nur eine endliche Anzahl verschiedener Klassen giebt.

Ehe wir nun zur Bestimmung der Anzahl dieser Klassen übergehen, wollen wir eine Bemerkung machen, wodurch die Betrachtungen vereinfacht werden.

In meiner oben erwähnten Arbeit habe ich die Bedingungen für das Verschwinden einer Periode π_r, deren Index r zu n prim ist (einer primi-

tiven Periode, wie ich sie dort genannt habe) angegeben. Aus diesen Bedingungen geht hervor, dass man einen Factor d von n finden könne, derart dass die Periode π_{rd} nicht verschwinde, und dass wenn d der kleinste der Factoren von n ist, welcher dieses bewirkt, jeder andere von derselben Art ein Multiplum von d sein müsse. Ist d der kleinste Factor von n, für den π_{rd} nicht mehr verschwindet, so ist $d.\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n)$. In dem Ausdrucke, in welchen sich π_{rd} nur auf eine Weise setzen lässt, nämlich:

$$\pi_{rd} = b_0 + b_1\omega^d + b_2\omega^{2d} + \cdots + b_{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1}\omega^{\left(\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1\right)d},$$

sind daher die Exponenten von ω kleiner als $\varphi(n)$.

Ist nun $f(\omega)$ eine wirkliche complexe Zahl in π, so ist

$$f(\omega) = f(\omega^\varkappa) = f(\omega^{\varkappa^2}) = \cdots = f(\omega^{\varkappa^{\tau-1}}),$$

daher $\tau f(\omega) = F(\pi)$, wo $F(\pi)$ eine nur die Perioden enthaltende complexe Zahl ist. Sind nun die Bedingungen erfüllt, welche für das Verschwinden der primitiven Perioden nothwendig und hinreichend sind, und ist d der kleinste Factor von n, für den π_{rd} nicht mehr verschwindet, so wird also nach s3] der eben gemachten Bemerkung $F(\pi)$ eine aus den Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ gebildete complexe Zahl sein, in welcher die sämmtlichen Exponenten von ω kleiner als $\varphi(n)$ sind. Sie lässt sich daher auf die Gestalt bringen:

$$F(\pi) = c_0 + c_1\omega^d + c_2\omega^{2d} + \cdots + c_{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1}\omega^{d\left(\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1\right)},$$

wo die Exponenten von ω kleiner als $\varphi(n)$ sind. Aus der Gleichung $\tau f(\omega) = F(\pi)$ folgt daher, dass sämmtliche Grössen c durch τ theilbar sind, dass also $f(\omega)$ selbst einer aus den Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ gebildeten complexen Zahl gleich ist, also einer auf eine Gleichung niedrigeren Grades bezüglichen complexen Theorie angehört. Hieraus folgt, dass wir uns im Folgenden auf solche Werthe von $\varkappa$ beschränken können, wofür die primitiven Perioden nicht verschwinden.

4.

Um die Klassenanzahl der complexen Zahlen in π zu bestimmen, muss man den Grenzwerth der Reihe

$$(1.) \qquad R = (s-1)\sum \frac{1}{[Nf(\omega)]^s} \quad \text{für} \quad s = 1$$

ermitteln. In dieser Reihe ist die Summation auf alle nicht durch blosse Einheitsfactoren verschiedenen idealen oder wirklichen complexen Zahlen in π zu erstrecken, und der Norm die in der No. 3 angegebene Bedeutung beizulegen. Diese Reihe ist mit der folgenden gleichbedeutend:

$$R = (s-1)\sum \frac{1}{p^{MGs}.p_1^{M_1G_1s}.p_2^{M_2G_2s}\ldots q^{mgs}.q_1^{m_1g_1s}.q_2^{m_2g_2s}\ldots},$$

worin man über alle realen Primzahlen $q, q_1, q_2, \ldots$ die nicht in n enthalten sind, und über alle positiven ganzzahligen Werthe von $M, M_1, M_2, \ldots$, $m, m_1, m_2, \ldots$ summiren muss. Es sei θ der Exponent, zu dem $\varkappa \pmod{n'}$ gehört, t' der Exponent, zu dem p nach demselben Modul gehört, a der kleinste Exponent, für den $\varkappa^a$ congruent einer Potenz von $p \pmod{n'}$, und man bezeichne die Grösse $\frac{\varphi(n)}{tf} = \frac{\varphi(n)}{\tau g}$ mit u, und die Grösse $\frac{\varphi(n')}{t'a} = \frac{\varphi(n')}{\theta G}$ mit U, und lege den Grössen $u_1, u_2, \ldots, U_1, U_2, \ldots$ eine ähnliche Bedeutung respective für $q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ bei, so findet man

$$(2.) \quad R = (s-1)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{Gs}}}\right)^U\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^{G_1s}}}\right)^{U_1}\cdots\prod\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{gs}}}\right)^u\cdot\prod\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q_1^{g_1s}}}\right)^{u_1}\cdots,$$

wo jedes Productenzeichen $\prod$ sich auf alle diejenigen unendlich vielen [84 nicht in n enthaltenen Primzahlen bezieht, für die g oder u denselben Werth haben, und die Anzahl der verschiedenen Producte mit der Anzahl aller möglichen Werthe von g oder u übereinstimmt.

Es ist nun dieser Ausdruck R in ein Product mit endlicher Factorenanzahl zu verwandeln, derart dass jeder Factor eine bestimmbare Reihe wird. Diese Umwandlung, welche für gewöhnliche complexe Zahlen ohne Mühe geleistet werden kann, ist für die complexen Zahlen in π mit Schwierigkeiten verknüpft. Es war dazu die in No. 2 vorausgeschickte Untersuchung über den kleinsten Exponenten g, für den q^g congruent einer Potenz von $\varkappa \pmod{n}$

wird, unumgänglich nöthig, wie aus der folgenden Nummer noch deutlicher hervorgehen wird.

Ich darf mich in den ferneren Entwickelungen der besseren Übersicht wegen auf den Fall, wo n ungerade ist, beschränken, da die Behandlung des Falles, wo n gerade ist, nur einige leichte Modificationen erfordert.

5.

Es seien $e, e_1, e_2, \ldots$ Zahlen respective aus den Reihen

$$0, 1, \cdots, \frac{\varphi(p^a)}{\delta'} - 1; \quad 0, 1, \ldots, \frac{\varphi(p_1^{a_1})}{\delta_1'} - 1; \quad 0, 1, \ldots, \frac{\varphi(p_2^{a_2})}{\delta_2'} - 1; \quad \ldots,$$

welche der Congruenz

$$(1.) \qquad e\varrho\frac{\tau}{c} + e_1\varrho_1\frac{\tau}{c_1} + e_2\varrho_2\frac{\tau}{c_2} + \cdots \equiv 0, \mod \tau$$

genügen, so ist

$$(2.) \qquad \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{\vartheta s}}}\right)^u = \prod_{e, e_1, e_2, \ldots} \frac{1}{1 - \frac{\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} q} \xi_1^{e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} \xi_2^{e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 q} \cdots}{q^s}},$$

wo $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ respective primitive Wurzeln der Gleichungen

$$\xi^{\varphi(p^a)} = 1, \quad \xi_1^{\varphi(p_1^{a_1})} = 1, \quad \xi_2^{\varphi(p_2^{a_2})} = 1, \quad \ldots$$

sind, und das Productenzeichen $\prod_{e, e_1, e_2, \ldots}$ sich auf alle Werthcombinationen von $e, e_1, e_2, \ldots$ bezieht, welche der Congruenz (1.) genügen.

Um diese Umformung zu begründen, muss gezeigt werden:

1) dass $\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} q} \xi_1^{e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} \xi_2^{e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 q} \ldots$, wenn $e, e_1, e_2, \ldots$ der Congruenz (1.) genügen, eine g^{te} Wurzel der Einheit ist;

85] 2) dass jede der g Wurzeln der Gleichung $x^g = 1$ in dem Producte $\prod_{e, e_1, \ldots}$ vorkommt, und zwar jede $u$mal.

Die Allgemeinheit des Verfahrens ist wiederum schon an dem Falle $n = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ ersichtlich. Da q^g congruent ist einer Potenz von $\varkappa$ (mod. n), so darf man setzen: $q^g \equiv \varkappa^h$, mod. n, und es ist

$$\left(\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} q} \xi_1^{e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} \xi_2^{e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 q}\right)^g = \left(\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} \varkappa} \xi_1^{e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 \varkappa} \xi_2^{e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 \varkappa}\right)^h.$$

Bezeichnet nun w eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{(c, c_1, c_2)} = 1$, so ist

$$\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} x} = w^{e\varrho \frac{(c, c_1, c_2)}{c}}, \quad \xi_1^{e_1 \delta_1' \operatorname{Ind}_1 x} = w^{e_1 \varrho_1 \frac{(c, c_1, c_2)}{c_1}}, \quad \xi_2^{e_2 \delta_2' \operatorname{Ind}_2 x} = w^{e_2 \varrho_2 \frac{(c, c_1, c_2)}{c_2}}.$$

Daher ist

$$\left(\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} x} \xi_1^{e_1 \delta_1' \operatorname{Ind}_1 x} \xi_2^{e_2 \delta_2' \operatorname{Ind}_2 x}\right)^h = w^{\left[e\varrho \frac{(c, c_1, c_2)}{c} + e_1 \varrho_1 \frac{(c, c_1, c_2)}{c_1} + e_2 \varrho_2 \frac{(c, c_1, c_2)}{c_2}\right] h} = 1,$$

weil die Congruenz (1.) gleichbedeutend ist mit:

$$(3.) \quad e\varrho \frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c} + e_1 \varrho_1 \frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_1} + e_2 \varrho_2 \frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_2} + \cdots \equiv 0, \quad \text{mod. } (c, c_1, c_2, \ldots).$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Ausdruck $\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} q} \xi_1^{e_1 \delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} \xi_2^{e_2 \delta_2' \operatorname{Ind}_2 q}$ eine g^{te} Wurzel der Einheit ist, und dieses war zuerst zu beweisen.

Es sei jetzt

$$\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} q} \xi_1^{e_1 \delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} \xi_2^{e_2 \delta_2' \operatorname{Ind}_2 q} = \xi^{e'\delta' \operatorname{Ind} q} \xi_2^{e_1' \delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} \xi_2^{e_2' \delta_2' \operatorname{Ind}_2 q},$$

wo $e, e_1, e_2, e', e_1', e_2'$ zwei der Congruenz (1.) oder (3.) genügende Werthsysteme der obigen Zahlenreihen sind. Man hat alsdann:

$$(4.) \qquad \xi^{(e'-e)\delta' \operatorname{Ind} q} \xi_1^{(e_1'-e_1)\delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} \xi_2^{(e_2'-e_2)\delta_2' \operatorname{Ind}_2 q} = 1.$$

Ist s eine primitive Wurzel der Gleichung $s^{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)} = 1$, so ist

$$\xi^{\delta' \operatorname{Ind} q} = s^{r \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}}, \quad \xi_1^{\delta_1' \operatorname{Ind}_1 q} = s^{r_1 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1}}, \quad \xi_2^{\delta_2' \operatorname{Ind}_2 q} = s^{r_2 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2}};$$

die Gleichung (4.) erfordert daher, dass [86

$$(5.) \quad \left\{ \begin{array}{l} (e'-e) r \frac{\delta'}{v} \frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i} + (e_1'-e_1) r_1 \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1} + (e_2'-e_2) r_2 \frac{\delta_2'}{v_2} \frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2} \equiv 0, \\ \qquad \text{mod.} \left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right). \end{array} \right.$$

Aus dieser Congruenz folgt aber sofort, dass

$$(6.) \qquad e'-e = \alpha \frac{d}{vi}, \quad e_1'-e_1 = \alpha_1 \frac{d_1}{v_1 i_1}, \quad e_2'-e_2 = \alpha_2 \frac{d_2}{v_2 i_2},$$

wo $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ ganze Zahlen sind. Man hat daher statt der Congruenz (5.) die folgende:

$$(7.) \qquad \alpha r \frac{\delta'}{v} \frac{(i_1, i_2)}{i} + \alpha_1 r_1 \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{(i, i_2)}{i_1} + \alpha_2 r_2 \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{(i, i_1)}{i_2} \equiv 0, \mod. (i, i_1, i_2).$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen (6.) mit $\varrho \frac{(c, c_1, c_2)}{c}$, die zweite mit $\varrho_1 \frac{(c, c_1, c_2)}{c_1}$, die dritte mit $\varrho_2 \frac{(c, c_1, c_2)}{c_2}$ und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Congruenz (3.)

$$(8.) \quad \alpha\varrho \frac{d}{vi} \frac{(c, c_1, c_2)}{c} + \alpha_1 \varrho_1 \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(c, c_1, c_2)}{c_1} + \alpha_2 \varrho_2 \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(c, c_1, c_2)}{c_2} \equiv 0, \mod. (c, c_1, c_2).$$

Wenn zwischen einer Anzahl disponibeler Grössen eine Congruenz (mod. m) besteht, so ist die Anzahl der zulässigen Werthe der m^{te} Theil der Anzahl aller Grössen. Daher ist in Folge der Congruenz (1.) die Anzahl der Factoren des Productes in der Gleichung (2.) gleich

$$\frac{\frac{\varphi(p^a)}{\delta'} \cdot \frac{\varphi(p_1^{a_1})}{\delta'_1} \cdot \frac{\varphi(p_2^{a_2})}{\delta'_2}}{(c, c_1, c_2)} = \frac{\varphi(n)}{\tau}.$$

Aus den Gleichungen (6.) und den Congruenzen (7.) und (8.) folgt aber, dass eine im Producte Π der Gleichung (2.) vorkommende g^{te} Wurzel der Einheit genau $\frac{\varphi(n)}{\tau \frac{d}{vi} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_1, i_2)}{\sigma}}$ mal vorkommt, wenn σ der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von (i, i_1, i_2) und (c, c_1, c_2) ist, für den als Modul die Congruenzen:

$$(9.) \quad \begin{cases} \alpha r \frac{\delta'}{v} \frac{(i_1, i_2)}{i} + \alpha_1 r_1 \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{(i, i_2)}{i_1} + \alpha_2 r_2 \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{(i, i_1)}{i_2} \equiv 0, & \mod. \sigma, \\ \alpha\varrho \frac{d}{vi} \frac{(c_1, c_2)}{c} + \alpha_1 \varrho_1 \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(c, c_2)}{c_1} + \alpha_2 \varrho_2 \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(c, c_1)}{c_2} \equiv 0, & \mod. \sigma \end{cases}$$

87] die eine eine identische Folge der anderen ist. Hierzu ist aber nothwendig und hinreichend, dass identisch

$$(10.) \quad \begin{cases} r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_2)}{c_1} - r_1 \varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0, & \mod. \sigma, \\ r\varrho_2 \frac{\delta'}{v} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2 \varrho \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0, & \mod. \sigma, \\ r_1\varrho_2 \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2 \varrho_1 \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c, c_2)}{c_1} \equiv 0, & \mod. \sigma. \end{cases}$$

Es ist in diesem Systeme von Congruenzen und in dem Systeme (9.) zu beachten, dass $(c, c_1, c_2) = (c, c_1) = (c, c_2) = (c_1, c_2)$.

Der Modul σ darf mit keiner der Zahlen $\frac{d}{vi}, \frac{d_1}{v_1 i_1}, \frac{d_2}{v_2 i_2}, \frac{\delta'}{v}, \frac{\delta'_1}{v_1}, \frac{\delta'_2}{v_2}$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn gesetzt σ hätte mit $\frac{d}{vi}$ einen gemeinschaftlichen Theiler β, so wäre β nach der ersten Congruenz (10.) auch Theiler von $r\varrho_1 \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{\delta'}{v} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_2)}{c_1}$. Da er aber zu $r \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{\delta'}{v} \frac{(i_1, i_2)}{i}$ prim und Theiler von $c_1 \frac{(c, c_2)}{c_1}$ ist, so ist er entweder Theiler von $\frac{(c, c_2)}{c_1}$ oder auch kein Theiler von $\varrho_1 \frac{(c, c_2)}{c_1}$, da ϱ_1 zu c_1 prim ist; also müsste der gemeinschaftliche Theiler β von σ und $\frac{d}{vi}$ ein Theiler von $\frac{(c, c_2)}{c_1}$ sein. Ebenso folgt aus der zweiten Congruenz (10.), dass β ein Theiler von $\frac{(c, c_1)}{c_2}$ sein müsste; was aber absurd ist, da $\frac{(c, c_2)}{c_1}$ und $\frac{(c, c_1)}{c_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben (s. No. 2). Auf eine ähnliche Weise wird gezeigt, dass σ mit $\frac{d_1}{v_1 i_1}$ und $\frac{d_2}{v_2 i_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. — Es habe ferner σ mit $\frac{\delta'}{v}$ einen gemeinschaftlichen Theiler γ, so müsste dieser nach der ersten Congruenz (10.) Theiler von $r_1 \varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c}$ sein. Da er aber zu $\varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(c_1, c_2)}{c}$ prim ist, so müsste er ein Theiler von $r_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}$ sein. Nun aber ist derselbe Theiler von $i_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}$, folglich entweder Theiler von $\frac{(i, i_2)}{i_1}$ oder auch nicht Theiler von $r_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}$, da r_1 zu i_1 prim ist; also müsste γ Theiler von $\frac{(i, i_2)}{i_1}$ sein. Ebenso folgt aus der zweiten Congruenz (10.), dass γ Theiler von $\frac{(i, i_1)}{i_2}$ sein müsste, was aber absurd ist, da $\frac{(i, i_2)}{i_1}$ und $\frac{(i, i_1)}{i_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler [88 haben. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass σ mit $\frac{\delta'_1}{v_1}$ und $\frac{\delta'_2}{v_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat.

Ein gemeinschaftlicher Theiler ε von σ und $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ muss nach der ersten Congruenz (10.) auch Theiler von $r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_2)}{c_1}$ sein. Da er aber prim zu $\frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(c, c_2)}{c_1} \frac{\delta'}{v}$ und Theiler von $i \frac{(i_1, i_2)}{i}$ ist, so ist er entweder Theiler von $\varrho_1 \frac{(i_1, i_2)}{i}$ oder auch nicht Theiler von $r\varrho_1 \frac{(i_1, i_2)}{i}$, weil r zu i prim ist. Wäre daher ε nicht Theiler von $\frac{(i_1, i_2)}{i}$, so müsste es mit ϱ_1 einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher also zu c_1 prim ist. Aus der zweiten Congruenz (10.) würde man schliessen, dass dieser Theiler auch prim zu c_2 wäre. Es ist aber unmöglich, dass irgend ein Divisor von ε, welches selbst Theiler von $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ ist, prim zu c_1 und zu c_2 sei. Also müsste der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ auch Theiler von $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ sein. Umgekehrt heisse ζ

der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(i_1, i_2)}{i}$, so muss dieser nach der ersten Congruenz (10.) Theiler von $r_1 \varrho \frac{\delta_1'}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c}$ sein. Er ist aber prim zu $\frac{\delta_1'}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1}$ und Theiler von $c \frac{(c_1, c_2)}{c}$, daher entweder Theiler von $r_1 \frac{(c_1, c_2)}{c}$ oder auch nicht Theiler von $r_1 \varrho \frac{(c_1, c_2)}{c}$, weil ϱ zu c prim ist. Wäre daher ζ nicht Theiler von $\frac{(c_1, c_2)}{c}$, so müsste es mit r_1 einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher also zu i_1 prim wäre. Aus der zweiten Congruenz (10.) würde man schliessen, dass dieser Theiler auch prim zu i_2 wäre. Es ist aber unmöglich, das irgend ein Divisor von ζ, welches selbst Theiler von $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ ist, prim zu i_1 und i_2 sei. Also ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ auch Theiler von $\frac{(c_1, c_2)}{c}$. Aus beiden Schlüssen zusammen ergiebt sich, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ mit dem grössten gemeinschaftlichen Theiler von σ und $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ übereinstimmt. Da aber σ Divisor von $i \frac{(i_1, i_2)}{i}$ und $c \frac{(c_1, c_2)}{c}$ ist, so folgt, wenn man mit χ den grössten 89] gemeinschaftlichen Theiler von i und c bezeichnet, dass σ ein gemeinschaftlicher Theiler von $\chi \frac{(i_1, i_2)}{i}$ und (c, c_1, c_2) ist. Ähnlich schliesst man, dass σ ein gemeinschaftlicher Theiler von $\chi_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}$ und (c, c_1, c_2) und auch von $\chi_2 \frac{(i, i_1)}{i_2}$ und (c, c_1, c_2) ist, wo χ_1 und χ_2 respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von i_1 und c_1 und von i_2 und c_2 bedeuten. Daher ist σ der grösste Divisor des grössten gemeinschaftlichen Theilers der vier Zahlen

$$\chi \frac{(i_1, i_2)}{i}, \quad \chi_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}, \quad \chi_2 \frac{(i, i_1)}{i_2}, \quad (c, c_1, c_2),$$

für den noch die Congruenzen (10.) bestehen.

Vergleicht man das System der Congruenzen (10.) mit dem Systeme (5.) in No. 2, so ergiebt sich, dass σ mit dem dortigen ψ übereinstimmt, daher ist

$$\frac{d}{vi} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_1, i_2)}{\sigma} = \frac{d}{vi} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_1, i_2)}{\psi} = g.$$

Daher kommt eine im Producte Π der Gleichung (2.) vorhandene g^{te} Wurzel der Einheit genau $\frac{\varphi(n)}{\tau g} = u$mal vor; und da die Anzahl aller vorkommenden gleich $\frac{\varphi(n)}{\tau}$, so folgt, dass alle g^{ten} Wurzeln der Einheit vorkommen, und jede $u$mal. Dieser Nachweis war das zweite Erforderniss zur Begründung der Gleichung (2.).

Sind $e_1', e_2', \ldots$ wieder Zahlen respective aus den Reihen

$$0, 1, \ldots, \frac{\varphi(p_1^{a_1})}{\delta_1''} - 1; \quad 0, 1, \ldots, \frac{\varphi(p_2^{a_2})}{\delta_2''} - 1; \quad \ldots,$$

welche der Congruenz:

$$e_1' \varrho_1 \frac{\theta}{c_1'} + e_2' \varrho_2 \frac{\theta}{c_2'} + \cdots \equiv 0, \quad \text{mod. } \theta \tag{1a.}$$

genügen, wo c_μ' jetzt den grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ_μ und $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mu-1}, \delta_{\mu+1}, \ldots)$ bedeutet und $\delta_\mu'' = \frac{\delta_\mu}{c_\mu'}$ ist, so hat man analog der Gleichung (2.)

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{\theta s}}}\right)^U = \prod_{e_1', e_2', \ldots} \frac{1}{1 - \frac{\xi_1^{e_1' \delta_1'' \operatorname{Ind}_1 p} \xi_2^{e_2' \delta_2'' \operatorname{Ind}_2 p} \cdots}{p^s}}. \tag{2a.}$$

Es sei $c_\mu = \alpha_\mu . c_\mu'$, wo α_μ eine ganze Zahl ist; multiplicirt man die Congruenz (1a.) mit δ', so erhält man gemäss der Relation $\tau = \delta' \theta$

$$e_1' \varrho_1 \alpha_1 \frac{\tau}{c_1} + e_2' \varrho_2 \alpha_2 \frac{\tau}{c_2} + \cdots \equiv 0, \quad \text{mod. } \tau.$$

Setzt man $e_1' \alpha_1 = e_1''$, $e_2' \alpha_2 = e_2''$, $\ldots$, so geht diese Congruenz über in:

$$e_1'' \varrho_1 \frac{\tau}{c_1} + e_2'' \varrho_2 \frac{\tau}{c_2} + \cdots \equiv 0, \quad \text{mod. } \tau, \tag{1b.}$$

[90

und, weil $\delta_1'' = \alpha_1 \delta_1'$, $\delta_2'' = \alpha_2 \delta_2'$, $\ldots$, die Gleichung (2a.) in

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{\theta s}}}\right)^U = \prod_{e_1'', e_2'', \ldots} \frac{1}{1 - \frac{\xi_1^{e_1'' \delta_1' \operatorname{Ind}_1 p} \xi_2^{e_2'' \delta_2' \operatorname{Ind}_2 p} \cdots}{p^s}}, \tag{2b.}$$

wo das Product sich auf alle Zahlen respective der Reihen

$$0, 1, \ldots, \frac{\varphi(p_1^{a_1})}{\delta_1'} - 1; \quad 0, 1, \ldots, \frac{\varphi(p_2^{a_2})}{\delta_2'} - 1; \quad \ldots$$

bezieht, welche der Congruenz (1b.) genügen, da, wie man leicht sieht, die Grössen $e_1'', e_2'', \ldots$, wenn sie dieser Congruenz genügen, von selbst respective durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ theilbar sein müssen. — Man kann also in der Gleichung (2b.) die oberen Indices der Grössen e weglassen und das Product $\prod$ über

alle Werthe der Grössen $e_1, e_2, \ldots$ aus den eben angegebenen Zahlenreihen erstrecken, welche der Congruenz (1.) genügen, nachdem man darin e gleich Null gesetzt hat.

6.

Substituirt man in dem Ausdrucke R (Gleichung (2.) in No. 4) für jeden Factor $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{gs}}}\right)^u, \cdots, \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{Gs}}}\right)^U \cdots$ seinen Werth aus den Gleichungen (2.) und (2b.) der vorigen Nummer, entwickelt die einzelnen Factoren in Reihen, und multiplicirt diejenigen mit einander, die zu demselben Werthsysteme der Grössen e gehören, so erhält man:

$$(1.) \qquad R = (s-1) \prod_{e, e_1, e_2, \ldots} \sum_m \frac{\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} m} \xi_1^{e_1 \delta_1' \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{e_2 \delta_2' \operatorname{Ind}_2 m} \cdots}{m^s}.$$

In dieser Gleichung bezieht sich das Productzeichen $\prod$ auf alle $\frac{\varphi(n)}{\tau}$ Werthsysteme $e, e_1, e_2, \ldots$, die der Congruenz (1.) der vorigen Nummer genügen, das Summenzeichen $\sum_m$ jedesmal auf alle positiven ganzen Zahlen, für welche die vorhandenen Indices einen Sinn haben. Wenn z. B. $e = 0$, $e_1, e_2, \ldots$ aber von Null verschieden sind, so bezieht sich $\sum_m$ auf alle Zahlen, die mit $n' = \frac{n}{p^a}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Den Grenzwerth des Ausdruckes R für $s = 1$ finden wir mit Hülfe der von DIRICHLET in der Abhandlung über die arithmetische Progression[1]) gegebenen Gleichungen:

91] $$(2.) \qquad \lim (s-1) \sum_m \frac{1}{m^s} \text{ (für } s = 1) = 1,$$

$$(3.) \quad \sum_m \frac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m} \cdots}{m} = \int_0^1 \frac{\sum_m \xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m} \cdots x^{m-1}}{1 - x^{n_1}} dx.$$

In der letzten Gleichung sind $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ganze Zahlen, die nicht alle zugleich verschwinden; das Summenzeichen links bezieht sich auf alle positiven ganzen Zahlen, für welche die vorkommenden Indices einen Sinn haben, das Summenzeichen rechts auf alle Zahlen $< n_1$ und prim zu n_1, wo n_1 den Complex aller derjenigen in n enthaltenen Primzahlpotenzen bezeichnet, in Bezug auf welche linkerhand Indices vorkommen, während die Integration auf

1) Dirichlet's Werke, Bd. I (1889), S. 311—324. Sch.

reellem Wege von 0 bis 1 auszuführen ist. In der Gleichung (2.) dagegen bezieht sich das Summenzeichen auf alle positiven ganzen Zahlen.

Setzt man

$$(4.) \qquad f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\ldots}(x) = \sum_m \xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m} \ldots x^m,$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Werthe von m kleiner als n_1 und prim zu n_1 bezieht, und ist ω_1 eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_1} = 1$, so erhält man durch Zerlegung in Partialbrüche aus Gleichung (3.)

$$\sum_m \frac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m} \ldots}{m} = -\frac{1}{n_1} \sum_1^{n_1-1} {}_l f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\ldots}(\omega_1^l) \int_0^1 \frac{dx}{x-\omega_1^l}.$$

Hieraus folgt:

$$(5.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_m \frac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m} \ldots}{m} \\ \displaystyle = -\frac{1}{n_1} \sum_1^{n_1-1} {}_l f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\ldots}(\omega_1^l) \left[\log e(\omega_1^l) + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2l}{n_1}\right) \sqrt{-1} \right], \end{array} \right.$$

wo $e(\omega_1^l) = \sqrt{(1-\omega_1^l)(1-\omega_1^{-l})}$, welches eine von KUMMER mit dem Namen Kreistheilungseinheit belegte complexe Einheit ist.

Ist z. B. $n_1 = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ und z, z_1, z_2 respective primitive Wurzeln der Gleichungen $z^{p^a} = 1$, $z_1^{p_1^{a_1}} = 1$, $z_2^{p_2^{a_2}} = 1$, so ist

$$(6.) \qquad f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^l) = \sum_\mu \xi^{\gamma \operatorname{Ind} \mu} . z^{l\mu} . \sum_{\mu_1} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 \mu_1} . z_1^{l\mu_1} . \sum_{\mu_2} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 \mu_2} . z_2^{l\mu_2},$$

wo $\sum_\mu$, $\sum_{\mu_1}$, $\sum_{\mu_2}$ sich respective auf alle Zahlen kleiner als p^a und ohne den Theiler p, kleiner als $p_1^{a_1}$ und ohne den Theiler p_1, kleiner als $p_2^{a_2}$ und ohne den Theiler p_2 beziehen. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn l mit n_1 den grössten gemeinschaftlichen Theiler $p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}$ hat, $f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^l)$ verschwindet, ausser wenn $\gamma \equiv 0$, mod. p^ϱ, $\gamma_1 \equiv 0$, mod. $p_1^{\varrho_1}$, $\gamma_2 \equiv 0$, mod. $p_2^{\varrho_2}$. Umgekehrt, [92 wenn die höchsten in $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ enthaltenen Potenzen von p, p_1, p_2 respective $p^\varrho, p_1^{\varrho_1}, p_2^{\varrho_2}$ sind, so verschwindet $f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^l)$, ausser wenn $l \equiv 0$, mod. $p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}$. Hieraus folgt, wenn $\gamma = \gamma' p^\varrho$, $\gamma_1 = \gamma_1' p_1^{\varrho_1}$, $\gamma_2 = \gamma_2' p_2^{\varrho_2}$ und $\gamma' \gamma_1', \gamma_2'$ respective nicht mehr durch p, p_1, p_2 theilbar sind, so ist nach Gleichung (5.)

$$(7.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_m \frac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ \displaystyle = -\frac{1}{n_1} \sum_l f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \left[\log e\left(\omega_1^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}{n_1}\right) \sqrt{-1} \right], \end{array} \right.$$

wo die Summation rechts sich auf alle Werthe von l kleiner als $p^{a-\varrho}p_1^{a_1-\varrho_1}p_2^{a_2-\varrho_2}$ und prim zu n_1 bezieht. — Setzt man für eine dieser Zahlen l, $lm \equiv m'$, mod. n_1, so durchläuft m' mit m alle Werthe, die kleiner als n_1 und prim zu n_1 sind, und man erhält

$$f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) = \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \cdot f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right).$$

Daher geht die Gleichung (7.) über in:

$$(8.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m}\xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m}\xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = -\dfrac{1}{n_1} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \sum_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \\ \qquad \times \left[\log e\left(\omega_1^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) + \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{2lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}{n_1}\right)\sqrt{-1}\right], \end{array} \right.$$

wo rechts so wie in Gleichung (7.) zu summiren ist.

Man findet nunmehr ohne Mühe:

1) wenn $\gamma+\gamma_1+\gamma_2$ eine gerade Zahl ist,

$$(9.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m}\xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m}\xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = -\dfrac{1}{n_1} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \sum_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \log e\left(\omega_1^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right), \end{array} \right.$$

2) wenn $\gamma+\gamma_1+\gamma_2$ eine ungerade Zahl ist,

$$(10.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m}\xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m}\xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = \dfrac{\pi}{n_1^2}\sqrt{-1}\cdot p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \cdot \sum_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \cdot l. \end{array} \right.$$

93] In beiden Gleichungen ist rechterhand so wie in (7.) und (8.) zu summiren. — Setzt man $p^{a-\varrho}p_1^{a_1-\varrho_1}p_2^{a_2-\varrho_2} = n_1'$, so ist

$$e\left(\omega_1^{l}\right) e\left(\omega_1^{l+n_1'}\right) e\left(\omega_1^{l+2n_1'}\right) \ldots e\left(\omega_1^{l+(p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}-1)n_1'}\right) = e\left(\omega_1^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right).$$

Ferner ist:

$$e\left(\omega^{l}\right) e\left(\omega^{l+n_1}\right) e\left(\omega^{l+2n_1}\right) \ldots e\left(\omega^{l+\left(\frac{n}{n_1}-1\right)n_1}\right) = e\left(\omega_1^{l}\right),$$

wo ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ bedeutet. Hieraus folgt:

1) wenn $\gamma+\gamma_1+\gamma_2$ eine gerade Zahl ist,

$$(9a.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_m \frac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m}\, \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m}\, \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ \displaystyle = -\frac{1}{n_1} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \sum_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\, \xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\, \xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \log e(\omega), \end{array} \right.$$

2) wenn $\gamma+\gamma_1+\gamma_2$ eine ungerade Zahl ist,

$$(10a.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_m \frac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m}\, \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m}\, \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ \displaystyle = \frac{\pi}{n n_1}\sqrt{-1} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \sum_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\, \xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\, \xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l}\, l; \end{array} \right.$$

die Summationen rechter Hand in beiden Gleichungen sind auf alle Zahlen kleiner als n und prim zu n_1 zu beziehen.

Wir können nunmehr zur Bestimmung des Grenzwerthes von R übergehen.

Es bedeute für irgend einen Factor des Productes in Gleichung (1.) $n_{e,e_1,e_2,\ldots}$ das Product aller derjenigen in n enthaltenen Primzahlpotenzen, denen nicht verschwindende Werthe der resp. Grössen e entsprechen, $\omega_{e,e_1,e_2,\ldots}$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_{e,e_1,e_2,\ldots}} = 1$, $p^\varrho, p_1^{\varrho_1}, p_2^{\varrho_2}, \ldots$ respective den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $p^a, p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots$ und $e, e_1, e_2, \ldots$, und man setze

$$\sum_l \xi^{e\delta' \operatorname{Ind} l}\, \xi_1^{e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l}\, \xi_2^{e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots \omega_{e,e_1,e_2,\ldots}^{l p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}\ldots} = f_{e,e_1,e_2,\ldots}\left(\omega_{e,e_1,e_2,\ldots}^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}\ldots}\right),$$

wo sich die Summation auf alle Werthe von l, die kleiner sind als $n_{e,e_1,e_2,\ldots}$ und prim zu dieser Zahl, bezieht. Es sei nunmehr

$$\prod_{e,e_1,e_2,\ldots} \frac{f_{e,e_1,e_2,\ldots}\left(\omega_{e,e_1,e_2,\ldots}^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}\ldots}\right)}{n_{e,e_1,e_2,\ldots}} = A,$$

wo sich das Productzeichen auf alle mit der Congruenz (1.) der vorigen [94 Nummer verträglichen Combinationen der Grössen e, mit Ausnahme der Combination 0, 0, 0, ..., 0, bezieht, so dass die Anzahl der Factoren von A gleich $\frac{\varphi(n)}{\tau} - 1$. Eine genauere Discussion des Ausdruckes A würde zeigen, dass er

die Gestalt $p^{\mathfrak{e}} p_1^{\mathfrak{e}_1} p_2^{\mathfrak{e}_2} \ldots$, wo die Exponenten $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ rationale Werthe haben, annimmt. Wir gehen jedoch aus dem Grunde auf die Ermittelung dieser Exponenten nicht ein, weil es zweckmässiger scheint, den Ausdruck A in Verbindung mit einer Determinante im Schlussausdrucke der Klassenanzahl zu betrachten, gegen die er sich wegheben muss.

Es seien ferner $l, l_1, l_2, l_3, \ldots$ respective die kleinsten Reste von

$$l,\ lx,\ lx^2,\ lx^3,\ \ldots,\ \text{mod. } n$$

und

$$nS_l = l + l_1 + l_2 + l_3 + \cdots$$

so weit fortgesetzt bis das erste Glied wiederkehrt, so hat man in Folge der Congruenz (1.) in No. 5

$$\sum_l \xi^{-e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots l = n \sum_l \xi^{-e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots S_l,$$

wo die erste Summe auf alle Werthe von l, die kleiner als n und prim zu $n_{e, e_1, e_2, \ldots}$ sind, zu beziehen ist, die zweite Summe auf solche von diesen Zahlen, wovon nicht der Quotient zweier einer Potenz von x nach dem Modul n congruent ist. Wir setzen diese zweite Summe

$$\sum_l \xi^{-e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots S_l = K(e, e_1, e_2, \ldots).$$

Es sei ferner

$$E(\omega^l) = e(\omega^l)\, e(\omega^{lx})\, e(\omega^{lx^2}) \ldots$$

so weit fortgesetzt bis der erste Factor wiederkehrt, und

1) für den Fall, dass τ ungerade oder τ gerade, ohne dass $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n

$$\sum_l \xi^{-e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots \log e(\omega^l)$$
$$= 2 \sum_l \xi^{-e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots \log E(\omega^l) = 2L(e, e_1, e_2, \ldots),$$

2) für den Fall, dass τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n

$$\sum_l \xi^{-e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots \log e(\omega^l)$$
$$= \sum_l \xi^{-e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-e_1\delta_1' \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-e_2\delta_2' \operatorname{Ind}_2 l} \ldots \log E(\omega^l) = L'(e, e_1, e_2, \ldots),$$

wo die Summen L und L' sich auf die Werthe von l beziehen, die prim zu 95] $n_{e, e_1, e_2, \ldots}$ sind und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer

Potenz von x (mod. n) und die unterhalb $\frac{1}{2}n$ für L und unterhalb n für L' liegen.

Unter den Grössen $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ enthalte δ die höchste Potenz von 2, welche überhaupt in einer derselben als Factor vorkommt. Alsdann sind die Zahlen $\delta'_1, \delta'_2, \ldots$ sämmtlich ungerade, und daher

$$e_1\delta'_1 + e_2\delta'_2 + \cdots \equiv e_1 + e_2 + \cdots, \mod. 2.$$

Man bestimme nun alle Systeme der Grössen $e_1, e_2, \ldots$, welche die Congruenz

$$e_1\varrho_1\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_1} + e_2\varrho_2\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_2} + \cdots \equiv 0, \mod. \frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c}$$

genügen. Es sei für irgend eines dieser Systeme

$$e_1\varrho_1\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_1} + e_2\varrho_2\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_2} + \cdots = G\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c},$$

so muss der zugehörige Werth von e der Congruenz:

$$e\varrho + G \equiv 0, \mod. c$$

genügen. — Ist nun $e_1, e_2, \ldots$ ein System, welches der ersten Congruenz genügt, so ist auch $e_1 + k\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c}, e_2, \ldots$ ein solches System, wenn k eine beliebige ganze Zahl bedeutet und die erste Grösse nach dem Modul $\frac{\varphi(p^a)}{\delta'_1}$ reducirt ist. Da aber der letztere Modul eine gerade Zahl ist, so hat diese Reduction auf den Charakter der Summe $e_1 + e_2 + \cdots$ in Bezug auf den Modul 2 keinen Einfluss, und weil $\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c}$ ungerade ist, so folgt daraus, dass diese Summe ebenso oft gerade als ungerade ist. Ist δ' gerade, so ist

$$e\delta' + e_1\delta'_1 + e_2\delta'_2 + \cdots \equiv e_1 + e_2 + \cdots, \mod. 2,$$

daher wird auch die erstere Summe ebenso oft gerade als ungerade. Ist aber δ' ungerade, so muss man die Fälle unterscheiden, wenn auch δ also auch c ungerade, oder wenn das Gegentheil stattfindet. Im ersteren Falle sei $e, e_1, e_2, \ldots$ ein der Congruenz (1.) der vorigen Nummer genügendes System, so bilden auch die Grössen $e + kc, e_1, e_2, \ldots$ für $k = 1, 2, \ldots, \frac{\varphi(p^a)}{\delta} - 1$ ein solches. Da aber c ungerade ist, so wird $e\delta' + e_1\delta'_1 + e_2\delta'_2 + \cdots$ ebenso oft gerade als ungerade. Im anderen Falle, wo c gerade ist, ist $G \equiv \sum e_\varepsilon$, mod. 2, wenn die Summe sich auf diejenigen der Indices 1, 2, ... bezieht, für welche

c_s dieselbe Potenz von 2 enthält wie c. — Es muss aber $e+G \equiv 0$, mod. 2 sein, und daher $e\delta'+e_1\delta_1'+e_2\delta_2'+\cdots$ congruent der Summe der übrigen Grössen e (mod. 2). Diese Summe aber ist ebenso oft gerade als ungerade, da, wenn 96] z. B. e_s ein Glied derselben ist, $e_s+k\frac{(c,c_1,c_2,\ldots)}{c}$ ebenfalls ein Glied einer solchen Summe ist. Es ist also in allen Fällen $e\delta'+e_1\delta_1'+e_2\delta_2'+\cdots$ ebenso oft gerade als ungerade, ausser wenn alle Grössen c eine gleich hohe Potenz von 2 enthalten. Dieser Fall tritt aber dann und nur dann ein, wenn τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n, und in diesem Falle ist die Summe $e\delta'+e_1\delta_1'+e_2\delta_2'+\cdots$ stets gerade. —

Setzt man endlich

$$\Pi K(e,e_1,e_2,\ldots) = P, \quad \Pi L(e,e_1,e_2,\ldots) = Q, \quad \Pi L'(e,e_1,e_2,\ldots) = Q',$$

wo das erste Productzeichen sich auf alle der Congruenz (1.) der vorigen Nummer genügenden Werthsysteme der Grössen e bezieht, für welche

$$e\delta'+e_1\delta_1'+e_2\delta_2'+\cdots$$

eine ungerade Zahl ist, während sich das zweite und dritte Product auf alle diejenigen Systeme beziehen, für welche $e\delta'+e_1\delta_1'+e_2\delta_2'+\cdots$ eine gerade Zahl ist, so erhält man schliesslich:

1) wenn τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$, mod. n

$$\text{(11.)} \qquad \lim_{\text{für } s=1} R = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}-1} \cdot \sqrt{(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}}} \cdot 2^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}-1} \cdot \pi^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}} \cdot A.P.Q,$$

2) wenn τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n

$$\text{(11a.)} \qquad \lim_{\text{für } s=1} R = -A.Q'.$$

7.

Ehe wir zu der zweiten Summationsweise der Reihe R, wie sie die DIRICHLETsche Methode erfordert, übergehen, ist es nothwendig, Einiges über die complexen Einheiten in π voranzuschicken.

Ist n eine ungerade Zahl, so besitzt, wie KRONECKER (dieses Journal, Bd. 53, S. 176[1]) gezeigt hat, jede complexe Einheit in der Theorie der com-

1) Werke, Bd. I (1895), S. 109. Sch.

plexen Zahlen in ω, $E(\omega)$, die Eigenschaft, dass

$$E(\omega^{-1}) = \pm \omega^h E(\omega),$$

wo h eine ganze Zahl bedeutet. Da für eine complexe Einheit in π die Gleichungen $E(\omega) = E(\omega^x) = E(\omega^{x^2}) = \cdots = E(\omega^{x^{\tau-1}})$ statt haben, so ist, wenn τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n, $E(\omega^{x^{\frac{1}{2}\tau}}) = E(\omega^{-1}) = E(\omega)$, oder es sind in diesem Falle alle Einheiten real. Ist aber τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$, mod. n, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$E(\omega^{-1}) = \pm \omega^h E(\omega)$$

und

$$E(\omega^{-x^{\frac{1}{2}\tau}}) = E(\omega^{-1}) = \pm \omega^{hx} E(\omega^x) = \pm \omega^{hx} E(\omega), \qquad [97$$

dass $\omega^{h(x-1)} = 1$, oder $h(x-1) \equiv 0$, mod. n. Es habe daher $x-1$ mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler s, so muss $h \equiv 0$, mod. $\frac{n}{s}$ sein; oder ω^h ist eine s^{te} Wurzel der Einheit. Es sei ε eine Wurzel der Congruenz $2\varepsilon - h \equiv 0$, mod. n, so hat $E'(\omega) = \omega^\varepsilon E(\omega)$ die Eigenschaft, dass

$$E'(\omega^{-1}) = \pm E'(\omega).$$

Es wird also jede complexe Einheit in π durch Multiplication mit einer s^{ten} Wurzel der Einheit entweder real oder rein imaginär. Ist n so beschaffen, dass es rein imaginäre Einheiten giebt, so sei $E(\omega)$ irgend eine derselben, so ist $E''(\omega) = \frac{E'(\omega)}{E(\omega)^\zeta}$ real, wenn $\zeta = 0$ oder 1 gesetzt wird, je nachdem in der Gleichung $E(\omega^{-1}) = \pm \omega^h E(\omega)$ das obere oder untere Zeichen gilt. Es ist also $E(\omega) = \omega^{-\varepsilon} E(\omega)^\zeta . E''(\omega)$.

Es werde nunmehr $\nu = \frac{\varphi(n)}{\tau}$ gesetzt, so ergiebt sich aus den von DIRICHLET gegebenen Sätzen über complexe Einheiten, (Monatsberichte der Berliner Academie Jhrg. 1846[1]):

1) wenn τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n, so giebt es $\nu - 1$ reale und positive Einheiten in π, $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$, ..., $\varepsilon_{\nu-1}(\omega)$, die ein Fundamentalsystem constituiren, so dass jede complexe Einheit in π, $E(\omega)$, dargestellt wird durch die Gleichung

$$(1.) \qquad E(\omega) = \pm \varepsilon_1(\omega)^{m_1} \varepsilon_2(\omega)^{m_2} \ldots \varepsilon_{\nu-1}(\omega)^{m_{\nu-1}},$$

wo $m_1, m_2, \ldots, m_{\nu-1}$ positive ganze Zahlen sind;

[1]) Dirichlets Werke, Bd. I, S. 639–644. Sch.

2) wenn τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$, mod. n, so giebt es ein Fundamentalsystem von $\frac{1}{2}\nu - 1$ realen und positiven Einheiten

$$\varepsilon_1(\omega),\ \varepsilon_2(\omega),\ \ldots,\ \varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega),$$

so dass in diesem Falle jede complexe Einheit in π, $E(\omega)$, wenn es rein imaginäre Einheiten giebt, dargestellt wird durch die Gleichung

$$(2.) \qquad E(\omega) = \pm\, \omega^{-\varepsilon} \mathrm{E}(\omega)^{\zeta} \varepsilon_1(\omega)^{m_1} \varepsilon_2(\omega)^{m_2} \ldots \varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)^{m_{\frac{1}{2}\nu-1}},$$

wo $m_1, m_2, \ldots, m_{\frac{1}{2}\nu-1}$ ganze Zahlen sind, und ω^{ε} eine s^{te} Wurzel der Einheit bedeutet, und wo $\zeta = 0$ oder 1 zu setzen ist. —

Wenn es keine rein imaginäre Einheiten giebt, so hat man dagegen:

$$(2a.) \qquad E(\omega) = \pm\, \omega^{-\varepsilon} \varepsilon_1(\omega)^{m_1} \varepsilon_2(\omega)^{m_2} \ldots \varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)^{m_{\frac{1}{2}\nu-1}}.$$

Bezeichnet man die Anzahl der nicht äquivalenten Klassen der idealen Zahlen in π mit H, und bedeutet $f_a(\omega)$ eine zur a^{ten} Klasse gehörige ideale Zahl, so ist

$$R = \sum \frac{(s-1)}{[Nf(\omega)]^s} + \sum{}^{(1)} \frac{(s-1)}{[Nf_1(\omega)]^s} + \sum{}^{(2)} \frac{(s-1)}{[Nf_2(\omega)]^s} + \cdots + \sum{}^{(H-1)} \frac{(s-1)}{[Nf_{H-1}(\omega)]^s},$$

98] wo $\sum^{(a)}$ sich auf alle verschiedenen idealen Zahlen der a^{ten} Klasse bezieht, und wo mit $f(\omega)$ jede wirkliche complexe Zahl bezeichnet wird. Es ist nunmehr leicht zu zeigen, dass die Grenzwerthe dieser einzelnen Summen für $s = 1$ unter einander gleich sind, so dass

$$(3.) \qquad \lim_{s=1} R = H \lim \sum \frac{(s-1)}{[Nf(\omega)]^s} \quad \text{für } s = 1,$$

wo die Summe rechter Hand sich auf alle wirklichen complexen Zahlen in π bezieht, die nicht durch blosse Einheitsfactoren verschieden sind. — Die Untersuchung des Grenzwerthes dieser Summe erfordert die Unterscheidung der beiden Fälle: erstens τ ungerade oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$, mod. n, zweitens τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n.

I. τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$, mod. n.

Bezeichnet man den Grenzwerth der Summe $\sum \frac{(s-1)}{[Nf(\omega)]^s}$ für $s = 1$ mit G, so ergiebt sich aus den von DIRICHLET und KUMMER entwickelten Principien,

dass

$$G = \frac{1}{2^{\zeta}.2s} \lim \frac{N}{T} \quad \text{für} \quad T = \infty,$$

wenn N die Anzahl der Glieder der Reihe bezeichnet, für die $Nf(\omega) < T$, und wo die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)-1}$ in

$$f(\omega) = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{\varphi(n)-1}\omega^{\varphi(n)-1}$$

ausser durch die $\varphi(n)$ Gleichungen vertretende Bedingungsgleichung

$$f(\omega^x) = f(\omega) \tag{4.}$$

durch das folgende System von Gleichungen eingeschränkt werden:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_1})\varepsilon_a & = \frac{1}{2} l[cf(\omega^{r_1})f(\omega^{r_{-1}})], \\
\sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_2})\varepsilon_a & = \frac{1}{2} l[cf(\omega^{r_2})f(\omega^{r_{-2}})], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})\varepsilon_a & = \frac{1}{2} l[cf(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})f(\omega^{r-(\frac{1}{2}\nu-1)})].
\end{array}\right. \tag{5.}$$

In diesen Gleichungen bedeuten $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \ldots, \varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)$ zu einem Fundamentalsysteme zusammengehörige reale und positive Einheiten in π, die Grösse c eine beliebige Constante, $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ die ν Zahlen, welche kleiner als n, prim zu n, und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod. n), und endlich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}$ zwischen Null und Eins lie- [99
gende Zahlenwerthe. Mit dem Symbol l wird der natürliche Logarithmus bezeichnet, und r_{-a} ist gleich $n-r_a$. Endlich muss $\zeta = 1$ oder Null gesetzt werden, je nachdem eine rein imaginäre Einheit in π existirt oder nicht existirt.

Setzt man $a'_a = a_a.t$ für $a = 0, 1, \ldots, \varphi(n)-1$, und

$$f'(\omega) = a'_0 + a'_1\omega + a'_2\omega^2 + \cdots + a'_{\varphi(n)-1}\omega^{\varphi(n)-1},$$

so dass $f(\omega) = \frac{f'(\omega)}{t}$, nimmt man ferner $c = \frac{1}{t^s}$ an, so hat man in dem Ausdrucke $G = \lim \sum \frac{s-1}{\left[\frac{Nf'(\omega)}{t}\right]^s}$ für jeden Coefficienten a' die Glieder einer nach

positiver und negativer Seite sich ins Unendliche erstreckenden arithmetischen Reihe mit der Differenz t und dem Anfangsgliede 0 zu nehmen, welche mit den Bedingungen

$$f'(\omega^{\chi}) = f'(\omega), \tag{6.}$$

$$\begin{cases} \sum_{1}^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_{\alpha} l\varepsilon_{\alpha}(\omega^{r_1})\varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} l[f'(\omega^{r_1})f'(\omega^{r-1})], \\ \sum_{1}^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_{\alpha} l\varepsilon_{\alpha}(\omega^{r_2})\varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} l[f'(\omega^{r_2})f'(\omega^{r-2})], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{1}^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_{\alpha} l\varepsilon_{\alpha}(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})\varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} l[f'(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})f'(\omega^{r-(\frac{1}{2}\nu-1)})] \end{cases} \tag{7.}$$

verträglich sind. — Nimmt man $T = \frac{1}{t^{\nu}}$ an, so geht die Bedingungsgleichung $\frac{Nf'(\omega)}{t^{\nu}} < T$ über in:

$$Nf'(\omega) < 1. \tag{8.}$$

Nimmt man t unendlich klein, so werden die Coefficienten in $f'(\omega)$ reale Variabeln. Sind nun $\pi_{r_1}, \pi_{r_2}, \ldots, \pi_{r_\nu}$ die primitiven Perioden, so genügen dieselben bekanntlich einer algebraischen Gleichung $F(x) = 0$, in der die Coefficienten ganzzahlig und der Coefficient der höchsten Potenz von x die Einheit ist. Da wir (s. No. 3) annehmen können, dass die primitiven Perioden nicht verschwinden, so können auch nicht zwei derselben einander gleich sein (vergl. die o. a. Abh. von KUMMER vom Jahre 1856 § 2, und meine o. a. Arbeit No. 4 [1]). Daher folgt bekanntlich aus der Gleichung (6.), dass

$$f'(\omega^{r_\alpha}) = x_0 + x_1\pi_{r_\alpha} + x_2\pi_{r_\alpha}^2 + \cdots + x_{\nu-1}\pi_{r_\alpha}^{\nu-1}, \tag{9.}$$

100] für $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, gesetzt werden darf, wo $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ reale Grössen sind. Daher ist

$$G = \frac{1}{2^{\zeta}.2s}\int^{(\nu)} dx_0\, dx_1 \ldots dx_{\nu-1}, \tag{10.}$$

wo $\int^{(\nu)}$ ein νfaches auf die Variabeln $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ erstrecktes Integral ist, mit den durch die Gleichungen (7.) und (8.) ausgedrückten Grenzbedingungen. —

---

[1]) Siehe S. 63 dieses Bandes. Sch.

Es sei

$$y_a = f'(\omega^{r_a}), \tag{11.}$$

führt man mit Hülfe der ν Gleichungen (9.) die Variabeln y an die Stelle der Variabeln x in das Integral (10.) ein und setzt die nicht verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_{r_1} & \pi_{r_1}^2 & \dots & \pi_{r_1}^{\nu-1} \\ 1 & \pi_{r_2} & \pi_{r_2}^2 & \dots & \pi_{r_2}^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_{r_\nu} & \pi_{r_\nu}^2 & \dots & \pi_{r_\nu}^{\nu-1} \end{vmatrix} = D,$$

so ist bekanntlich

$$G = \frac{1}{2^\zeta . 2s . D} \int^{(\nu)} dy_1 dy_2 \dots dy_\nu, \tag{12.}$$

und die Grenzbedingungen (7.) und (8.) werden:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_1})\varepsilon_a & = \frac{1}{2} l(y_1 . y_{-1}), \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_2})\varepsilon_a & = \frac{1}{2} l(y_2 . y_{-2}), \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})\varepsilon_a & = \frac{1}{2} l(y_{\frac{1}{2}\nu-1} . y_{-(\frac{1}{2}\nu-1)}), \end{array} \right. \tag{13.}$$

$$y_1 y_2 \dots y_\nu < 1. \tag{14.}$$

Die Variabeln y_a und y_{-a} haben conjugirte imaginäre Werthe. Setzt man daher

$$ly_a = u_a + u_{\frac{1}{2}\nu+a} \cdot \sqrt{-1}, \qquad ly_{-a} = u_a - u_{\frac{1}{2}\nu+a} \cdot \sqrt{-1} \tag{15.}$$

für $a = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}\nu$, und transformirt das Integral (12.) in die Variabeln u, so findet man ohne Mühe

$$G = (-1)^{\frac{1}{2}\nu} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}\nu-1-\zeta}}{s . D} \cdot \int^{(\nu)} e^{2u_1} e^{2u_2} \dots e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} du_1 du_2 \dots du_{\frac{1}{2}\nu} . du_{\frac{1}{2}\nu+1} du_{\frac{1}{2}\nu+2} \dots du_\nu \tag{16.}$$

Die Grenzbedingungen (13.) und (14.) gehen über in: [101

$$(17.)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \sum_{1}^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_{a} l\varepsilon_a(\omega^{r_1})\varepsilon_a & = u_1, \\ \sum_{1}^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_{a} l\varepsilon_a(\omega^{r_2})\varepsilon_a & = u_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \sum_{1}^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_{a} l\varepsilon_a(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})\varepsilon_a & = u_{\frac{1}{2}\nu-1}, \end{array}\right.$$

$$(18.)\qquad e^{2u_1}e^{2u_2}\dots e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} < 1.$$

In diesen kommen die Variabeln $u_{\frac{1}{2}\nu+1}, u_{\frac{1}{2}\nu+2}, \dots, u_\nu$ nicht vor, und man hat daher in Bezug auf jede derselben zwischen den Grenzen $-\frac{s}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu integriren. Aus (18.) folgt, dass man in Bezug auf $u_{\frac{1}{2}\nu}$ zwischen den Grenzen $e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} = 0$ und $e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} = e^{-2u_1}e^{-2u_2}\dots e^{-2u_{\frac{1}{2}\nu-1}}$ zu integriren hat. Daher ist

$$(19.)\qquad G = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-2-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}}{s.D}\int^{(\frac{1}{2}\nu-1)} du_1 du_2 \dots du_{\frac{1}{2}\nu-1},$$

mit der einzigen Grenzbedingung (17.) — Setzt man die Determinante

$$\left|\begin{array}{cccc} l\varepsilon_1(\omega^{r_1}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_1}) & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega^{r_1}) \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_2}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_2}) & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega^{r_2}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) \end{array}\right| = \Delta,$$

so verschwindet bekanntlich diese Determinante nicht, weil

$$\varepsilon_1(\omega),\ \varepsilon_2(\omega),\ \dots,\ \varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)$$

ein Fundamentalsystem constituiren. Man hat daher

$$G = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-2-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}.\Delta}{s.D}\int^{(\frac{1}{2}\nu-1)} ds_1 ds_2 \dots ds_{\frac{1}{2}\nu-1},$$

wo die Integration in Bezug auf jede der Variabeln s zwischen den Grenzen 0 und 1 auszuführen ist. Es ist also endlich

$$(20.)\qquad G = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-2-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}.\Delta}{s.D}.$$

Hieraus folgt mit Hülfe der Gleichung (3.)

$$\lim_{s=1} R = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-s-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}.\Delta.H}{s.D}. \tag{21.}$$

Setzt man diesen Werth von $\lim R$ dem in No. 6 Gleichung (11.) gefundenen [108 gleich, so erhält man

$$H = (-1)^{\frac{1}{2}\nu-1}.\frac{A.D.s.P}{2^{\frac{1}{2}\nu-1-\zeta}}.\frac{Q}{\Delta}. \tag{22.}$$

II. τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$, mod. n.

In diesem Falle ist

$$G = \tfrac{1}{2}\lim\frac{N}{T} \quad \text{für} \quad T = \infty.$$

An die Stelle der Gleichungen (5.) treten die folgenden:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_1^{\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_1})s_a & = \tfrac{1}{2}l[cf(\omega^{r_1})^2], \\ \sum_1^{\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_2})s_a & = \tfrac{1}{2}l[cf(\omega^{r_2})^2], \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \sum_1^{\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_{\nu-1}})s_a & = \tfrac{1}{2}l[cf(\omega^{r_{\nu-1}})^2], \end{array}\right. \tag{23.}$$

wo wiederum $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \ldots, \varepsilon_{\nu-1}(\omega)$ reale positive Einheiten sind, die ein Fundamentalsystem constituiren. — Es ergiebt sich auf analoge Weise wie im Falle I.

$$G = \frac{1}{2D}\cdot\int^{(\nu)} dy_1 dy_2 \ldots dy_\nu, \tag{24.}$$

wo $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ reale Variabeln sind, und die Integration den folgenden Grenzbedingungen gemäss geschehen muss:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_1^{\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_1})s_a & = \tfrac{1}{2}ly_1^2, \\ \sum_1^{\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_2})s_a & = \tfrac{1}{2}ly_2^2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \sum_1^{\nu-1} l\varepsilon_a(\omega^{r_{\nu-1}})s_a & = \tfrac{1}{2}ly_{\nu-1}^2. \end{array}\right. \tag{25.}$$

$$y_1 y_2 \dots y_\nu < 1. \tag{26.}$$

Die zweite derselben erfordert, dass in Bezug auf y_ν zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{y_1 y_2 \cdots y_{\nu-1}}$ integrirt werde. Führt man diese Integration aus und setzt

$$u_\alpha = \log y_\alpha^2 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, 2, \dots, \nu-1,$$

103] so erhält man

$$G = \frac{1}{2^\nu . D} \int^{(\nu-1)} du_1 du_2 \dots du_{\nu-1}, \tag{27.}$$

wo $u_1, u_2, \dots, u_{\nu-1}$ reale Variabeln sind, und die Integration den folgenden Grenzgleichungen gemäss geschehen muss:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_1^{\nu-1} \alpha \, l\varepsilon_\alpha(\omega^{r_1}) \varepsilon_\alpha & = \frac{1}{2} u_1, \\ \sum_1^{\nu-1} \alpha \, l\varepsilon_\alpha(\omega^{r_2}) \varepsilon_\alpha & = \frac{1}{2} u_2, \\ \dots\dots\dots & \\ \sum_1^{\nu-1} \alpha \, l\varepsilon_\alpha(\omega^{r_{\nu-1}}) \varepsilon_\alpha & = \frac{1}{2} u_{\nu-1}. \end{array} \right. \tag{28.}$$

Führt man in das Integral (27.) die Variabeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\nu-1}$ ein, in Bezug auf welche zwischen den Grenzen 0 und 1 zu integriren ist, und setzt die Determinante:

$$\begin{vmatrix} l\varepsilon_1(\omega^{r_1}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_1}) & \dots & l\varepsilon_{\nu-1}(\omega^{r_1}) \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_2}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_2}) & \dots & l\varepsilon_{\nu-1}(\omega^{r_2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_{\nu-1}}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_{\nu-1}}) & \dots & l\varepsilon_{\nu-1}(\omega^{r_{\nu-1}}) \end{vmatrix} = \Delta',$$

so folgt

$$G = \frac{\Delta'}{2D}. \tag{29.}$$

Endlich ist

$$\lim_{s=1} R = \frac{H . \Delta'}{2D}. \tag{30.}$$

Setzt man diesen Werth von $\lim R$ dem in der vorigen Nummer Gleichung (11a.) gefundenen gleich, so erhält man:

$$H = -2D \cdot A \cdot \frac{Q'}{\Delta'}. \tag{31.}$$

8.

Die Bestimmung der Klassenanzahl der idealen Zahlen in π lässt wesentliche Vereinfachungen zu, wenn n keinen quadratischen Factor enthält, d. h. wenn $n = pp_1p_2p_3\ldots$, wo $p, p_1, p_2, p_3, \ldots$ lauter verschiedene, un- [104 gerade Primzahlen sind. Es scheint daher nicht unangemessen, diesen Fall besonders zu behandeln.

Ist n durch keinen quadratischen Factor theilbar, so lässt sich jede complexe Zahl in ω stets und nur auf eine einzige Weise in die folgende Form bringen:

$$(1.) \qquad f(\omega) = a_1\omega^{r_1} + a_2\omega^{r_2} + \cdots + a_{\varphi(n)}\omega^{r_{\varphi(n)}},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}$ ganze Zahlen, und $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ die Zahlen bedeuten, welche kleiner als n und prim zu n sind.

Denn ist ω^b eine nicht primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, und ist z. B. $b = \alpha pp_1$, wo α prim zu $p_2p_3\ldots$ ist, und sind $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die Zahlen, welche kleiner als pp_1 und prim zu dieser Zahl, so hat man die Gleichung:

$$(2.) \qquad \omega^{\alpha pp_1}(1 - \omega^{\beta_1 p_2 p_3 \cdots} - \omega^{\beta_2 p_2 p_3 \cdots} - \ldots) = 0.$$

Hieraus folgt, dass man jede nicht primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ und folglich jede complexe Zahl in die Form (1.) setzen kann. — Es ergiebt sich hieraus ferner ohne Mühe, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega^{r_1} & \omega^{r_2} & \ldots & \omega^{r_{\varphi(n)}} \\ \omega^{r_2 r_1} & \omega^{r_2 r_2} & \ldots & \omega^{r_2 r_{\varphi(n)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega^{r_{\varphi(n)} r_1} & \omega^{r_{\varphi(n)} r_2} & \ldots & \omega^{r_{\varphi(n)} r_{\varphi(n)}} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, wenn $r_1 = 1$ angenommen wird; und hieraus ergiebt sich, dass man $f(\omega)$ nur auf eine Weise in die Form (1.) setzen kann. — Ist daher $f(\omega^x) = f(\omega)$, so hat $f(\omega)$ die Gestalt

$$(3.) \qquad f(\omega) = a_1\pi_{r_1} + a_2\pi_{r_2} + \cdots + a_\nu\pi_{r_\nu},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ganze Zahlen und $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ die ν Zahlen bedeuten, welche

kleiner als n und prim zu n, und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod. n).

Es sei nun

I. τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$, mod. n,

so tritt an die Stelle der Gleichung (10.) der vorigen Nummer die folgende:

$$G = \frac{1}{2^t . 2s} \int^{(\nu)} da_1 da_2 \dots da_\nu . \tag{4.}$$

In der Gleichung (12.) der vorigen Nummer ist an die Stelle der Deter- [105] minante D die Determinante

$$\begin{vmatrix} \pi_{r_1} & \pi_{r_2} & \cdots & \pi_{r_\nu} \\ \pi_{r_1 r_2} & \pi_{r_2 r_2} & \cdots & \pi_{r_\nu r_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{r_1 r_\nu} & \pi_{r_2 r_\nu} & \cdots & \pi_{r_\nu r_\nu} \end{vmatrix} = E$$

zu setzen, wo $r_1 = 1$ angenommen wird.

Im gegenwärtigen Falle sind die in No. 5 eingeführten Grössen $e, e_1, e_2, \dots$ respective durch $p, p_1, p_2, \dots$ nicht theilbar, und es ist:

$$f_{e, e_1, e_2, \dots}(\omega_{e, e_1, e_2, \dots}) = \pm \sum_l \xi^{e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{e_1 \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 l} \dots \omega^l, \tag{5.}$$

wo die Summe auf alle Zahlen l zu beziehen ist, die kleiner als n und prim zu n, und wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n'_{e, e_1, e_2, \dots} = \frac{n}{n_{e, e_1, e_2, \dots}}$ eine gerade Anzahl von Primfactoren enthält oder eine ungerade. — Dieses ergiebt sich aus der Gleichung

$$\omega^{\alpha n'_{e, e_1, e_2, \dots}} \left(\mp 1 + \omega^{\beta_1 n_{e, e_1, \dots}} + \omega^{\beta_2 n_{e, e_1, \dots}} + \dots \right) = 0, \tag{6.}$$

wenn α eine der Zahlen, die kleiner als $n_{e, e_1, \dots}$ und prim zu derselben ist während $\beta_1, \beta_2, \dots$ sämmtliche Zahlen bedeuten, welche kleiner als $n'_{e, e_1, \dots}$ und prim zu dieser Zahl sind, und wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n'_{e, e_1, \dots}$ eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Primfactoren enthält. —

Da $\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} x} \xi_1^{e_1 \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 x} \dots = 1$, so ist auch

$$f_{e, e_1, e_2, \dots}(\omega_{e, e_1, e_2, \dots}) = \pm \sum_l \xi^{e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{e_1 \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 l} \dots \pi_l, \tag{7.}$$

wo die Summation rechts sich auf alle Zahlen bezieht, die kleiner sind als n und prim zu n und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod. n). — Die Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \xi^{e^{(1)}\delta' \operatorname{Ind} r_1} \xi_1^{e_1^{(1)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_1} \cdots & \xi^{e^{(1)}\delta' \operatorname{Ind} r_2} \xi_1^{e_1^{(1)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_2} \cdots & \cdots & \xi^{e^{(1)}\delta' \operatorname{Ind} r_\nu} \xi_1^{e_1^{(1)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_\nu} \cdots \\ \xi^{e^{(2)}\delta' \operatorname{Ind} r_1} \xi_1^{e_1^{(2)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_1} \cdots & \xi^{e^{(2)}\delta' \operatorname{Ind} r_2} \xi_1^{e_1^{(2)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_2} \cdots & \cdots & \xi^{e^{(2)}\delta' \operatorname{Ind} r_\nu} \xi_1^{e_1^{(2)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_\nu} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^{e^{(\nu)}\delta' \operatorname{Ind} r_1} \xi_1^{e_1^{(\nu)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_1} \cdots & \xi^{e^{(\nu)}\delta' \operatorname{Ind} r_2} \xi_1^{e_1^{(\nu)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_2} \cdots & \cdots & \xi^{e^{(\nu)}\delta' \operatorname{Ind} r_\nu} \xi_1^{e_1^{(\nu)}\delta_1' \operatorname{Ind}_1 r_\nu} \cdots \end{vmatrix},$$

wo $e^{(\alpha)}, e_1^{(\alpha)}, e_2^{(\alpha)}, \ldots$ für $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$ alle statthaften ν Combinationen der Grössen $e, e_1, e_2, \ldots$ darstellen, hat die Eigenschaft, bis auf's Vorzeichen unverändert zu bleiben, wenn man an die Stelle von $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ respective [106 $\xi^{-1}, \xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \ldots$ setzt. Nach dieser Veränderung heisse die Determinante J_1, so ist leicht zu zeigen, dass $J.J_1 = \pm J^2 = \nu^\nu$. — Man bilde nunmehr das Product der Determinanten J und E, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (6.):

$$J.E = \pm J.\Pi f_{e, e_1, e_2, \ldots}(\omega_{e, e_1, e_2, \ldots}),$$

oder

$$E = \pm \Pi f_{e, e_1, \ldots}(\omega_{e, e_1, \ldots}), \tag{8.}$$

wo das Product den Zähler des Ausdruckes A in No. 6 bedeutet. —

Der Ausdruck für die Klassenanzahl wird in unserem Falle:

$$H = (-1)^{\frac{1}{2}\nu - 1} \cdot \frac{A.E.s.P}{2^{\frac{1}{2}\nu - 1 - \zeta}} \cdot \frac{Q}{\Delta}. \tag{9.}$$

Das Product $\Pi f_{e, e_1, \ldots}(\omega_{e, e_1, \ldots})$ lässt sich vermittelst der Gleichung (6.) in No. 6 in der Form $p^{\varepsilon} p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \ldots$ darstellen, und es ist nicht schwer zu zeigen, dass $\Pi n_{e, e_1, \ldots}$, der Nenner des Ausdruckes A, gleich ist $p^{2\varepsilon} . p_1^{2\varepsilon_1} . p_2^{2\varepsilon_2} \ldots$. Hieraus ergiebt sich, dass

$$A = \frac{1}{\Pi f_{e, e_1, \ldots}(\omega_{e, e_1, \ldots})} = \frac{1}{\pm E}, \quad \text{d. h. } AE = \pm 1.$$

Der Ausdruck (9.) wird daher, abgesehen vom Vorzeichen,

$$H = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu} . s.P}{2^{\frac{1}{2}\nu - 1 - \zeta}} \cdot \frac{Q}{\Delta}. \tag{10.}$$

Ist

$$\text{II.}\quad \tau \text{ gerade und } x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1, \mod n,$$

so findet man auf ähnliche Weise, abgesehen vom Vorzeichen,

$$H = 2 \cdot \frac{Q'}{\Delta'}. \tag{11.}$$

9.

Zum Schlusse sei es mir erlaubt auf die Beweise zweier auf die Perioden π_r bezüglichen Sätze, welche in der vierten Nummer meiner mehrerwähnten Arbeit enthalten sind, hier noch einmal zurückzukommen. Ich werde mich hierbei den daselbst angenommenen Bezeichnungen anschliessen. — Es wird zuerst folgender Hülfssatz bewiesen:

Es sei

$$\sum_a X_a \left(u_\varepsilon^{q^a}, q^{c_\varepsilon}\right) = 0, \tag{1.}$$

wo $\left(u_\varepsilon^{q^a}, q^{c_\varepsilon}\right)$ die daselbst in No. 3 festgesetzte Bedeutung hat, und die Summation sich auf solche Werthe a bezieht, die incongruent sind nach dem 107] Modul c_ε, ferner werde vorausgesetzt, dass c_ε nicht durch p_ε theilbar sei, und dass die Grössen X_a rationale, ganze Functionen der Wurzeln der Gleichung $x^{n_\varepsilon} = 1$ $\left(\text{wo } n = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} \text{ gesetzt ist}\right)$, mit ganzzahligen Coefficienten sind, so ist $X_a = 0$, für alle Werthe von a, auf die sich die Summation bezieht.

Denn reducirt man die Perioden $\left(u_\varepsilon^{q^a}, q^{c_\varepsilon}\right)$ mit Hülfe der Gleichung, welcher die primitiven Wurzeln der Gleichung $u^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} = 1$ genügen, derartig, dass im reducirten Ausdrucke R_a die Exponenten von u_ε kleiner als $p_\varepsilon^{m_\varepsilon - 1}(p_\varepsilon - 1)$ sind, so haben in der Gleichung

$$\sum_a X_a R_a = 0 \tag{2.}$$

die verschiedenen Grössen R_a keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε.

Denn man hat (s. No. 2 der Arbeit)

$$R_a = \chi(u_\varepsilon) - \left[u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon - 1}(p_\varepsilon - 2)} + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon - 1}(p_\varepsilon - 3)} + \cdots + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon - 1}} + 1\right]\psi(u_\varepsilon), \tag{3.}$$

worin $\chi(u_\varepsilon)$ nur Potenzen von u_ε enthält, deren Exponenten kleiner als $p_\varepsilon^{m_\varepsilon - 1}(p_\varepsilon - 1)$, und $\psi(u_\varepsilon)$ nur Potenzen von u_ε, deren Exponenten kleiner als

$p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}$. — Ebenso ist, wenn $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ verschieden:

$$(4.)\quad R_{\mathfrak{a}'} = \chi'(u_\varepsilon) - \left[u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-2)} + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-3)} + \cdots + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}} + 1\right]\psi'(u_\varepsilon),$$

wo $\chi'(u_\varepsilon)$ und $\psi'(u_\varepsilon)$ respective eine ähnliche Bedeutung haben, wie $\chi(u_\varepsilon)$ und $\psi(u_\varepsilon)$. — Aus den am Schlusse der No. 2 der erwähnten Arbeit angestellten Betrachtungen ergiebt sich, wenn man der Kürze halber

$$u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-2)} + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-3)} + \cdots + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}} + 1 = C$$

setzt, dass $\chi(u_\varepsilon)$ mit $\chi'(u_\varepsilon)$ und $C\psi(u_\varepsilon)$ mit $C\psi'(u_\varepsilon)$ keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε enthalten. Aber ebenso wenig kann $\chi(u_\varepsilon)$ mit $C\psi'(u_\varepsilon)$ oder $C\psi(u_\varepsilon)$ mit $\chi'(u_\varepsilon)$ eine solche Potenz gemeinschaftlich haben. Denn damit z. B. $C\psi(u_\varepsilon)$ mit $\chi'(u_\varepsilon)$ eine gemeinschaftliche Potenz enthielte, müsste eine Gleichung folgender Art bestehen:

$$(5.)\quad u_\varepsilon^{q^{\mathfrak{a}}\, q^{xc_\varepsilon} - yp_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}} = u_\varepsilon^{q^{\mathfrak{a}'}\cdot q^{zc_\varepsilon}},$$

wo x, y, z ganze Zahlen sind, d. h. es müsste $q^{\mathfrak{a}+xc_\varepsilon} \equiv q^{\mathfrak{a}'+zc_\varepsilon}$, mod. $p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}$ sein, daher auch $q^{p_\varepsilon(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')+p_\varepsilon(x-z)c_\varepsilon} \equiv 1$, mod. $p_\varepsilon^{m_\varepsilon}$. Hieraus folgt [108

$$(6.)\quad (\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')p_\varepsilon + (x-z)c_\varepsilon \cdot p_\varepsilon \equiv 0, \quad \text{mod. } \lambda_\varepsilon,$$

wo λ_ε die in der erwähnten Arbeit No. 3 ihm beigelegte Bedeutung hat. Aus (6.) folgt $(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')p_\varepsilon \equiv 0$, mod. c_ε, oder, da c_ε nicht durch p_ε theilbar ist, $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}'$, mod. c_ε, gegen die Voraussetzung. —

Da nun bewiesen ist, dass in der Gleichung (2.) die Grössen $R_{\mathfrak{a}}$ für Werthe von $\mathfrak{a}$, die incongruent sind mod. c_ε, keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε enthalten, so müssen nach einem Satze von KRONECKER (LIOUVILLES Journal, Bd. 19[1]) die Grössen $X_{\mathfrak{a}}$ für alle Werthe von $\mathfrak{a}$, auf welche sich die Summation in (1.) bezieht, verschwinden.

Mit Hülfe dieses Lemma wird der Satz am Schlusse meiner erwähnten Arbeit, der die Bedingungen für das Verschwinden einer Periode enthält, folgendermassen bewiesen.

Die Allgemeinheit des Beweises wird nicht beeinträchtigt, wenn wir der Übersichtlichkeit wegen $n = p_0^{m_0} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}$ annehmen, und zwar sei $p_0 > p_1 > p_2 > p_3$.

[1]) Kroneckers Werke, Bd. I (1895), S. 75. Sch.

Ist ε_0 primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_0} = 1$, wo $n_0 = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}$, so folgt aus den Gleichungen (3.) und (4.) der No. 3 der a. A.

$$\sum_0^{c_0-1} {}_\alpha (\varepsilon_0^{q^\alpha}, q^{c_0})(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0}) = \pi_1, \tag{7.}$$

Soll daher π_1 verschwinden, so muss nach dem obigen Lemma entweder $(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0}) = 0$, oder $(\varepsilon_0^{q^\alpha}, q^{c_0}) = 0$ sein, und zwar nach einem Satze in No. 1 der a. A. für jeden Werth von α. Findet ersteres nicht statt, so hat man also die Gleichung

$$(\varepsilon_0^{q^\alpha}, q^{c_0}) = 0. \tag{8.}$$

Es sei der grösste gemeinschaftliche Theiler von c_0 und λ_1 gleich β; von c_0 oder λ_0 und (λ_2, λ_3) gleich γ; von $\frac{\lambda_1}{\beta}$ und $\frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma}$ gleich δ, so ist die Gleichung (8.) gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\sum_0^{\delta-1} {}_\alpha \left(\varepsilon_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right)\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = 0. \tag{9.}$$

Diese wird ebenso wie die Gleichung (7.) hergeleitet, wenn $n_{01} = p_2^{m_2} p_3^{m_3}$ und ε_{01} primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_{01}} = 1$ ist. Aus derselben folgt nach dem obigen Lemma, dass entweder $\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = 0$, oder $\left(\varepsilon_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = 0$, für 109] alle Werthe von α. — Nun aber ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_1 und $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ gleich dem von λ_1 und $\lambda_0 \frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma}$, gleich dem von $\frac{\lambda_1}{\beta\delta} \cdot \beta\delta$ und $\frac{\lambda_0}{\beta} \cdot \beta\delta \cdot \frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma\delta}$, gleich $\beta\delta$. Aber andererseits ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_1 und $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ gleich c_1, demnach ist $c_1 = \beta\delta$. Es ist aber $q^{c_0\delta} = q^{\frac{c_0}{\beta} \cdot \beta\delta}$, und der Exponent, zu dem q^{c_0} (mod. $p_1^{m_1}$) gehört, gleich $\frac{\lambda_1}{\beta} = \frac{\lambda_1}{\beta\delta} \cdot \delta$, daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 der a. A.

$$\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = \left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{c_1}\right).$$

Ferner ist $\frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma}$ der Exponent, zu dem q^{c_0} (mod. n_{01}) gehört, und der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma} \cdot \gamma$ und $\frac{\lambda_0}{\beta} \cdot \frac{\lambda_1}{\beta} \cdot \beta$ gleich dem von $\frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma} \cdot \gamma$ und $\frac{\lambda_0}{\gamma} \cdot \frac{\lambda_1}{\beta} \cdot \gamma$, gleich dem von $\frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma\delta} \cdot \gamma\delta$ und $\frac{\lambda_0}{\gamma} \cdot \frac{\lambda_1}{\beta\delta} \cdot \gamma\delta$, gleich $\gamma\delta$. Bezeichnet man also den grössten gemeinschaftlichen Theiler von (λ_0, λ_1) und (λ_2, λ_3) mit

r_{01}, so hat man $r_{01} = \gamma\delta$. Ferner ist

$$q^{\delta c_0} = q^{\frac{c_0}{\gamma}\cdot\gamma\delta} = q^{\frac{c_0}{\gamma}\cdot r_{01}}$$

und

$$\frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma} = \frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma\delta}\cdot\gamma\delta = \frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma\delta}\cdot r_{01}.$$

Daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 der a. A. $\left(z_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = \left(z_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{r_{01}}\right)$. — Mithin ist entweder $\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{c_1}\right) = 0$, oder

$$\left(z_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{r_{01}}\right) = 0. \tag{10.}$$

Es sei nunmehr der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und r_{01} gleich β', so gehört $q^{r_{01}}$ (mod. $p_2^{m_2}$) zum Exponenten $\frac{\lambda_2}{\beta'}$; und wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und r_{01} gleich γ' ist, so gehört $q^{r_{01}}$ (mod. $p_2^{m_2}$) zum Exponenten $\frac{\lambda_2}{\gamma'}$. Endlich sei der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\frac{\lambda_2}{\beta'}$ und $\frac{\lambda_2}{\gamma'}$ gleich δ', so ist die Gleichung (10.) gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\sum_0^{\delta'-1}{}_\alpha \left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right)\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = 0. \tag{11.}$$

Hieraus folgt nach dem obigen Lemma, dass entweder $\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = 0$ oder $\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = 0$, für alle Werthe von α. — Nun aber ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und r_{01} gleich dem von (λ_0, λ_1) und λ_2; ferner der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und r_{01} gleich dem [110 von λ_2 und (λ_0, λ_1); daher ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ gleich dem von λ_2 und $(\lambda_0, \lambda_1)\cdot\frac{\lambda_2}{\gamma'}$, gleich dem von $\frac{\lambda_2}{\beta'}\cdot\beta'$ und $\frac{(\lambda_0, \lambda_1)}{\beta'}\cdot\frac{\lambda_2}{\gamma'}\cdot\beta'$, gleich dem von $\frac{\lambda_2}{\beta'\delta'}\cdot\beta'\delta'$ und $\frac{(\lambda_0, \lambda_1)}{\beta'}\cdot\frac{\lambda_2}{\gamma'\delta'}\cdot\beta'\delta'$, gleich $\beta'\delta'$; daher ist $c_2 = \beta'\delta'$. Nun ist

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\beta'\delta'}\cdot\beta'\delta', \qquad r_{01} = \frac{r_{01}}{\beta'}\cdot\beta', \qquad q^{\delta' r_{01}} = q^{\beta'\delta'\cdot\frac{r_{01}}{\beta'}} = q^{\frac{r_{01}}{\beta'}\cdot c_2}.$$

Daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 der a. A.

$$\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = \left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{c_2}\right).$$

Ferner ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ gleich

dem von λ_2 und $(\lambda_0, \lambda_1)\cdot\frac{\lambda_2}{\beta'}$, gleich dem von $\frac{\lambda_2}{\gamma'}\cdot\gamma'$ und $\frac{(\lambda_0,\lambda_1)}{\gamma'}\cdot\frac{\lambda_2}{\beta'}\cdot\gamma'$, gleich dem von $\frac{\lambda_2}{\gamma'\delta'}\cdot\gamma'\delta'$ und $\frac{(\lambda_0,\lambda_1)}{\gamma'}\cdot\frac{\lambda_2}{\beta'\delta'}\cdot\gamma'\delta'$, gleich $\gamma'\delta'$, daher ist $c_2 = \gamma'\delta'$. Nun aber ist

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\gamma'\delta'}\cdot\gamma'\delta', \qquad r_{01} = \frac{r_{01}}{\gamma'}\cdot\gamma', \qquad q^{\delta' r_{01}} = q^{\gamma'\delta'\cdot\frac{r_{01}}{\gamma'}} = q^{\frac{r_{01}}{\gamma'}\cdot c_2},$$

daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 der a. A. $\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = \left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{c_2}\right)$.

Damit also π_1 verschwinde, muss eine der folgenden vier Gleichungen erfüllt werden

$$(12.) \qquad (u_0, q^{c_0}) = 0, \quad (u_1, q^{c_1}) = 0, \quad (u_2, q^{c_2}) = 0, \quad (u_3, q^{c_3}) = 0,$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar der am Schlusse der a. A. aufgestellte Satz. —

In der No. 4 der a. A. war ferner zu zeigen, dass zwei formal verschiedene Perioden derselben Gruppe nur dann gleich sein können, wenn sie verschwinden. — Man kann sich beim Beweise offenbar auf primitive Perioden beschränken (s. d. a. A.). Es seien π_1 und π_r irgend zwei primitive Perioden, und es werde angenommen, dass

$$(13.) \qquad \pi_1 = \pi_r.$$

Nach der Gleichung (7.) ist diese Gleichung identisch mit der folgenden:

$$(14.) \qquad \sum_0^{c_0-1}{}_{\alpha}\left[(z_0^{q^\alpha}, q^{c_0})(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0}) - (z_0^{rq^\alpha}, q^{c_0})(u_0^{rq^\alpha}, q^{c_0})\right] = 0.$$

Aus den im Beweise des obigen Lemma angestellten Betrachtungen geht her- III] vor, dass, wenn man $(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0})$ und $(u_0^{rq^\alpha}, q^{c_0})$ so reducirt, dass nur niedrigere Potenzen von u_0 als die $p_0^{m_0-1}(p_0-1)^{te}$ übrig bleiben, und die reducirten Ausdrücke respective mit R_α und S_α bezeichnet, für zwei verschiedene Werthe von α weder zwei der Grössen R noch zwei der Grössen S unter sich eine gemeinschaftliche Potenz von u_0 enthalten. Hätte nun auch kein R mit einem S eine Potenz von u_0 gemeinschaftlich, so erforderte die Irreductibilität der Gleichung der primitiven Wurzeln im erweiterten Sinne (s. die o. a. Abhandlung von KRONECKER), dass die aus den Wurzeln der Gleichung $x^{n_0} = 1$ gebildeten Perioden (z_0, q^{c_0}) verschwinden, wodurch auch nach Gleichung (7.) $\pi_1 = 0$ wird. Enthielte aber eine der Grössen R mit einer der Grössen S

eine gemeinschaftliche Potenz von u_0, so käme diese weder in einem anderen R noch in einem anderen S vor, daher müssten in Folge der Irreductibilität zwei mit z_0 gebildete Perioden einander gleich sein. Geht man von dieser letzteren Gleichheit aus und verfährt mit derselben wie mit der Gleichung (13.), so findet man, dass entweder eine mit z_{01} gebildete Periode, also auch π_1 verschwindet, oder dass zwei mit z_{01} gebildete Perioden einander gleich werden. Fährt man so fort, so ergiebt sich schliesslich, dass die Gleichung (13.) nur bestehen kann, wenn die primitiven Perioden verschwinden.

Berlin, im Februar 1864.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 75, Zeile 4 c_2 statt c,

„ 98, „ 7 $u_{\frac{1}{2}\nu}$ statt $u^{u_{\frac{1}{2}\nu}}$,

„ 105, „ 10 C statt C_2;

„ 106, „ 12 v. u. vor dem Worte »für« wurde = 0 eingeschoben,

„ 107, „ 3 v. u. wurde ein auf »No. 3« folgendes »in« unterdrückt;

„ 68, „ 13 und 10 v. u.,

„ 80, Gleichung (2.),

„ 93, Zeile 13, 12, 10 v. u.,

„ 94, Gleichung (2.) und (2a.)

wurden die in der »Berichtigung«, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 65, S. 111, und dem »Druckfehlerverzeichnisse«, ebenda S. IV, vorgeschriebenen Änderungen angebracht. SCH.

V.

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT VERÄNDERLICHEN COEFFICIENTEN.

(Jahresbericht über die städtische Gewerbeschule zu Berlin, Ostern 1865. Berlin, Buchdruckerei von Gustav Lange, 1865.)

Nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft stellt man sich [3 in der Theorie der Differentialgleichungen nicht sowohl die Aufgabe, eine gegebene Differentialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, als vielmehr die, den Verlauf ihrer Integrale für alle Punkte der Ebene, d. h. für alle Werthe der unbeschränkt Veränderlichen aus der Differentialgleichung selbst abzuleiten. Die Analysis lehrt eine Function determiniren, wenn man das Verhalten derselben in der Umgebung derjenigen Punkte ermitteln kann, für welche sie unstetig oder mehrdeutig wird. Es ist daher die wesentliche Aufgabe bei der Integration einer gegebenen Differentialgleichung, die Lage dieser Punkte und das Verhalten der Integrale in deren Umgebung festzustellen. — In diesem Sinne haben Briot und Bouquet im Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, die Differentialgleichungen der Form $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ behandelt, wenn $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ eine ganze Function von y und $\frac{dy}{dx}$ bedeutet. — In den Abhandlungen der Societät der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1857[1]) hat Riemann die Differentialgleichung hergeleitet, welcher die durch die Gausssche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen genügen; und man kann umgekehrt die dortige Abhandlung als eine solche ansehen, wodurch

---

[1]) Riemanns Werke, (II. Aufl. 1892), S. 67. Sch.

die Integration jener Differentialgleichung geleistet ist. — Im Folgenden erlaube ich mir einige Ergebnisse einer über lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten angestellten Untersuchung mitzutheilen, zu welcher ich durch das Studium der RIEMANNschen Abhandlung veranlasst wurde. Es ergab sich hierbei ein für alle linearen Differentialgleichungen gültiger Satz (No. 3), der naturgemäss ein Problem herbeiführt, welches in No. 4 und No. 5 behandelt ist, ein Problem, durch dessen Lösung eine gewisse Klasse linearer Differentialgleichungen abgeschlossen wird. Zu dieser Klasse gehört als specieller Fall die von RIEMANN in der ebenerwähnten Abhandlung erhaltene Differentialgleichung, so dass die Eigenschaften der durch die GAUSSsche Reihe darstellbaren Functionen, von denen RIEMANN ausgeht, auch von einem anderen Gesichtspunkte aus, als denselben characteristische erkannt werden (No. 6). — Es ist auch von Interesse, dass zu derselben Klasse von Differentialgleichungen auch diejenigen linearen Differentialgleichungen gehören, denen nur algebraische Functionen genügen (No. 7). — Im Sommer 1863 hielt WEIERSTRASS eine Vorlesung über ABELsche Functionen, worin er als Einleitung die Fundamente der Theorie der linearen Differentialgleichungen entwickelte. Dieser Vorlesung werde ich mich in der Art der begrifflichen Feststellung der Integrale einer linearen Differentialgleichung, wie sie in No. 1 angedeutet ist, im Wesentlichen anschliessen. — Ich bemerke schliesslich, dass ich mich im Folgenden auf solche lineare Differentialgleichungen beschränke, welche kein von der abhängigen Variabeln und ihren Ableitungen freies Glied enthalten.

4] 1.

Es sei:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y \tag{1.}$$

eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, deren Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ Functionen von x sind, die innerhalb eines einfach zusammenhangenden Flächentheils T der x-Ebene nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, im Übrigen aber innerhalb dieser Fläche eindeutig und continuirlich sind. Diejenigen Punkte innerhalb T, für welche eine oder mehrere der Functionen p unstetig sind, werden wir im Folgenden, nach dem Vorgange von WEIERSTRASS, singuläre Punkte nennen. — Es sei ferner x_0

irgend ein Punkt in T und um denselben ein Kreis beschrieben, welcher sich bis zum nächsten singulären Punkte erstreckt, so bezeichnen wir das durch diesen Kreis abgegrenzte Flächengebiet, ebenfalls nach WEIERSTRASS, als die Umgebung des Punktes x_0.

Ist nun x_0 ein Punkt, der nicht zu den singulären gehört, so giebt es innerhalb T eine in der Umgebung desselben überall endliche, eindeutige und continuirliche Function y, welche der Differentialgleichung (1.) genügt und so beschaffen ist, dass $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen. Dieses lässt sich folgendermassen beweisen:

In der Umgebung von x_0 innerhalb T seien die Maxima der Moduln der Functionen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ resp. $M_1, M_2, \ldots, M_m$. Ist a_1 der dem Punkte x_0 zunächst liegende singuläre Punkt, und setzt man $\mathrm{mod}(a_1 - x_0) = r$, und

$$\frac{M_1}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_2, \quad \ldots, \quad \frac{M_m}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_m,$$

so ist bekanntlich (s. BRIOT et BOUQUET, Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, pag. 137) für jedes ganzzahlige α

$$\mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_1}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_1}{dx^\alpha}\right)_0, \quad \mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_2}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_2}{dx^\alpha}\right)_0, \quad \ldots, \quad \mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_m}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_m}{dx^\alpha}\right)_0,$$

wo wir mit $(f(x))_0$ den Werth einer Function $f(x)$ für $x = x_0$ bezeichnen.

Die sämmtlichen Ableitungen einer der Differentialgleichung (1.) genügenden Function y lassen sich auf die Form bringen:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \mathfrak{A}_{\alpha 1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \mathfrak{A}_{\alpha 2}(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \mathfrak{A}_{\alpha m}(x)y, \tag{2.}$$

worin die Grössen $\mathfrak{A}$ sich aus den Grössen p und deren Ableitungen durch die Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Man bilde nunmehr die Differentialgleichung

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \varphi_1\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \varphi_2\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \varphi_m u, \tag{3.}$$

so lassen sich die sämmtlichen Ableitungen einer derselben genügenden [5 Function u in der ähnlichen Form

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \mathfrak{B}_{\alpha 1}(x)\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \mathfrak{B}_{\alpha 2}(x)\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \mathfrak{B}_{\alpha m}(x)u \tag{4.}$$

darstellen. Die Grössen $\mathfrak{B}$ werden aus den entsprechenden Grössen $\mathfrak{A}$ abgeleitet, indem man an die Stelle einer jeden Function p und ihrer Ableitungen die entsprechende Function φ und ihre entsprechenden Ableitungen setzt. Hieraus folgt, dass

$$\mathfrak{B}_{a1}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{a1}(x_0), \quad \mathfrak{B}_{a2}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{a2}(x_0), \quad \ldots, \quad \mathfrak{B}_{am}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{am}(x_0).$$

Wenn sich daher eine in der Umgebung von x_0 eindeutige, continuirliche und endliche Function u bestimmen lässt, derart, dass sie der Differentialgleichung (3.) genügt, und dass für $x = x_0$ die Grössen $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ beliebig gegebene positive Werthe annehmen, so existirt auch eine in der Umgebung von x_0 eindeutige, continuirliche und endliche Function y von der Beschaffenheit, dass sie der Differentialgleichung (1.) genügt, und dass

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen.

Setzt man $\frac{x-x_0}{r} = z$, so lässt sich die Differentialgleichung (3.) auf die Gestalt bringen:

$$(3a.) \qquad (1-z)\frac{d^m u}{dz^m} = M_1 r \frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + M_2 r^2 \frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + M_m r^m u.$$

Versucht man dieser Differentialgleichung durch eine Reihe $u = \sum_0^\infty b_a z^a$ zu genügen, so findet man für jeden ganzzahligen Werth von k die Relation:

$$(5.) \quad \begin{cases} (m+k)(m+k-1)\ldots(k+1).b_{m+k} = (m+k-1)(m+k-2)\ldots(k+1)[k+M_1 r].b_{m+k-1} \\ \qquad + M_2 r^2.(m+k-2)(m+k-3)\ldots(k+1).b_{m+k-2} + \cdots + M_m r^m b_k. \end{cases}$$

Nimmt man $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ positiv an, so sind daher alle Grössen b positiv, und es ist $b_{m+k} = \frac{k+M_1 r}{m+k} \cdot b_{m+k-1} + \psi$, wo ψ eine positive Grösse ist.

Man kann annehmen, dass $M_1 r > m$. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so bleiben alle vorhergehenden Schlüsse a potiori gültig, wenn man M_1 so gross annimmt, dass dieser Bedingung Genüge geschieht.

Daher ist $b_{m+k} > b_{m+k-1}$ für jedes ganzzahlige k, d. h. die Grössen b wachsen mit ihrem Index, und deswegen ist $\frac{b_r}{b_s}$ nicht unendlich, wenn $r < s$, für alle Werthe von r und s.

6] Dividirt man die Gleichung (5.) durch

$$(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1).b_{m+k-1},$$

so erhält man

$$\frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = \frac{k+M_1 r}{m+k} + \frac{M_2 r^2}{(m+k)(m+k-1)} \cdot \frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}} + \cdots + \frac{M_m r^m}{(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)} \cdot \frac{b_k}{b_{m+k-1}}.$$

Hieraus folgt

$$\lim \frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = 1 \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

mithin ist

$$\lim \frac{b_{m+k} \cdot z^{m+k}}{b_{m+k-1} \cdot z^{m+k-1}} = z \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

d. h. die Reihe $u = \sum_0^\infty b_a z^a$ ist convergent, so lange der Modul von z kleiner ist als 1; oder die Differentialgleichung (3.) hat innerhalb T ein in der Umgebung von x_0 gültiges Integral der Form $\sum_0^\infty b_a (x-x_0)^a$, derart dass $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ oder auch $u_0, \left(\frac{du}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right)_0$ beliebige positive Werthe erhalten können. —

Hiermit ist die Existenz einer Function y von der oben angegebenen Beschaffenheit erwiesen. —

Umgiebt man jeden der singulären Punkte mit einem beliebig kleinen endlichen Kreise, so ist der übrig bleibende Theil der Fläche T, der T' heissen möge, eine mehrfach zusammenhangende Fläche. Ziehen wir von jedem Kreise aus eine sich selbst und die übrigen nicht schneidende Linie, z. B. eine gerade Linie, bis zur Begrenzung von T, so wird die Fläche T' durch diese Querschnitte in eine einfach zusammenhangende T'' zerlegt. Innerhalb dieser Fläche lässt sich die eben definirte Function y nur auf eine Weise fortsetzen, so dass man eine innerhalb der Fläche T'' eindeutige, continuirliche und endliche Function y erhält, welche der Differentialgleichung (1.) genügt und so beschaffen ist, dass für einen Punkt x_0 dieser Fläche

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

beliebig gegebene Werthe annehmen.

Geht man in T' von x_0 aus und kehrt nach einer oder mehrmaliger Überschreitung eines oder mehrerer Querschnitte nach x_0 zurück, so erhalten y und dessen Ableitungen im Allgemeinen von den ursprünglichen verschiedene Werthe. Mit diesen als Anfangswerthen ist innerhalb T'' eine im Allgemeinen

von y verschiedene Function bestimmt. Auf diese Weise erlangt man im Allgemeinen unendlich viele solcher Functionen. Denkt man sich die Fläche T' von unendlich vielen Blättern bedeckt, alle mit denselben Querschnitten, und jedem dieser Blätter eine solche Function (einen Zweig) zuertheilt, so hangen diese Blätter längs der Querschnitte so zusammen, dass wenn x in der Fläche T' einen Querschnitt überschreitet, sich ein Zweig continuirlich in einen anderen der unendlich vielen Zweige fortsetzt, da die Werthe der Functionen in T'' zu beiden Seiten eines Querschnitts im Allgemeinen von einander verschieden sind.

Hiermit ist der Verlauf eines Integrals der Differentialgleichung (1.) inner-
7] halb T' vollständig bestimmt, wenn in einem Punkte dieser Fläche für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ beliebig gegebene Anfangswerthe festgesetzt sind.

2.

Wenn man im Punkte x_0 für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ m verschiedene Werthsysteme festsetzt, so erhält man m particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Wir wählen, was offenbar immer möglich ist, diese Werthsysteme so, dass die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m \end{vmatrix}$$

für $x = x_0$ nicht verschwindet. Alsdann kann jedes Integral η, welches dadurch bestimmt ist, dass $\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d^2\eta}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ resp. die beliebig gegebenen Anfangswerthe $\eta_0, \eta_0', \eta_0'', \ldots, \eta_0^{(m-1)}$ annehmen, als lineare homogene Function von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ mit constanten Coefficienten dargestellt werden, also

$$\eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m, \tag{1.}$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Constanten sind.

Denn unter der gemachten Voraussetzung liefert das System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= c_1(y_1)_0 + c_2(y_2)_0 + \cdots + c_m(y_m)_0,\\
\eta_0' &= c_1\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + c_2\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_0 + \cdots + c_m\left(\frac{dy_m}{dx}\right)_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_0^{(m-1)} &= c_1\left(\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}\right)_0 + c_2\left(\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}\right)_0 + \cdots + c_m\left(\frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}\right)_0
\end{aligned}$$

für $c_1, c_2, \ldots, c_m$ endliche und bestimmte Werthe; und wenn die Function η nebst ihren $m-1$ ersten Ableitungen mit der Function

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

und deren entsprechenden Ableitungen für $x = x_0$ übereinstimmt, so findet nach der vorigen Nummer diese Übereinstimmung für alle Werthe von x statt.

Ein solches System von Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$, für welches die Determinante D in einem innerhalb T' liegenden Punkte nicht verschwindet, durch welches sich also alle particulären Integrale in der Form der Gleichung [8 (1.) ausdrücken lassen, werde ich im Folgenden ein Fundamentalsystem, und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dessen Elemente nennen.

Jeder Zweig einer Function y kann als ein particuläres Integral innerhalb T'' mit bestimmten Anfangswerthen angesehen werden, und lässt sich daher als lineare homogene Function von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ mit constanten Coefficienten darstellen.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Zwischen je $m+1$ Zweigen derselben Function y findet eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten statt.

Denn es seien $y, y', y'', \ldots, y^{(m)}$ $m+1$ solche Zweige, so hat man folgende $m+1$ lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,\\
y' &= c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_m' y_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(m)} &= c_1^{(m)} y_1 + c_2^{(m)} y_2 + \cdots + c_m^{(m)} y_m,
\end{aligned}$$

wo die Grössen c sämmtlich bestimmte Constanten sind. Eliminirt man aus denselben die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_m$, so erhält man als Eliminationsresultante eine lineare homogene Gleichung zwischen $y, y', \ldots, y^{(m)}$ mit constanten Coefficienten.

Um einzusehen, dass bei der Bestimmung einer Function, welche der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer genügt, der Ausgangspunkt x_0 gleichgültig sei, muss noch gezeigt werden, dass

die Determinante D eines Fundamentalsystems für die ganze Fläche T' endlich und von Null verschieden ist.

Aus den m Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{d^m y_1}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_1, \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_m \end{cases}$$

folgt:

$$D.p_1 = D^1,$$

wo D^1 aus D erhalten wird, wenn man $\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}$ $\frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \cdots, \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}$ resp. durch $\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \cdots, \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt. Bekanntlich ist D^1 die Ableitung von D, daher ist

$$\frac{d \log D}{dx} = p_1$$

oder

$$(3.)\quad D = C.e^{\int p_1 dx},$$

wo C eine Constante bedeutet, die durch die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 9] und ihren Ableitungen für $x = x_0$ bestimmt und der Voraussetzung gemäss von Null verschieden ist. Da $\int p_1 dx$ nur für einen singulären Punkt unendlich werden kann, so folgt, dass $e^{\int p_1 dx}$ und folglich auch D innerhalb T'' überall endlich und von Null verschieden ist.

Hieraus folgt auch, dass wenn die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem bilden, sie noch ein solches System ausmachen, wenn man jede derselben auf demselben Wege um singuläre Punkte herum bis zu dem Punkte x_0 zurück fortgesetzt hat.

Die gegebene Definition eines Fundamentalsystems kann auch durch die folgende ersetzt werden:

Ein System von Integralen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ bildet ein Fundamentalsystem,

wenn eine Gleichung der Form

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_m\eta_m = 0$$

für keine endlichen bestimmten Werthe der Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Statt haben kann.

Denn es sei $y_1, y_2, \ldots, y_m$ irgend ein Fundamentalsystem (im Sinne der ersten Definition), so darf man setzen:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= f_{11}y_1 + f_{12}y_2 + \cdots + f_{1m}y_m,\\
\eta_2 &= f_{21}y_1 + f_{22}y_2 + \cdots + f_{2m}y_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_m &= f_{m1}y_1 + f_{m2}y_2 + \cdots + f_{mm}y_m,
\end{aligned}$$

wo die Grössen f Constanten sind. — Die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m}\\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{vmatrix}$$

darf nicht verschwinden, da sonst zwischen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt finden müsste. Daher lassen sich $y_1, y_2, \ldots, y_m$ und folglich alle particulären Integrale der linearen Differentialgleichung als lineare homogene Functionen der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ mit constanten Coefficienten darstellen. Dieses erfordert aber, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_1}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_1\\ \frac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_2}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_m}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_m \end{vmatrix}$$

innerhalb T' überall endlich und von Null verschieden ist. Hierdurch ist die Übereinstimmung der beiden Definitionen erwiesen.

Bekanntlich kann man folgendermassen verfahren, um m particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y, \tag{4.}$$

10] zu erhalten. Es sei y_1 ein particuläres Integral derselben, welches nicht identisch verschwindet, und man setze

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

so genügt z einer linearen Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} = q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + q_2 \frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \cdots + q_{m-1} z. \tag{5.}$$

Es sei z_1 ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$y_2 = y_1 \int z_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (4.). Man setze

$$z = z_1 \int u\, dx,$$

so genügt u einer linearen Differentialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} = r_1 \frac{d^{m-3}u}{dx^{m-3}} + r_2 \frac{d^{m-4}u}{dx^{m-4}} + \cdots + r_{m-2} u. \tag{6.}$$

Ist u_1 ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$z_2 = z_1 \int u_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (5.) und

$$y_3 = y_1 \int dx\, z_1 \int u_1\, dx$$

ein drittes particuläres Integral der Differentialgleichung (4.). Fährt man so fort, so gelangt man schliesslich zu einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dw}{dx} = tw, \tag{7.}$$

und man erhält auf diese Weise m particuläre Integrale der Differentialgleichung (4.).

Wir behaupten nun,

dass die so erhaltenen particulären Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, nehmen wir $m = 3$ an. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (6.) erster Ordnung. Bildeten nun y_1, y_2, y_3

kein Fundamentalsystem, so hätte man eine Gleichung:

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 dx + c_3 y_1 \int dx z_1 \int u_1 dx = 0, \tag{8.}$$

wo c_1, c_2, c_3 Constanten sind. Da y_1 nicht identisch verschwindet, so darf man diese Gleichung durch y_1 dividiren; differentiirt man alsdann, so erhält man

$$c_2 z_1 + c_3 z_1 \int u_1 dx = 0.$$

Da z_1 nicht identisch verschwindet, so darf man wieder durch z_1 dividiren, und erhält alsdann durch Differentiation

$$c_3 u_1 = 0.$$

Da nun u_1 nicht identisch verschwindet, so hätte man $c_3 = 0$. Es müsste alsdann

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 dx = 0$$

sein. Hieraus würde auf ähnliche Weise folgen $c_2 z_1 = 0$, und daher $c_2 = 0$, [11 und folglich auch $c_1 = 0$.

Es ergiebt sich also, dass die Gleichung (8.) nicht bestehen kann, und dass daher die auf die angegebene Weise ermittelten Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

3.

Nach der No. 1 kommt die Aufgabe der Integration einer linearen Differentialgleichung auf die Untersuchung der Frage hinaus, was aus einer durch die Anfangswerthe in einem Punkte x_0 bestimmten Function wird, wenn man sie innerhalb T' um einen singulären Punkt herum bis zum Punkte x_0 zurück fortsetzt. In dieser Beziehung stellen wir folgenden Satz auf:

Es sei

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y \tag{1.}$$

eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, wo über die Coefficienten p dieselben Voraussetzungen gemacht werden, wie am Anfange der No. 1, und a_1 irgend einer der singulären Punkte, so giebt es stets ein Fundamentalsystem, wovon wenigstens ein Element mit einer Potenz von $x - a_1$ multiplicirt in der Umgebung von a_1 eindeutig wird.

Es sei $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1.), und es mögen nach einem Umlaufe um den singulären Punkt a_1 die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ resp. übergehen in $y_1', y_2', \ldots, y_m'$, so hat man nach der vorigen Nummer ein System von Gleichungen:

$$(2.)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_1' = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdots + \alpha_{1m} y_m, \\ y_2' = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdots + \alpha_{2m} y_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m' = \alpha_{m1} y_1 + \alpha_{m2} y_2 + \cdots + \alpha_{mm} y_m, \end{array}\right.$$

wo die Grössen α_{rs} Constanten sind.

Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ein anderes Fundamentalsystem, welches mit dem Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots, y_m$ durch folgende Gleichungen zusammenhängt:

$$(3.)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1m} y_m, \\ u_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2m} y_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = c_{m1} y_1 + c_{m2} y_2 + \cdots + c_{mm} y_m, \end{array}\right.$$

so müssen die Constanten c_{rs} so beschaffen sein, dass die Determinante Δ der Substitution

$$(S) = \left\{\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{array}\right\}$$

nicht verschwindet, da auch die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ lineare homogene Functionen der Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ mit constanten Coefficienten sind.

Durch einen Umlauf um den singulären Punkt a_1 mögen die Functionen
12] $u_1, u_2, \ldots, u_m$ resp. übergehen in $u_1', u_2', \ldots, u_m'$, so müssen die letzteren Grössen nach der vorigen Nummer lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten von den ersteren sein. Man findet diese Coefficienten, wenn man die Substitution (S) mit der Substitution

$$(\mathfrak{A}) = \left\{\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{array}\right\}$$

und die resultirende Substitution mit der Substitution $(S)^{-1}$, worunter wir die inverse Substitution von (S) verstehen, zusammensetzt. Es werde die nunmehr

resultirende Substitution folgendermassen bezeichnet:

$$\left\{\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mm} \end{matrix}\right\},$$

so wollen wir beweisen, dass man den Gleichungen

$$(4.) \qquad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad \dots, \quad A_{1m} = 0$$

durch solche Werthe der Grössen c_{rs} genügen kann, für welche die Determinante Δ und die Grösse A_{11} von Null verschieden sind.

Es sei die aus der Substitution (S) und der Substitution (A) zusammengesetzte Substitution:

$$\left\{\begin{matrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2m} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{m1} & B_{m2} & B_{m3} & \dots & B_{mm} \end{matrix}\right\},$$

wo

$$B_{rs} = c_{r1}\alpha_{1s} + c_{r2}\alpha_{2s} + \dots + c_{rm}\alpha_{ms}.$$

Ferner ist

$$(S)^{-1} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{11}} & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{21}} & \dots & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{m1}} \\ \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{12}} & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{22}} & \dots & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{m2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{1m}} & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{2m}} & \dots & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{mm}} \end{matrix}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{21}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{22}} + \dots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{2m}}\right\}, \qquad [13$$

$$A_{13} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{31}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{32}} + \dots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{3m}}\right\},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_{1m} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{m1}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{m2}} + \dots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{mm}}\right\},$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{11}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{12}} + \dots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{1m}}\right\},$$

oder auch

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ c_{41} & c_{42} & \dots & c_{4m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

etc.

$$A_{1m} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1\,1} & c_{m-1\,2} & \dots & c_{m-1\,m} \\ B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \end{vmatrix},$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante δ der Substitution (A) ist von Null verschieden, da nach der vorigen Nummer die Grössen $y_1', y_2', \dots, y_m'$ ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden. — Man setze nun

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} B_{11} &= c_{11}\alpha_{11} + c_{12}\alpha_{21} + \dots + c_{1m}\alpha_{m1} = w \cdot c_{11}, \\ B_{12} &= c_{11}\alpha_{12} + c_{12}\alpha_{22} + \dots + c_{1m}\alpha_{m2} = w \cdot c_{12}, \\ B_{13} &= c_{11}\alpha_{13} + c_{12}\alpha_{23} + \dots + c_{1m}\alpha_{m3} = w \cdot c_{13}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{1m} &= c_{11}\alpha_{1m} + c_{12}\alpha_{2m} + \dots + c_{1m}\alpha_{mm} = w \cdot c_{1m}, \end{aligned}\right.$$

wo w durch die folgende Gleichung bestimmt ist:

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - w & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - w & \dots & \alpha_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mm} - w \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (6.) liefert immer einen endlichen von Null verschiedenen [14 Werth für w, weil der Coefficient der höchsten Potenz w^m die Einheit ist, und weil das von w unabhängige Glied gleich δ ist.

Ist w gemäss der Gleichung (6.) bestimmt, so kann man bekanntlich den Gleichungen (5.) durch Werthe von $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1m}$ genügen, die nicht alle verschwinden. Durch solche Werthe dieser Grössen verschwinden aber die Determinanten $A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1m}$ identisch, weil in ihnen zwei Reihen sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, während die Determinante A_{11} dadurch in w übergeht. Da aber die Grössen $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1m}$ nicht alle Null sind, und da bei deren Bestimmung die Grössen c_{rs}, in denen $r > 1$ ist, willkürlich geblieben sind, so folgt, dass man über die letzteren so verfügen kann, dass Δ nicht verschwindet. Weil ferner w von Null verschieden ist, hat A_{11} einen bestimmten, von Null verschiedenen Werth.

Setzt man

$$A_{11} = e^{2k\pi\sqrt{-1}}$$

so hat k einen endlichen bestimmten Werth, und von dem Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$ hat das erste Element die Eigenschaft, mit $(x-a_1)^{-k}$ multiplicirt nach einem Umlaufe um den Punkt a_1 den ursprünglichen Werth wieder anzunehmen.

4.

Wir nehmen jetzt an, dass in der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y \tag{1.}$$

die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ in der ganzen unendlichen Ebene eindeutige Functionen von x seien, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ unstetig werden. Ausserdem muss jetzt im Allgemeinen der Punkt ∞ als singulärer Punkt aufgefasst werden.

Die Querschnitte, wodurch die Fläche T' in eine einfach zusammenhängende T'' zerlegt wird, sind jetzt Linien, welche von den um die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ beschriebenen beliebig kleinen aber endlichen Kreisen ausgehend, sich selbst und die übrigen niemals schneidend ins Unendliche verlaufen.

Nach dem in der vorigen Nummer gegebenen Satze lässt sich in Bezug auf jeden singulären Punkt a_i ein Fundamentalsystem bilden, wovon ein Element mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig wird. Im Allgemeinen haben dann die übrigen Elemente des Fundamentalsystems diese Eigenschaft nicht. Wir stellen uns daher die Aufgabe, die Bedingungen dafür aufzusuchen, dass die sämmtlichen Elemente eines Fundamentalsystems in Bezug auf jeden singulären Punkt diese Eigenschaft haben (den Punkt ∞ mit eingerechnet). Wir fügen aber ausserdem noch die Bedingung hinzu, dass diese Elemente in jedem singulären Punkte nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden.

Ein Fundamentalsystem, welches in Bezug auf den singulären Punkt a_i diese Eigenschaft hat, nennen wir das zu diesem Punkte gehörige Fundamentalsystem.

Wir stellen uns also folgende Aufgabe:

Man soll die Beschaffenheit der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ der Differentialgleichung (1.) ermitteln, in dem Falle, dass zu jedem 15] singulären Punkte a_i ein Fundamentalsystem gehört, dessen sämmtliche Elemente jedes mit einer bestimmten Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig und endlich werden, dass ausserdem zum Punkte ∞ ein Fundamentalsystem gehört, dessen sämmtliche Elemente jedes mit einer Potenz von x multiplicirt in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes, d. h. ausserhalb einer die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ umschliessenden Curve eindeutig und endlich werden.

I. Wir setzen für ∞ das Zeichen $a_{\varrho+1}$ und bezeichnen ein Fundamentalsystem, welches zum singulären Punkte a_i gehört, mit $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$. Da die Grössen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$, für jeden Werth von i aus der Zahlenreihe $1, 2, \ldots, \varrho+1$, ein Fundamentalsystem constituiren, so darf man setzen:

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(i)} = b_{11}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{12}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{1m}^{(i)} y_m^{(i)}, \\ y_2^{(i)} = b_{21}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{22}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{2m}^{(i)} y_m^{(i)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{(i)} = b_{m1}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{m2}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{mm}^{(i)} y_m^{(i)}, \end{array} \right.$$

wo die Grössen b Constanten bedeuten.

Wir wollen die Substitution

$$\left\{\begin{array}{cccc} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \dots & b_{1m}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \dots & b_{2m}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}^{(i)} & b_{m2}^{(i)} & \dots & b_{mm}^{(i)} \end{array}\right\}$$

mit $(B)_i$ bezeichnen, und für $i = 1, 2, \dots, \varrho$

$$y_a^{(i)} = (x - a_i)^{r_{ia}} \cdot \varphi_a^{(i)},$$

für $i = \varrho + 1$ aber

$$y_a^{(\varrho+1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\varrho+1,a}} \cdot \varphi_a^{(\varrho+1)}$$

setzen, wo $\varphi_a^{(i)}$ in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Nach einem Umlaufe um den Punkt a_1 gehen daher die Functionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_m^{(1)}$ resp. über in

$$e^{2r_{11}\pi\sqrt{-1}} \cdot y_1^{(1)}, \quad e^{2r_{12}\pi\sqrt{-1}} \cdot y_2^{(1)}, \quad \dots, \quad e^{2r_{1m}\pi\sqrt{-1}} \cdot y_m^{(1)}.$$

Um zu finden, worin jene Functionen übergehen, wenn man einen Umlauf um den Punkt a_i macht, wo i von 1 verschieden ist, muss man auf dieselben zuerst die Substitution $(B)_i$ anwenden, alsdann die Substitution

$$(R)_i = \left\{\begin{array}{ccccc} e^{2r_{i1}\pi\sqrt{-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2r_{i2}\pi\sqrt{-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{2r_{i3}\pi\sqrt{-1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{2r_{im}\pi\sqrt{-1}} \end{array}\right\}$$

und endlich die inverse Substitution von $(B)_i$, die wir wieder auf die üb- [16
liche Weise mit $(B)_i^{-1}$ bezeichnen wollen.

Durchläuft x in directer Richtung die Begrenzung einer Fläche, welche die sämmtlichen singulären Punkte enthält, darauf dieselbe Curve in entgegengesetzter Richtung, so erhält die Function offenbar ihren ursprünglichen Werth wieder. Der letztere Weg ist aber einem Umlaufe um den Punkt ∞ gleich zu achten, während der erstere durch die successiven Umläufe um die einzelnen singulären Punkte ersetzt werden kann. Man kann sich demnach, wenn man

den Punkt ∞ mit zu den singulären Punkten rechnet, auch so ausdrücken: die Function nimmt zuletzt ihren früheren Werth an, wenn man successive alle singulären Punkte umkreist.

Bezeichnen wir eine Substitution (S), die durch Zusammensetzung mehrerer anderer (k), (l), ... entstanden ist, symbolisch mit

$$(S) = (k)(l)\ldots,$$

so werden die Werthe, welche die Functionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}$ nach successiver Umkreisung sämmtlicher singulärer Punkte erhalten, gefunden, wenn man auf dieselben die Substitution

$$(R)_1(B)_1(R)_2(B)_2^{-1}(B)_2(R)_3(B)_3^{-1}\ldots(B)_{\varrho+1}(R)_{\varrho+1}(B)_{\varrho+1}^{-1}$$

anwendet. — Weil nun durch diese Substitution die Functionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}$ jede in sich selbst verwandelt werden, so muss sie mit der folgenden übereinstimmen:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right\}.$$

Da aber die Determinante aus den Elementen einer Substitution (S), die aus den Substitutionen (k), (l), ... zusammengesetzt ist, gleich ist dem Producte der Determinanten aus den Elementen von (k), von (l) etc., so muss

$$\text{Det.}(R)_1 . \text{Det.}(B)_1 \text{Det.}(R)_2 \text{Det.}(B)_2^{-1} . \text{Det.}(B)_2 \text{Det.}(R)_3 \text{Det.}(B)_3^{-1}\ldots \\ \times \text{Det.}(B)_{\varrho+1} \text{Det.}(R)_{\varrho+1} \text{Det.}(B)_{\varrho+1}^{-1} = 1$$

sein.

Nun ist

$$\text{Det.}(B)_i . \text{Det.}(B)_i^{-1} = 1$$

und

$$\text{Det.}(R)_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_1^m \alpha r_{i\alpha}},$$

folglich ist

$$\sum_1^{\varrho+1} i \sum_1^m \alpha r_{i\alpha} = \text{einer ganzen Zahl.} \tag{3.}$$

Diese ganze Zahl wollen wir mit k bezeichnen.

Nennt man r_{ia} den Exponenten, zu dem $y_a^{(i)}$ gehört, so kann man dieses Resultat so aussprechen:

Die Summe der Exponenten, zu welchen die Elemente der sämmtlichen $\varrho+1$ Fundamentalsysteme gehören, ist eine ganze Zahl.

II. Wir stellen uns jetzt vor, was den gemachten Voraussetzungen ge- [17 mäss erlaubt ist, dass die Exponenten, zu denen die einzelnen Elemente irgend eines Fundamentalsystems gehören, so angenommen sind, dass die Grössen $\varphi_a^{(i)}$ im Punkte a auch nicht mehr Null werden. Alsdann kann man annehmen, dass die zu ein und demselben Fundamentalsysteme gehörigen Exponenten alle von einander verschieden sind.

Man vertheile nämlich die Elemente eines zum Punkte a_i $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ gehörigen Fundamentalsystems $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$, welchen resp. die Exponenten $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$ zuertheilt sind, in Gruppen, derart, dass in jeder Gruppe solche Elemente enthalten sind, deren Exponenten sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden oder gleich sind, die Exponenten der Elemente der verschiedenen Gruppen aber weder gleich noch um ganze Zahlen von einander verschieden sind. — Es mögen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ eine solche Gruppe von n Elementen bilden. Der in algebraischem Sinne kleinste Exponent in dieser Gruppe (wenn sie complex sind, derjenige, dessen reeller Theil in algebraischem Sinne der kleinste ist), sei r_{i1}, und man setze in der Differentialgleichung (1.) $y = (x-a_i)^{r_{i1}} . u$, so muss die Differentialgleichung in u ein Integral der Form

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

haben, worin $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Constanten und $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in der Umgebung von a_i eindeutige, continuirliche und endliche Functionen sind, derart dass

$$f_1 = (x-a_i)^{k_1}\psi_1, \quad f_2 = (x-a_i)^{k_2}\psi_2, \quad \ldots, \quad f_n = (x-a_i)^{k_n}\psi_n,$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_n$ von einander verschiedene positive ganze Zahlen sind, und $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ für $x = a_i$ nicht mehr verschwinden. Dieses ergiebt sich daraus, dass die Coefficienten $\mathfrak{b}_a$ einer Reihenentwickelung $\sum_0^\infty{}_a (x-a_i)^a \mathfrak{b}_a$, welche einer linearen Differentialgleichung genügen soll, sich linear durch eine gewisse Anzahl von ihnen ausdrücken lassen. Die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ müssen

bei der Bestimmung der Coefficienten der Reihenentwickelung willkürlich geblieben sein, damit man durch Particularisiren derselben die n Functionen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ bestimmen könne, zwischen denen keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht. Denn gesetzt, die Anzahl der unabhängigen Constanten c, folglich auch der Functionen f reducirte sich auf eine Anzahl l, die kleiner ist als n, und man hätte durch Particularisiren der Constanten

$$\begin{aligned}
(x-a_i)^{-r_{i1}} y_1^{(i)} &= c_{11} f_1 + c_{12} f_2 + \cdots + c_{1l} f_l, \\
(x-a_i)^{-r_{i1}} y_2^{(i)} &= c_{21} f_1 + c_{22} f_2 + \cdots + c_{2l} f_l, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(x-a_i)^{-r_{i1}} y_n^{(i)} &= c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 + \cdots + c_{nl} f_l,
\end{aligned}$$

so führte die Elimination der l Grössen $f_1, f_2, \ldots, f_l$ aus diesen n Gleichungen auf eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten zwischen den Grössen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$.

Es sei daher

$$\begin{aligned}
(x-a_i)^{-r_{i1}} y_1^{(i)} &= c_{11} f_1 + c_{12} f_2 + \cdots + c_{1n} f_n, \\
(x-a_i)^{-r_{i1}} y_2^{(i)} &= c_{21} f_1 + c_{22} f_2 + \cdots + c_{2n} f_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(x-a_i)^{-r_{i1}} y_n^{(i)} &= c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 + \cdots + c_{nn} f_n,
\end{aligned}$$

18] so darf die Determinante der Grössen c in diesen Gleichungen nicht verschwinden, weil daraus eine lineare homogene Relation zwischen den Grössen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ mit constanten Coefficienten folgen würde.

Es ist daher

$$(x-a_i)^{r_{i1}} \cdot f_1,\ (x-a_i)^{r_{i1}} \cdot f_2,\ \ldots,\ (x-a_i)^{r_{i1}} \cdot f_n,\ \ y_{n+1}^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$$

ein Fundamentalsystem, da eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen diesen letzteren Grössen eine ähnliche Relation zwischen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ herbeiführen würde. Hierdurch sind die Glieder der Gruppe $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ durch solche ersetzt, deren Exponenten

$$r_{i1} + k_1,\ r_{i1} + k_2,\ \ldots,\ r_{i1} + k_n$$

von einander verschieden sind. Da dieselbe Umwandlung für jede Gruppe vorgenommen werden kann, so folgt, dass es für jeden singulären Punkt ein Fundamentalsystem giebt, dessen Elemente zu verschiedenen Exponenten gehören.

Um die Richtigkeit unserer Behauptung auch für den Punkt ∞ einzusehen, denke man sich in der Differentialgleichung (1.) die Substitution $x = \frac{1}{z}$ gemacht, worauf der Beweis für den Nullpunkt als singulären Punkt auf dieselbe Art zu führen ist, wie es eben für die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ geschehen ist.

III. Es ist

$$(4.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_1^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_1^{(i)}, \\ \frac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_2^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_2^{(i)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_m^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_m^{(i)}. \end{array}\right.$$

Setzt man die Determinante

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{d^{m-1} y_1^{(i)}}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_1^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1^{(i)} \\ \frac{d^{m-1} y_2^{(i)}}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_2^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1} y_m^{(i)}}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_m^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m^{(i)} \end{array}\right| = \Delta_0^{(i)},$$

und bezeichnet mit $\Delta_\alpha^{(i)}$ diejenige Determinante, welche man aus $\Delta_0^{(i)}$ erhält, wenn man die α^{te} Verticalreihe der letzteren durch $\frac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m}, \frac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m}, \ldots, \frac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m}$ ersetzt, so ergiebt sich

$$(5.)\qquad \Delta_0^{(i)} p_\alpha = \Delta_\alpha^{(i)}.$$

Aus den Gleichungen (2.) folgt die Relation [19

$$(6.)\qquad \Delta_\alpha^{(1)} = \mathrm{Det.}(B)_i \, \Delta_\alpha^{(i)}$$

für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m$. — Da sowohl $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}$ als auch $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ ein Fundamentalsystem constituiren, darf $\mathrm{Det.}(B)_i$ nicht verschwinden. Daher sind $\Delta_\alpha^{(1)}$ und $\Delta_\alpha^{(i)}$ zu gleicher Zeit eindeutig oder mehrdeutig, endlich oder unendlich, Null oder von Null verschieden. — Da ferner

$$y_\alpha^{(i)} (x - a_i)^{-r_{ia}},$$

für $i = 1, 2, \ldots, \varrho$ in der Umgebung von a_i eindeutig, continurlich und endlich sein soll, so hat $\frac{d^s y_\alpha^{(i)}}{dx^s}(x-a_i)^{-r_{i\alpha}+s}$ dieselbe Eigenschaft. Mithin ist

$$\Delta_0^{(1)}(x-a_1)^{-\Sigma_\alpha r_{1\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

in der Umgebung von a_1 und

$$\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\Sigma_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich. Nach Gleichung (6.) hat daher auch

$$\Delta_0^{(1)}(x-a_i)^{-\Sigma_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

in der Umgebung von a_i dieselbe Eigenschaft. Hieraus ergiebt sich, dass der Ausdruck:

$$K_0 = \Delta_0^{(1)}(x-a_1)^{-\Sigma_\alpha r_{1\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}(x-a_2)^{-\Sigma_\alpha r_{2\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}\ldots(x-a_\varrho)^{-\Sigma_\alpha r_{\varrho\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

für alle endlichen Werthe von x eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Weil ferner $y_\alpha^{(\varrho+1)} x^{r_{\varrho+1,\alpha}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, continuirlich und endlich ist, so hat $\frac{d^s y_\alpha^{(\varrho+1)}}{dx^s} x^{r_{\varrho+1,\alpha}+s}$ dieselbe Eigenschaft, daher auch $\Delta_0^{(\varrho+1)} x^{\Sigma_\alpha r_{\varrho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$ und schliesslich auch $\Delta_0^{(1)} x^{\Sigma_\alpha r_{\varrho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$.

Daraus folgt, dass K_0 für $x = \infty$ unendlich ist höchstens von der Ordnung

$$-\sum_1^m{}_\alpha \sum_1^{\varrho+1}{}_i r_{i\alpha} + (\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2} = -k + (\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2}.$$

Es ist aber $\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\Sigma_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$, $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$, für $x = a_i$ gleich dem Producte $\varphi_1^{(i)}(a_i)\varphi_2^{(i)}(a_i)\ldots\varphi_m^{(i)}(a_i)$ mal der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{i1}(r_{i1}-1)\ldots(r_{i1}-m+2), & r_{i1}(r_{i1}-1)\ldots(r_{i1}-m+3), & \ldots, & r_{i1}, & 1 \\ r_{i2}(r_{i2}-1)\ldots(r_{i2}-m+2), & r_{i2}(r_{i2}-1)\ldots(r_{i2}-m+3), & \ldots, & r_{i2}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{im}(r_{im}-1)\ldots(r_{im}-m+2), & r_{im}(r_{im}-1)\ldots(r_{im}-m+3), & \ldots, & r_{im}, & 1 \end{vmatrix},$$

Ferner sind die Grössen φ für $x = a_i$ von Null verschieden, und die letztere Determinante ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{i1}^{m-1} & r_{i1}^{m-2} & \dots & r_{i1} & 1 \\ r_{i2}^{m-1} & r_{i2}^{m-2} & \dots & r_{i2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{im}^{m-1} & r_{im}^{m-2} & \dots & r_{im} & 1 \end{vmatrix}, \qquad [20$$

welche bekanntlich von Null verschieden ist, da nicht zwei der Grössen $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}$ einander gleich sind.

Folglich ist auch

$$\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\sum_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

und daher auch

$$\Delta_0^{(1)}(x-a_i)^{-\sum_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

für $x = a_i$ von Null verschieden.

Ebenso ist

$$\Delta_0^{(\varrho+1)} x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

für $x = \infty$ gleich dem Producte $\pm \varphi_1^{(\varrho+1)}(\infty)\, \varphi_2^{(\varrho+1)}(\infty) \dots \varphi_m^{(\varrho+1)}(\infty)$ mal der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{\varrho+1,1}(r_{\varrho+1,1}+1)\dots(r_{\varrho+1,1}+m-2), & r_{\varrho+1,1}(r_{\varrho+1,1}+1)\dots(r_{\varrho+1,1}+m-3), & \dots, & r_{\varrho+1,1}, & 1 \\ r_{\varrho+1,2}(r_{\varrho+1,2}+1)\dots(r_{\varrho+1,2}+m-2), & r_{\varrho+1,2}(r_{\varrho+1,2}+1)\dots(r_{\varrho+1,2}+m-3), & \dots, & r_{\varrho+1,2}, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{\varrho+1,m}(r_{\varrho+1,m}+1)\dots(r_{\varrho+1,m}+m-2), & r_{\varrho+1,m}(r_{\varrho+1,m}+1)\dots(r_{\varrho+1,m}+m-3), & \dots, & r_{\varrho+1,m}, & 1 \end{vmatrix},$$

Es sind wieder die Grössen φ für $x = \infty$ von Null verschieden, und die letztere Determinante gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{\varrho+1,1}^{m-1} & r_{\varrho+1,1}^{m-2} & \dots & r_{\varrho+1,1} & 1 \\ r_{\varrho+1,2}^{m-1} & r_{\varrho+1,2}^{m-2} & \dots & r_{\varrho+1,2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{\varrho+1,m}^{m-1} & r_{\varrho+1,m}^{m-2} & \dots & r_{\varrho+1,m} & 1 \end{vmatrix},$$

welche von Null verschieden ist, da nicht zwei der Grössen $r_{\varrho+1,1}, r_{\varrho+1,2}, \dots, r_{\varrho+1,m}$ einander gleich sind.

Folglich ist $\Delta_0^{(\varrho+1)} x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$, und daher auch $\Delta_0^{(1)} x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$ für $x = \infty$ von Null verschieden.

Aus der Gleichung (5.) ergiebt sich (vergl. No. 2)

$$\Delta_0^{(i)} = C e^{\int p_1 dx},$$

wo C eine nicht verschwindende Constante ist. Damit

$$e^{\int p_1 dx} . (x - a_i)^{-\sum_\alpha r_{i\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

in der Umgebung von a_i endlich, eindeutig, continuirlich und von Null verschieden sei, muss

$$\lim (x - a_i) . p_1 \text{ für } x = a_i$$

einen endlichen Werth haben, und es muss das Residuum

$$\mathcal{E} \frac{(x - a_i) p_1}{((x - a_i))} = \sum_\alpha r_{i\alpha} - \frac{m(m-1)}{2}$$

21] sein. — Damit ferner $e^{\int p_1 dx} . x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, endlich, continuirlich und von Null verschieden sei, darf

$$\lim (x . p_1) \text{ für } x = \infty$$

nicht unendlich sein. Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit $\mathfrak{F}$, so hat man

$$\mathfrak{F} = -\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha} - \frac{m(m-1)}{2},$$

so dass

$$\mathcal{E}((p_1)) - \mathfrak{F} = k - (\varrho - 1) \frac{m(m-1)}{2}, \tag{7.}$$

wenn man mit $\mathcal{E}((p_1))$ den Integralrest von p_1 bezeichnet.

Da aber p_1 der Voraussetzung gemäss in der ganzen Ebene eindeutig und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich ist, da wir ferner jetzt gefunden haben, dass es in diesen Punkten von einer endlichen Ordnung unendlich und für $x = \infty$ nicht unendlich ist, so ist p_1 bekanntlich eine rationale Function von x.

Die Bedingung, dass $\lim (x p_1)$ für $x = \infty$ nicht unendlich sei, erfordert, dass der Grad des Nenners von p_1 mindestens um eine Einheit höher ist als

der des Zählers; in Folge dessen ist aber bekanntlich

$$\mathfrak{E}((p_1)) - \mathfrak{F} = 0,$$

so dass sich aus der Gleichung (7.) ergiebt

$$k = (\varrho - 1)\frac{m(m-1)}{2}. \tag{8.}$$

Daher ist K_0 eine Constante, und zwar ist diese Constante von Null verschieden, weil $\Delta_0^{(1)}$ nicht verschwinden darf, wenn $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ ein Fundamentalsystem constituiren sollen.

IV. Auf ähnliche Weise findet man, dass der Ausdruck

$$K_\mathfrak{b} = \Delta_\mathfrak{b}^{(1)}(x-a_1)^{-\sum_\alpha r_{1\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}(x-a_2)^{-\sum_\alpha r_{2\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}\ldots(x-a_\varrho)^{-\sum_\alpha r_{\varrho\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}},$$

wo $\mathfrak{b}$ jede der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ bedeutet, für jedes endliche x eindeutig, continuirlich und endlich ist. — Da ferner $\Delta_\mathfrak{b}^{(1)}.x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, endlich und continuirlich ist, so folgt, dass der Ausdruck $K_\mathfrak{b}$ eine ganze Function höchstens vom Grade

$$-k + (\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2} + (\varrho-1)\mathfrak{b} = (\varrho-1)\mathfrak{b}$$

ist.

Bezeichnet man daher mit $F_s(x)$ eine ganze Function von x höchstens vom Grade s, so folgt mit Hülfe der Gleichung (5.):

$$p_\mathfrak{b} = \frac{F_{(\varrho-1)\mathfrak{b}}(x)}{(x-a_1)^\mathfrak{b}(x-a_2)^\mathfrak{b}\ldots(x-a_\varrho)^\mathfrak{b}} \tag{9.}$$

für $\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, m$.

Die Differentialgleichung (1.) muss daher, um den in der Aufgabe gestellten Forderungen zu genügen, die folgende Form haben:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{F_{\varrho-1}(x)}{\psi}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(\varrho-1)}(x)}{\psi^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{F_{(m-1)(\varrho-1)}(x)}{\psi^{m-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{F_{m(\varrho-1)}(x)}{\psi^m}y, \tag{10.}$$

wo

$$\psi = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$$

gesetzt ist.

V. Setzen wir

$$\frac{F_{\alpha(\varrho-1)}(x).(x-a_i)^\alpha}{\psi^\alpha} = P_{i\alpha}(x)$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, so lässt sich die Differentialgleichung (10.) folgendermassen schreiben:

$$(11.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}y.$$

Es sei

$$y = (x-a_i)^r u,$$

so verwandelt sich diese Differentialgleichung in die folgende:

$$(12.) \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{P'_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{P'_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P'_{im}(x)}{(x-a_i)^m}u,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\begin{aligned} P'_{i\alpha}(x) = {} & \frac{-m(m-1)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha} r(r-1)\ldots(r-\alpha+1) \\ & + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots(\alpha-1)} r(r-1)\ldots(r-\alpha+2)\,P_{i1}(x) \\ & + \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots(\alpha-2)} r(r-1)\ldots(r-\alpha+3)\,P_{i2}(x) \\ & + \frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots(\alpha-3)} r(r-1)\ldots(r-\alpha+4)\,P_{i3}(x) + \cdots + P_{i\alpha}(x) \end{aligned}$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots, m$.

Bedeutet r eine der Zahlen $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$, so soll der Annahme nach der Differentialgleichung (12.) durch eine in der Umgebung von a_i convergente Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a_i)^\alpha$$

genügt werden, wo c_0 von Null verschieden ist. Setzt man diese Reihe für u in die Differentialgleichung ein, so ergiebt der Coefficient von $(x-a_i)^{-m}$ die Gleichung:

$$P'_{im}(a_i).c_0 = 0.$$

Da aber c_0 von Null verschieden ist, so muss $P'_{im}(a_i) = 0$ sein. Hieraus ergiebt sich, dass die Zahlen $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$ die Wurzeln der Gleichung

$P'_{im}(a) = 0$, oder

$$(13.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-m+1) - r(r-1)\dots(r-m+2)\,P_{i1}(a_i) \\ \quad -r(r-1)\dots(r-m+3)\,P_{i2}(a_i) - \dots - r\,P_{i,m-1}(a_i) - P_{im}(a_i) = 0 \end{cases} \quad [23$$

sind. Hieraus ergiebt sich, dass nicht zwei Wurzeln dieser Gleichung einander gleich sein dürfen.

Sezt man $t = \frac{1}{x}$, so findet man ohne Mühe, dass die Differentialgleichung (10.) in

$$(14.)\qquad \frac{d^m y}{dt^m} = \frac{\Phi_1(t)}{t}\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \frac{\Phi_2(t)}{t^2}\frac{d^{m-2}y}{dt^{m-2}} + \dots + \frac{\Phi_m(t)}{t^m}y$$

übergeht, wo die Grössen $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_m(t)$ rationale Functionen von t sind, die für $t = 0$ endlich bleiben. Es ergiebt sich alsdann, dass die Zahlen $r_{\varrho+1,1}, r_{\varrho+1,2}, \dots, r_{\varrho+1,m}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(15.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-m+1) - r(r-1)\dots(r-m+2)\,\Phi_1(0) \\ \quad -r(r-1)\dots(r-m+3)\,\Phi_2(0) - \dots - r\,\Phi_{m-1}(0) - \Phi_m(0) = 0 \end{cases}$$

sind, und dass daher nicht zwei Wurzeln dieser Gleichung einander gleich sein dürfen.

Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich das Resultat:

Soll eine lineare Differentialgleichung den am Anfange dieser Nummer gestellten Anforderungen genügen, so muss sie die Form der Differentialgleichung (10.) annehmen, und die aus derselben abgeleiteten Gleichungen (13.) und (15.) dürfen nicht zwei gleiche Wurzeln haben.

Es ist jetzt unsere Aufgabe, umgekehrt nachzuweisen, dass der Differentialgleichung (10.), unter der Bedingung, dass die Gleichungen (13.) und (15.) nur ungleiche Wurzeln haben, für jeden singulären Punkt a_i ein Fundamentalsystem zukommt, dessen sämmtliche Elemente, jedes mit einer Potenz von $x - a_i$ multiplicirt, in der Umgebung dieses Punktes endlich, eindeutig und continuirlich werden, und dass für den Punkt ∞ ein Fundamentalsystem existirt, dessen sämmtliche Elemente, jedes mit einer Potenz von x multiplicirt, in der Umgebung von ∞ dieselbe Eigenschaft haben. Dieses soll in der folgenden Nummer geschehen.

5.

Wir gehen von der Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}y$$

aus, wo i eine der Zahlen $1, 2, \ldots, \varrho$ bedeutet. Die Wurzeln der Gleichung

$$(2.) \quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2)P_{i1}(a_i) \\ \quad -r(r-1)\ldots(r-m+3)P_{i2}(a_i) - \cdots - rP_{i,m-1}(a_i) - P_{im}(a_i) = 0 \end{cases}$$

denken wir uns so geordnet, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser sei als der irgend einer vorhergehenden, und sie seien in dieser Reihenfolge $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$.

Setzt man nun

$$y = (x-a_i)^{r_{i1}}u,$$

so geht die Differentialgleichung (1.) über in

24] $$(3.) \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{Q_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{Q_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{Q_{im}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}u,$$

wo die Grössen $Q_{iq}(x)$ aus den Grössen $P'_{iq}(x)$ der Differentialgleichung (12.) der vorigen Nummer erhalten werden, wenn man in den Ausdrücken der letzteren r_{i1} statt r setzt, wodurch der constante Theil von $P'_{im}(x)$ verschwindet.

Wir formen nunmehr die Differentialgleichung (3.) um in:

$$(4.) \quad \begin{cases} (x-a_i)^{m-1}\dfrac{d^m u}{dx^m} - Q_{i1}(a_i).(x-a_i)^{m-2}\dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} \\ \quad - Q_{i2}(a_i).(x-a_i)^{m-3}\dfrac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} - \cdots - Q_{i,m-1}(a_i)\dfrac{du}{dx} \\ \quad = Q'_{i1}(x).(x-a_i)^{m-1}\dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + Q'_{i2}(x).(x-a_i)^{m-2}\dfrac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots \\ \quad + Q'_{i,m-1}(x).(x-a_i)\dfrac{du}{dx} + Q_{im}(x)u, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{Q_{i1}(x)-Q_{i1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i1}(x), \quad \frac{Q_{i2}(x)-Q_{i2}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i2}(x), \quad \ldots,$$

$$\frac{Q_{i,m-1}(x)-Q_{i,m-1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i,m-1}(x)$$

gesetzt ist.

Versucht man dieser Differentialgleichung durch eine Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a_i)^\alpha$$

zu genügen, so findet man für jeden positiven ganzzahligen Werth von k:

$$(5.)\quad \begin{cases} [(k+1)k(k-1)\dots(k-m+2) - Q_{i1}(a_i)(k+1)k(k-1)\dots(k-m+3) \\ \quad - Q_{i2}(a_i)(k+1)k(k-1)\dots(k-m+4) - \dots - Q_{i,m-1}(a_i)(k+1)]\, c_{k+1} \\ \quad = A_{k0}c_k + A_{k1}c_{k-1} + A_{k2}c_{k-2} + \dots + A_{kk}c_0, \end{cases}$$

worin die Grössen A sich aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Functionen $Q'_{i1}(x)$, $Q'_{i2}(x)$, …, $Q_{im}(x)$ nach Potenzen von $x-a_i$ und aus numerischen Grössen durch die blossen Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Die Gleichung

$$(6.)\quad \begin{cases} w(w-1)\dots(w-m+2) - Q_{i1}(a_i)\, w(w-1)\dots(w-m+3) \\ \quad - Q_{i2}(a_i)\, w(w-1)\dots(w-m+4) - \dots - Q_{i,m-1}(a_i) = 0 \end{cases}$$

hat, wie ohne Mühe gefunden wird, die Wurzeln

$$(7.)\qquad r_{i2}-r_{i1}-1,\ r_{i3}-r_{i1}-1,\ r_{i4}-r_{i1}-1,\ \dots,\ r_{im}-r_{i1}-1.$$

Keine dieser Grössen kann wegen der über die Reihenfolge der Wurzeln $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}$ gemachten Voraussetzung einer positiven ganzen Zahl oder der Null gleich sein. Demnach bleibt für jeden positiven ganzzahligen Werth [25 von k und für $k=0$ der Coefficient von c_{k+1} der Gleichung (5.) von Null verschieden. Daher lassen sich mit Hülfe dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten c unter der Form darstellen:

$$(8.)\qquad c_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha c_0$$

für alle positiven ganzzahligen Werthe von α.

Es seien die Maxima der Moduln der Functionen

$$Q'_{i1}(x),\ Q'_{i2}(x),\ \dots,\ Q'_{i,m-1}(x),\ Q_{im}(x)$$

in der Umgebung von a resp. $M_1, M_2, \dots, M_{m-1}, M_m$, so ist bekanntlich für

jeden ganzzahligen positiven Werth von α:

$$(9.)\quad \begin{cases} \mathrm{mod}\left(\dfrac{d^\alpha Q'_{i1}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\ldots\alpha\dfrac{M_1}{r^\alpha} \\ \mathrm{mod}\left(\dfrac{d^\alpha Q'_{i2}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\ldots\alpha\dfrac{M_2}{r^\alpha} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{mod}\left(\dfrac{d^\alpha Q_{im}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\ldots\alpha\dfrac{M_m}{r^\alpha}, \end{cases}$$

wo r die Entfernung des Punktes a_i vom nächsten singulären Punkte und $(f(x))_{a_i}$ den Werth von $f(x)$ für $x = a_i$ bezeichnet.

Man bilde nunmehr die Differentialgleichung:

$$(10.)\quad \begin{cases} \gamma_1\cdot(x-a_i)^{m-2}\dfrac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \gamma_2\cdot(x-a_i)^{m-3}\dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots + \gamma_{m-1}\dfrac{dv}{dx} \\ \quad = \dfrac{M_1}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}\cdot(x-a_i)^{m-1}\dfrac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \dfrac{M_2}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}\cdot(x-a_i)^{m-2}\dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots \\ \quad + \dfrac{M_{m-1}}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}\cdot(x-a_i)\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{M_m}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}v, \end{cases}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ beliebige positive Grössen sind, jedoch der Beschränkung unterworfen, dass die Gleichung

$$(11.)\quad \gamma_1 w(w-1)\ldots(w-m+3) + \gamma_2 w(w-1)\ldots(w-m+4) + \cdots + \gamma_{m-1} = 0$$

weder eine ganze positive Zahl noch die Null zur Wurzel habe. — Versucht man auch der Differentialgleichung (10.) durch eine Reihe

$$v = \sum_0^\infty{}_\alpha\, d_\alpha (x-a_i)^\alpha$$

zu genügen, so ergiebt sich für jedes ganzzahlige k die Relation

$$(12.)\quad \begin{cases} [\gamma_1(k+1)k\ldots(k-m+3) + \gamma_2(k+1)k\ldots(k-m+4) + \cdots + \gamma_{m-1}(k+1)]\,d_{k+1} \\ \quad = B_{k0}d_k + B_{k1}d_{k-1} + B_{k2}d_{k-2} + \cdots + B_{kk}d_0, \end{cases}$$

26] wo die Grössen B sich ebenso aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Functionen $\dfrac{M_1}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}, \dfrac{M_2}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}, \ldots, \dfrac{M_m}{1-\dfrac{x-a}{r}}$ nach Potenzen von

$x-a_i$ und aus numerischen Grössen zusammensetzen, wie sich die Grössen A der Gleichung (5.) aus den entsprechenden Coefficienten der Reihenentwickelungen von $Q'_{i1}(x), Q'_{i2}(x), \ldots, Q_{im}(x)$ und aus denselben numerischen Grössen zusammensetzen. Da die Grössen B sämmtlich positiv sind, so folgt aus den Ungleichheiten (9.), dass

$$B_{k\alpha} > \mathrm{mod}\, A_{k\alpha} \tag{13.}$$

für $\alpha = 0, 1, \ldots, k$.

Es giebt stets eine endliche Grenze für k, $k = t$, derart, dass für $k \gtrless t$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{mod}[k(k-1)\ldots(k-m+2)-Q_{i1}(a_i)k(k-1)\ldots(k-m+3)-Q_{i2}(a_i)k(k-1)\ldots(k-m+4)-\cdots-Q_{i,m-1}(a_i)] \\ \qquad > \gamma_1 k(k-1)\ldots(k-m+3)+\gamma_2 k(k-1)\ldots(k-m+4)+\cdots+\gamma_{m-1}.\end{array}\right\} \tag{14.}$$

Da nun nach Gleichung (12.) sich jedes d unter der Form

$$d_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha d_0 \tag{15.}$$

darstellen lässt, wo $\mathfrak{B}_\alpha$ eine positive Zahl ist, so sind alle Grössen d positiv, wenn man d_0 positiv annimmt. — Aus den Ungleichheiten (13.) und (14.) in Verbindung mit den Gleichungen (5.) und (12.) würde für jeden ganzzahligen Werth von k folgen

$$d_k > \mathrm{mod}\, c_k, \tag{16.}$$

wenn dieses für $k \leqq t$ stattfände.

Nun sei unter den Moduln der Grössen

$$1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_t$$

A der grösste, und unter den Grössen

$$1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}$$

B die kleinste, und c_0 so gewählt, dass

$$\mathrm{A}\,\mathrm{mod}\, c_0 < \mathrm{B}\, d_0. \tag{17.}$$

Da die Grössen d_0, B und A von Null verschieden sind, so ist diese Ungleichheit immer erfüllbar und liefert für c_0 von Null verschiedene Werthe. Alsdann ist für $k \leqq t$, folglich für jedes k

$$d > \mathrm{mod}\, c_k.$$

Wenn daher die Reihe

$$v = \sum_0^\infty{}_a d_a (x-a_i)^a$$

convergirt, so convergirt um so mehr die Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_a c_a (x-a_i)^a,$$

wenn man über c_0 gemäss der Ungleichheit (17.) disponirt.

27] Multiplicirt man die Gleichung (10.) mit $1-\frac{x-a_i}{r}$ und substituirt alsdann die Reihe für v, so ergiebt sich für jeden ganzzahligen Werth von k

$$(18.)\quad \left\{\begin{aligned} &[(k+1)k(k-1)\dots(k-m+3)\gamma_1 + (k+1)k(k-1)\dots(k-m+4)\gamma_2 + \cdots \\ &\qquad + (k+1)\gamma_{m-1}]\, d_{k+1} \\ &= \left[k(k-1)\dots(k-m+2)\left(\frac{\gamma_1}{r}+M_1\right) + k(k-1)\dots(k-m+3)\left(\frac{\gamma_2}{r}+M_2\right) + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + k\left(\frac{\gamma_{m-1}}{r}+M_{m-1}\right) + M_m\right] d_k. \end{aligned}\right.$$

Daher ist

$$\lim \frac{d_{k+1}}{d_k} (\text{für } k=\infty) = \frac{\gamma_1 + r M_1}{r\gamma_1}$$

und

$$\lim \frac{d_{k+1}(x-a_i)^{k+1}}{d_k (x-a_i)^k} = \frac{\gamma_1 + r M_1}{r\gamma_1}\cdot(x-a_i).$$

Die Reihe für v ist daher convergent für alle Werthe von x, für welche

$$\operatorname{mod}(x-a_i) < \frac{r\gamma_1}{\gamma_1 + r M_1}.$$

Da γ_1 und r von Null verschiedene positive Grössen sind, so findet die Convergenz innerhalb eines endlichen, um den Punkt a_i beschriebenen Kreises statt.

Daraus folgt, dass die Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_a c_a (x-a_i)^a$$

innerhalb desselben Kreises convergirt. Es giebt daher eine innerhalb dieses Kreises und folglich nach No. 1 in der ganzen Umgebung von a eindeutige, endliche und continuirliche und in a_i von Null verschiedene Function u, welche der Differentialgleichung (3.) genügt.

Hiernach giebt es also ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1.), y_{i1}, welches mit $(x-a_i)^{-r_{i1}}$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich und in a_i von Null verschieden ist.

Setzt man jetzt

$$y = y_{i1}\int z\,dx, \tag{19.}$$

so erhält man für z eine lineare Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} = \frac{G_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \frac{G_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \cdots + \frac{G_{i,m-1}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}z, \tag{1a.}$$

worin die Coefficienten $G_{i1}(x)$, $G_{i2}(x)$, ..., $G_{i,m-1}(x)$ Functionen sind, welche innerhalb eines endlichen den Punkt a_i umgebenden Kreises S eindeutig, endlich und continuirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{cases} r'(r'-1)\ldots(r'-m+2) - r'(r'-1)\ldots(r'-m+3)G_{i1}(a_i) \\ \quad -r'(r'-1)\ldots(r'-m+4)G_{i2}(a_i) - \cdots - r'G_{i,m-2}(a_i) - G_{i,m-1}(a_i) = 0 \end{cases} \tag{2a.}$$ [28

sind, wie leicht zu zeigen,

$$r_{i2}-r_{i1}-1,\ r_{i3}-r_{i1}-1,\ r_{i4}-r_{i1}-1,\ \ldots,\ r_{im}-r_{i1}-1. \tag{20.}$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$ gemachten Voraussetzung, in der Reihenfolge (20.) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist, als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der Function y_{i1}, die zu dem Exponenten r_{i1} gehört, ergründet wurde, die Existenz einer Function z_2 nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i1}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden wird. Da $r_{i2}-r_{i1}$ der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, so ergiebt die Gleichung (19.), wenn man z_1 für z setzt, ein Integral der Differentialgleichung (1.), welches mit $(x-a_i)^{-r_{i2}}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden ist. Daraus folgt nach No. 1, dass es ein particuläres Integral y_{i2} giebt, welches mit $(x-a_i)^{-r_{i2}}$ multiplicirt in der ganzen Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich und in a_i von Null verschieden ist.

Man setze nunmehr

$$z = z_1 \int t\,dx, \tag{21.}$$

so erhält man für t eine lineare Differentialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$\frac{d^{m-2}t}{dx^{m-2}} = \frac{G'_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-3}t}{dx^{m-3}} + \frac{G'_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-4}t}{dx^{m-4}} + \cdots + \frac{G'_{i,m-2}(x)}{(x-a_i)^{m-2}}t, \tag{1b.}$$

worin die Coefficienten $G'_{i1}(x)$, $G'_{i2}(x)$, ..., $G'_{i,m-2}(x)$ Functionen sind, welche innerhalb eines endlichen den Punkt a_i umgebenden Kreises S' eindeutig, endlich und continuirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{cases} r''(r''-1)\ldots(r''-m+3) - r''(r''-1)\ldots(r''-m+4)G'_{i1}(a_i) \\ \quad -r''(r''-1)\ldots(r''-m+5)G'_{i2}(a_i) - \cdots - r''G'_{i,m-2}(a_i) - G'_{i,m-2}(a_i) = 0 \end{cases} \tag{2b.}$$

sind, wie leicht zu zeigen,

$$r_{i2}-r_{i2}-1,\ r_{i4}-r_{i2}-1,\ \ldots,\ r_{im}-r_{i2}-1. \tag{22.}$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$ gemachten Voraussetzung, in der Reihenfolge (22.) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist, als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der Functionen y_{i1} und z_1 ergründet wurde, die Existenz einer Function t_1 nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i2}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S' eindeutig, continuirlich 29] und endlich und in a_i von Null verschieden wird. Da $r_{i2}-r_{i2}$ der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, so ergiebt die Gleichung (21.) ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1a.)

$$z_2 = z_1 \int t_1\,dx,$$

welches mit $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i1}-1)}$ multiplicirt dieselbe Eigenschaft hat. — Da ferner $r_{i2}-r_{i1}$ von Null verschieden ist, so ergiebt die Gleichung (19.), wenn man z_2 für z setzt, ein Integral der Differentialgleichung (1.), welches mit $(x-a_i)^{-r_{i2}}$ multiplicirt dieselbe Eigenschaft hat. Daraus folgt nach No. 1, dass es ein particuläres Integral y_{i2} giebt, welches mit $(x-a_i)^{-r_{i2}}$ multiplicirt in der ganzen Umgebung von a_i eindeutig, continuirlich und endlich, und in a_i von Null verschieden wird.

Fährt man so fort, so findet man, dass es zu jeder Wurzel der Gleichung (2.) r_{ia} ein zugehöriges particuläres Integral y_{ia} giebt, welches mit $(x-a_i)^{-r_{ia}}$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden wird.

Nach dem Satze am Schlusse der No. 2 bilden die Integrale $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$ ein Fundamentalsystem, und es ist hiermit der am Schlusse der vorigen Nummer geforderte Beweis geliefert.

6.

I. Die Differentialgleichung, welcher die durch die Gaussssche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen genügen, gehört zu der in den beiden vorhergehenden Nummern behandelten Klasse von Differentialgleichungen. Sie wird nämlich in der allgemeinsten Form aus der Differentialgleichung (10.) in No. 4 erhalten, wenn man $m = 2$ und die Anzahl der singulären Punkte ϱ gleich 2 annimmt, so dass sie die Gestalt hat:

$$(1.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F_1(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}\frac{dy}{dx} + \frac{F_2(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2}y,$$

wo $F_1(x)$ und $F_2(x)$ resp. ganze Functionen ersten und zweiten Grades von x sind.

Um die specielle Form derselben, wie sie Riemann in der oben erwähnten Abhandlung (S. 19[1])) gegeben hat, zu erhalten, sei

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

Setzt man

$$F_1(x) = f_0 + f_1 x; \quad F_2(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2,$$

so sind die Gleichungen, wodurch die Exponenten der zu den Punkten $0, 1, \infty$ gehörigen Fundamentalsysteme bestimmt werden, resp.

$$(a) \qquad r(r-1) + f_0 r - g_0 = 0$$

$$(b) \qquad r(r-1) - (f_0+f_1)r - (g_0+g_1+g_2) = 0$$

$$(c) \qquad r(r-1) + (2+f_1)r - g_2 = 0.$$

Bestimmt man die Constanten f_0, f_1, g_0, g_1, g_2 dadurch, dass man die Wurzeln der Gleichung (a) gleich α und α', der Gleichung (b) gleich 0 und γ',

[1]) Riemanns Werke (1892), S. 81. Sch.

der Gleichung (c) gleich β und β' annimmt, wo

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma' = 1,$$

so geht die Differentialgleichung (1.) über in:

30] (2.) $$(1-x)\frac{d^2y}{d\log x^2} - [\alpha+\alpha'+(\beta+\beta')x]\frac{dy}{d\log x} + (\alpha\alpha' - \beta\beta' x)y = 0,$$

welches die RIEMANNsche Form ist.

II. Die Differentialgleichung (10.) in No. 4 enthält ausser den die Lage der singulären Punkte bestimmenden Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ im Allgemeinen noch $\frac{m(m+1)\varrho}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$ Constanten, nämlich die Coefficienten der ganzen Functionen $F_{\varrho-1}(x)$, $F_{2(\varrho-1)}(x)$, $\ldots$, $F_{m(\varrho-1)}(x)$. Zu jedem singulären Punkte gehören m Exponenten (die den Elementen des bezüglichen Fundamentalsystems zuertheilt sind), also zu allen singulären Punkten (den Punkt ∞ mitgerechnet) $m(\varrho+1)$ Exponenten. Von den letzteren sind nur $m(\varrho+1)-1$ willkürlich, da die Summe aller (nach No. 4) einer bestimmten ganzen Zahl gleich ist. — Die Anzahl der willkürlichen Exponenten ist der Anzahl der Constanten der Differentialgleichung gleich, wenn

$$\frac{m(m+1)\varrho}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m(\varrho+1)-1,$$

oder

(3.) $$\varrho = 1 + \frac{2}{m},$$

so dass entweder

$$m = 1 \text{ und } \varrho = 3,$$

oder

$$m = 2 \text{ und } \varrho = 2.$$

Hieraus folgt:

Erstens. Sind die Exponenten der Elemente der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme gegeben, so sind die Constanten der Differentialgleichung, welcher die durch die GAUSS'sche Reihe darstellbaren Functionen genügen, folglich auch abgesehen von constanten Factoren die Elemente der Fundamentalsysteme selbst, vollständig bestimmt.

Dieser Satz stimmt im Wesentlichen mit dem von RIEMANN in der angeführten Abhandlung No. IV, S. 11 sqq.[1]) gegebenen überein, welcher dort auf andere Weise hergeleitet ist.

Es folgt aus der Gleichung (3.)

Zweitens. Den Fall einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit 3 singulären Punkten abgerechnet, ist die Differentialgleichung (1.), welcher die durch die GAUSS'sche Reihe darstellbaren Functionen genügen, die einzige aus der Klasse der durch die Gleichung (10.) in No. 4 repräsentirten Differentialgleichungen, welcher diese Eigenschaft zukommt.

III. Nimmt man in der Differentialgleichung (10.) in No. 4 $\varrho = 1$ an, so reduciren sich sämmtliche Functionen $F_{\varrho-1}(x)$, $F_{2(\varrho-1)}(x)$, ..., $F_{m(\varrho-1)}(x)$ auf Constanten, und man erhält eine Differentialgleichung der Gestalt

$$(4.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{f_1}{x-a_1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{f_2}{(x-a_1)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{f_m}{(x-a_1)^m}y,$$

wo $f_1, f_2, \ldots, f_m$ Constanten sind. — Die Exponenten der Elemente des zu dem Punkte a_1 gehörigen Fundamentalsystems $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sind die m Wurzeln der Gleichung

$$(5.) \qquad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1) - f_1 r(r-1)\ldots(r-m+2) \\ \qquad - f_2 r(r-1)\ldots(r-m+3) - \cdots - f_m = 0. \end{cases}$$

Setzt man $y = (x-a_1)^{r_a}.u$, so erhält man eine Differentialgleichung für u, in welcher der Coefficient von u verschwindet, welcher also durch $u = \text{Const.}$ genügt wird; daraus folgt, dass die Functionen

$$(x-a_1)^{r_1},\ (x-a_1)^{r_2},\ \ldots,\ (x-a_1)^{r_m}$$

selbst das Fundamentalsystem constituiren, so dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung (4.), wie bekannt,

$$y = \sum_1^m c_a (x-a_1)^{r_a}$$

wird, wo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Constanten sind. (Vergl. CAUCHY, Exercices de mathématiques, vol. I, pag. 261).

[1]) Riemanns Werke (1892), S. 74 ff. Sch.

7.

Die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, denen algebraische Integrale genügen, sind entweder der Art, dass ihnen auch nicht algebraische Integrale genügen, oder derart dass sie nur algebraische Integrale zulassen. Der zweite Fall tritt ein, wenn es ein Fundamentalsystem giebt, dessen Elemente algebraische Functionen sind.

Es ist von Interesse, dass die letztere Art zu der Klasse von Differentialgleichungen gehört, welche durch die Gleichung (10.) in No. 4 characterisirt sind.

Es sei η Wurzel einer Gleichung

$$\eta^n + \alpha_1 \eta^{n-1} + \alpha_2 \eta^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0, \tag{1.}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rationale Functionen von x sind, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} - p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} - p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} - \cdots - p_m y = 0 \tag{2.}$$

genügt, deren Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ebenfalls rationale Functionen von x sind; so gehören diejenigen Punkte, für welche eine Verzweigung oder ein Unendlichwerden von η stattfindet, offenbar zu den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ der Differentialgleichung (2.).

In der Umgebung von a_i ist daher bekanntlich

$$\eta = \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x - a_i)^{-\nu + \frac{\alpha}{\mu}}, \tag{3.}$$

wenn μ die Anzahl der Elemente desjenigen Cyclus der Wurzeln der Gleichung (1.) bedeutet, zu dem η gehört, und ν eine positive ganze Zahl oder Null ist, je nachdem η im Punkte a_i unendlich oder endlich ist. (Vergl. Puiseux in Liouvilles Journal de mathématiques, T. XV und XVI.)

Dieser Gleichung geben wir die Form:

$$\eta = (x-a_i)^{-\nu} \cdot \varphi_0 + (x-a_i)^{-\nu+\frac{1}{\mu}} \cdot \varphi_1 + (x-a_i)^{-\nu+\frac{2}{\mu}} \cdot \varphi_2 + \cdots + (x-a_i)^{-\nu+\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \varphi_{\mu-1}, \tag{4.}$$

32] wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1}$ in der Umgebung von a_i eindeutige, endliche und continuirliche Functionen sind. Ich behaupte nun,

dass jedes Glied $(x-a_i)^{-\nu+\frac{\alpha}{\mu}} \cdot \varphi_\alpha$ für sich ein Integral der Differentialgleichung (2.) ist.

Das Resultat der Substitution von $(x-a_i)^{-\nu+\frac{\alpha}{\mu}}.\varphi_\alpha$ an die Stelle von y in die linke Seite der Differentialgleichung (2.) hat die Gestalt $(x-a_i)^{\frac{\alpha}{\mu}}\psi_\alpha$, wo ψ_α eine in der Umgebung von a_i eindeutige Function von x bedeutet. Man hat daher

$$(5.)\quad (x-a_i)^0.\psi_0+(x-a_i)^{\frac{1}{\mu}}.\psi_1+(x-a_i)^{\frac{2}{\mu}}.\psi_2+\cdots+(x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}}.\psi_{\mu-1}=0.$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von x identisch erfüllt sein muss, so leitet man daraus durch $\mu-1$ malige Umkreisung des Punktes a_i folgendes System von μ Gleichungen ab:

$$(6.)\quad \begin{cases} (x-a_i)^0\psi_0+ & (x-a_i)^{\frac{1}{\mu}}.\psi_1+ & (x-a_i)^{\frac{2}{\mu}}.\psi_2+\cdots+ & (x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}}.\psi_{\mu-1}=0,\\ (x-a_i)^0\psi_0+ & \alpha(x-a_i)^{\frac{1}{\mu}}.\psi_1+ & \alpha^2(x-a_i)^{\frac{2}{\mu}}.\psi_2+\cdots+ & \alpha^{\mu-1}(x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}}.\psi_{\mu-1}=0,\\ (x-a_i)^0\psi_0+ & \alpha^2(x-a_i)^{\frac{1}{\mu}}.\psi_1+ & \alpha^4(x-a_i)^{\frac{2}{\mu}}.\psi_2+\cdots+ & \alpha^{2(\mu-1)}(x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}}.\psi_{\mu-1}=0,\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (x-a_i)^0\psi_0+ & \alpha^{\mu-1}(x-a_i)^{\frac{1}{\mu}}.\psi_1+ & \alpha^{2(\mu-1)}(x-a_i)^{\frac{2}{\mu}}.\psi_2+\cdots+ & \alpha^{(\mu-1)(\mu-1)}(x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}}.\psi_{\mu-1}=0, \end{cases}$$

wenn man mit α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^\mu=1$ bezeichnet.

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{\mu-1}\\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \cdots & \alpha^{2(\mu-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \alpha^{\mu-1} & \alpha^{2(\mu-1)} & \cdots & \alpha^{(\mu-1)^2} \end{vmatrix}$$

bekanntlich nicht verschwindet, so muss

$$(7.)\qquad (x-a_i)^{\frac{\alpha}{\mu}}.\psi_\alpha=0$$

sein, für $\alpha=0,1,2,\ldots,\mu-1$, d. h. es muss $(x-a_i)^{-\nu+\frac{\alpha}{\mu}}.\varphi_\alpha$ für $\alpha=0,1,2,\ldots,\mu-1$ ein Integral der Differentialgleichung (2.) sein.

Es werde nunmehr vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung (2.) nur algebraische Integrale zulasse. Ist alsdann $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$ irgend ein Fundamentalsystem, so hat man in der Umgebung von a_i

$$(8.)\qquad \eta_b=\sum_0^{\mu_b-1}{}_\alpha\, u_{b,\alpha}$$

für $\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, m$, wenn man

33] $$(x-a_i)^{-\nu_\mathfrak{b}+\frac{\alpha}{\mu_\mathfrak{b}}}\varphi_{\mathfrak{b},\alpha} = u_{\mathfrak{b},\alpha}$$

setzt, wo $\mu_\mathfrak{b}$ und $\nu_\mathfrak{b}$ positive ganze Zahlen sind, wovon jedoch die letztere auch Null sein kann, und $\varphi_{\mathfrak{b},\alpha}$ eine in der Umgebung von a_i eindeutige, continuirliche und endliche Function bedeutet (s. Gleichung (4.)).

Die Anzahl der verschiedenen Grössen u, durch welche die Grössen η ausgedrückt werden, darf nicht kleiner als m sein. Denn sonst würde die Elimination derselben aus den m Gleichungen:

$$\eta_1 = \sum_0^{\mu_1-1}{}_\alpha\, u_{1,\alpha},$$
$$\eta_2 = \sum_0^{\mu_2-1}{}_\alpha\, u_{2,\alpha},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_m = \sum_0^{\mu_m-1}{}_\alpha\, u_{m,\alpha},$$

die sich aus der Gleichung (8.) ergeben, eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ ergeben; dieses widerspräche aber dem Character des letzteren Systems von Functionen als eines Fundamentalsystems. — Da aber die Grössen u, nach dem Obigen, Integrale der Differentialgleichung (2.) sind, und sich daher als homogene lineare Functionen der Grössen η mit constanten Coefficienten darstellen lassen, so drücken sich alle Grössen u als lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten von m unter ihnen aus. Die letzteren m Grössen u müssen so ausgewählt werden können, dass zwischen denselben keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Denn sonst würde die Anzahl der verschiedenen u, wodurch sich die Grössen η ausdrücken lassen, unter m herabsinken, was schon als unmöglich erkannt worden.

Hiermit ist bewiesen, dass m der Grössen u ein Fundamentalsystem constituiren; die Elemente desselben werden mit Potenzen von $x-a$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig, continuirlich und endlich.

Da dieses für alle Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gilt, und dasselbe für den Punkt ∞ stattfindet, wie sich ergiebt, wenn man $\frac{1}{z}$ statt x in die Differentialgleichung (2.) setzt, so erhält man den Satz:

Die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, welchen nur durch algebraische Integrale genügt werden kann, gehören zu der Klasse der durch die Gleichung (10.) in No. 4 repräsentirten Differentialgleichungen.

Da eine algebraische Function die Eigenschaft hat, nach einer endlichen Anzahl von Umläufen um einen singulären Punkt den ursprünglichen Werth wieder anzunehmen, so folgt:

In diesem Falle sind auch alle Wurzeln der Gleichungen (13.) und (15.) in No. 4, oder die Exponenten, zu denen die einzelnen Elemente der auf alle singulären Punkte und den Punkt ∞ bezüglichen Fundamentalsysteme gehören, rationale Zahlen.

Daraus folgt aber noch nicht umgekehrt, dass eine Differentialgleichung [34 der Form (10.) in No. 4, unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen (13.) und (15.) derselben Nummer rationale Zahlen sind, auch immer nur algebraische Integrale hat. — Denn wenn auch in jedem Verzweigungspunkte eines Integrals nur eine endliche Anzahl von Zweigen zusammenhangen, so können dennoch durch die unendliche Anzahl von Combinationen der Umläufe um die singulären Punkte unzählig viele Zweige hervorgebracht werden. — Es bleibt vielmehr noch die Untersuchung übrig, unter welchen Bedingungen die Anzahl dieser Zweige für jedes Integral endlich ist, wodurch erst dem wesentlichen Erforderniss einer algebraischen Function, in jedem Punkte nur eine endliche Anzahl von Werthen zu haben, genügt würde.

Sind aber für jeden singulären Punkt die Wurzeln der Gleichung (13.) reale ganze Zahlen, so sind die Elemente aller Fundamentalsysteme und folglich jedes Integral in der ganzen Ebene eindeutig, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten, in jedem von endlicher Ordnung unendlich, daher sind alle Integrale rationale Functionen von x. — Dieser besondere Fall ergiebt daher den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Differentialgleichung nur rationale Integrale habe, bestehen darin, dass sie die Form der Differentialgleichung (10.) in No. 4 habe, und dass für jeden singulären Punkt die Wurzeln der Gleichung (13.) derselben Nummer reale ganze Zahlen sind.

Da die Voraussetzung, dass die ϱ Gleichungen, welche sich aus der

Gleichung (13.) in No. 4 für $i = 1, 2, \ldots, \varrho$ ergeben, reale ganzzahlige Wurzeln haben, schon den Umstand zur Folge hat, dass die Integrale der Differentialgleichung (2.) in der ganzen Ebene eindeutig sind, so ergiebt sich, dass in diesem Falle auch die Gleichung (15.) derselben Nummer reale, ganzzahlige Wurzeln hat, wodurch ein interessanter Zusammenhang zwischen diesen algebraischen Gleichungen festgestellt wird.

8.

Es sei mir erlaubt, diese Arbeit mit einer Bemerkung über die Form der Integrale einer beliebigen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, deren Coefficienten den in No. 1 angegebenen Bedingungen genügen, zu beschliessen.

Das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung ist durch das Verhalten der Fundamentalsysteme bedingt. In Bezug auf diese lässt sich nun aus dem in No. 3 gegebenen Satze folgender Satz ableiten:

Es sei a_i irgend ein singulärer Punkt, so lässt sich ein Fundamentalsystem $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$ bestimmen, welches folgende Form hat:

$$\begin{aligned}
y_{i1} &= \varphi_{11}, \\
y_{i2} &= \varphi_{21} + \varphi_{22} \log(x-a_i), \\
y_{i3} &= \varphi_{31} + \varphi_{32} \log(x-a_i) + \varphi_{33} (\log(x-a_i))^2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{im} &= \varphi_{m1} + \varphi_{m2} \log(x-a_i) + \varphi_{m3} (\log(x-a_i))^2 + \cdots + \varphi_{mm} (\log(x-a_i))^{m-1},
\end{aligned}$$

35] wo die Grössen φ Functionen von x von der Beschaffenheit sind, dass diejenigen, welche denselben ersten Index haben, mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Wir wollen von einem solchen Systeme sagen, dass es zum singulären Punkte a gehört.

In No. 3 haben wir gezeigt, dass es ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\text{(1.)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y$$

giebt, wovon ein Element mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Um-

gebung von a_t eindeutig wird; dadurch ist die Form von y_{i1} gerechtfertigt. — Setzt man in die Differentialgleichung (1.)

$$y = y_{i1}\int u\,dx, \tag{2.}$$

so erhält man für u eine lineare Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} = q_1\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + q_{m-1}u, \tag{3.}$$

deren Coefficienten ganze Functionen der Grössen p und der Grössen

$$\frac{1}{y_{i1}}\frac{dy_{i1}}{dx}, \quad \frac{1}{y_{i1}}\frac{d^2y_{i1}}{dx^2}, \quad \cdots$$

sind. Diese Differentialgleichung hat daher in der Umgebung von a_t ausser diesem letzteren Punkte noch diejenigen, in denen y_{i1} verschwindet, als singuläre Punkte. Derselben genügen aber die $m-1$ Integrale

$$u_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i2}}{y_{i1}}\right), \quad u_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i3}}{y_{i1}}\right), \quad \ldots, \quad u_{m-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{im}}{y_{i1}}\right),$$

wenn $y_{i2}, y_{i3}, \ldots, y_{im}$ Integrale der Differentialgleichung (1.) sind, die mit y_{i1} zusammen ein Fundamentalsystem constituiren. Zwischen den Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ findet keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt. Denn aus dieser Relation würde durch Integration eine ähnliche für $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$ folgen. Daher constituiren die Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (3.); und es ist unter den in der Umgebung von a liegenden singulären Punkten der Differentialgleichung (3.) a_t der einzige, für den eine Verzweigung der Integrale derselben stattfinden kann. Umschliesst man den Punkt a_t mit einer beliebig kleinen, aber endlichen Curve, so ist in dem übrigen Theile F der Umgebung von a_t die Anzahl der Punkte, für welche y_{i1} verschwindet, endlich. Denn es sei r_{i1} der Exponent, für den $(x-a_t)^{-r_{i1}}.y_{i1} = y'_{i1}$ in der Umgebung von a_t eindeutig wird, so ist y'_{i1} innerhalb F endlich, eindeutig und continuirlich. Ist diese Function auf der Begrenzung von F nirgends Null, so ist $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\log y'_{i1}$, auf diese Begrenzung erstreckt, endlich. Ist aber in einzelnen Punkten dieser Begrenzung y'_{i1} Null, so kann dieses, da y'_{i1} nicht identisch verschwindet, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschehen. Alsdann kann man aber durch eine beliebig kleine Verschiebung dieser Begrenzung eine Fläche F' herstellen, auf deren

Begrenzung y'_{i1} nicht verschwindet, und innerhalb welcher die Anzahl der Punkte, für die y'_{i1} verschwindet, von der Anzahl derer in F nur um eine endliche Zahl verschieden ist. Es ist nunmehr $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\log y'_{i1}$, auf die Begrenzung 36] von F' bezogen, endlich. Da aber $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\log y'_{i1}$ auf die Begrenzung von F oder F' bezogen resp. die Anzahl der Punkte innerhalb F oder F' angiebt, für die y'_{i1} verschwindet (weil die Function innerhalb dieser Flächen endlich ist), so folgt, dass y'_{i1} innerhalb F nur in einer endlichen Anzahl von Punkten verschwindet. — Es lässt sich daher innerhalb F ein den Punkt a_i umgebender Ring S von endlicher Breite bestimmen, innerhalb dessen y_{i1} nicht verschwindet und daher die Coefficienten der Differentialgleichung (3.) eindeutig, continuirlich und endlich sind. Mit Hülfe derselben Principien, durch welche der Satz in No. 3 bewiesen wurde, wird jetzt gezeigt, dass aus dem Fundamentalsysteme $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$, wovon kein Element innerhalb S unendlich wird, ein anderes abgeleitet werden kann, wovon ein Element u'_1 mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt innerhalb S eindeutig, continuirlich und endlich wird. Bekanntlich gilt alsdann für u'_1 innerhalb S eine Entwickelung der Form:

$$u'_1 = (x-a_i)^\varrho \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a_i)^\alpha + (x-a_i)^\varrho \sum_1^\infty{}_\alpha c_{-\alpha}(x-a_i)^{-\alpha}.$$

Enthält dieser Ausdruck nicht die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so folgt nach den Principien der No. 1 aus der Gleichung (2.) ein Integral y_{i2} der Differentialgleichung (1.) der Form

$$y_{i2} = \varphi_{21},$$

wo φ_{21} mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig wird.

Enthält aber der Ausdruck für u'_1 die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so erhält man aus der Gleichung (2.)

$$y_{i2} = \varphi_{21} + \varphi_{22}\log(x-a_i),$$

wo φ_{21} und φ_{22} mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Hierdurch ist die in dem obigen Satze aufgestellte Form von y_{i2} begründet.

Setzt man

(4.) $$u = u'_1 \int v\,dx,$$

so erhält man für v eine lineare Differentialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} = r_1\frac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots + r_{m-2}v, \tag{5.}$$

deren Coefficienten ganze Functionen der Grössen q und der Grössen

$$\frac{1}{u_1'}\frac{du_1'}{dx}, \quad \frac{1}{u_1'}\frac{d^2u_1'}{dx^2}, \quad \cdots$$

sind. Diese Differentialgleichung hat daher in der Umgebung von a ausser diesem letzteren Punkte noch diejenigen Punkte, in denen y_{i1} oder u_1' verschwindet, zu singulären Punkten. Es ist wieder leicht zu zeigen, dass von denselben a_i der einzige ist, in dem eine Verzweigung stattfinden kann, und dass die Anzahl derjenigen von ihnen, die sich innerhalb F befinden, endlich ist. Daraus ergiebt sich alsdann, dass man ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.) finden kann, wovon ein Element v_1 mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt innerhalb eines den Punkt a_i umgebenden, ganz in den Ring S hineinfallenden endlichen Ringes S' eindeutig, endlich und continuirlich wird. Es ist alsdann innerhalb S'

$$v_1 = (x-a_i)^\sigma \sum_0^\infty{}_\alpha d_\alpha (x-a_i)^\alpha + (x-a_i)^\sigma \sum_1^\infty{}_\alpha d_{-\alpha}(x-a_i)^{-\alpha}.$$

Enthält dieser Ausdruck nicht die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so erhält man aus [37 der Gleichung (4.) ein Integral der Differentialgleichung (3.) der Form

$$u_2' = \psi,$$

wo ψ die Eigenschaft hat, mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt innerhalb S' eindeutig, continuirlich und endlich zu werden. Es lässt sich daher ψ innerhalb S' unter der Form

$$\psi = (x-a_i)^\tau \sum_0^\infty{}_\alpha e_\alpha (x-a_i)^\alpha + (x-a_i)^\tau \sum_1^\infty{}_\alpha e_{-\alpha}(x-a_i)^{-\alpha}$$

darstellen. Enthält auch diese Reihe nicht die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so ergiebt die Gleichung (2.) ein Integral y_{i2} der Differentialgleichung (1.) der Form

$$y_{i2} = \varphi_{21}, \tag{a}$$

wo φ_{21} mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig wird.

Enthält aber die Reihe für ψ die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so ergiebt die Gleichung (2.) ein Integral der Form

$$y_{i3} = \varphi_{31} + \varphi_{32}\log(x-a_i), \tag{b}$$

wo φ_{31} und φ_{32} mit derselben Potenz von $x-a$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Enthält die Reihe für v_1 die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so liefert die Gleichung (4.) ein Integral der Differentialgleichung (3.) der Form

$$u_2' = \psi + \psi_1\log(x-a_i),$$

wo ψ und ψ_1 mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt innerhalb S' eindeutig, continuirlich und endlich werden. Diese Grössen lassen sich daher innerhalb S' unter der Form

$$(x-a_i)^{\tau'}\sum_0^\infty{}_\alpha e'_\alpha(x-a_i)^\alpha + (x-a_i)^{\tau'}\sum_1^\infty{}_\alpha e'_{-\alpha}(x-a_i)^{-\alpha}$$

darstellen. Enthält die Reihe für ψ_1 nicht die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so gelangt man wieder durch die Gleichung (2.) zu einem Integrale der Form (b). Enthält aber jene Reihe die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so erhält man

$$y_{i3} = \varphi_{31} + \varphi_{32}\log(x-a_i) + \varphi_{33}(\log(x-a_i))^2, \tag{c}$$

wo $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{33}$ alle mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Hierdurch ist die Form von y_{i3}, so wie sie im obigen Satze gegeben worden, begründet. Fährt man so fort, so wird überhaupt gezeigt, dass man ein System von Integralen $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$ ermitteln kann, welche die im obigen Satze aufgestellte Form haben. — Dass man aber auf diesem Wege ein Fundamentalsystem erhält, ergiebt sich aus dem Satze am Schlusse der No. 2. — Für den Punkt ∞ ergiebt sich ein Fundamentalsystem von ähnlicher Gestalt, wenn man in die Differentialgleichung (1.) $\frac{1}{z}$ statt x setzt.

Um den Verlauf der Integrale einer gegebenen linearen Differentialgleichung in der ganzen Ebene bestimmen zu können, sind mithin zweierlei Untersuchungen nöthig:

38] 1) Für jeden singulären Punkt müssen die Grössen φ bestimmt werden, wodurch das Verhalten des zugehörigen Fundamentalsystems, folglich aller Integrale in der Umgebung dieses Punktes gegeben ist.

2) Es müssen die Coefficienten der linearen Substitutionen ermittelt werden, wodurch sich die zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme durch einander ausdrücken.

Die Grössen φ lassen sich in der Umgebung von a_i durch Reihen der Form

$$\sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a)^{r+\alpha} + \sum_1^\infty{}_\alpha c_{-\alpha}(x-a_i)^{r-\alpha}$$

darstellen, wo r für alle φ mit demselben ersten Index denselben Werth hat. Man muss die Ausdrücke für die Integrale $y_{i\alpha}$ in die Differentialgleichung substituiren, um die Grössen r und die Coefficienten c zu bestimmen.

Mit Hülfe des in dieser Nummer enthaltenen Satzes kann man den Inhalt der vorigen Nummer auf eine einfachere Weise ableiten. Ich habe es jedoch der Deutlichkeit wegen vorgezogen, mich bei jener Untersuchung auf die daselbst gültigen speciellen Voraussetzungen zu stützen.

Berlin, im Januar 1865.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 115 im letzten Gliede der ersten Gleichung b_k statt b_m,

„ 129, Zeile 12 »Man vertheile« statt »Vertheilt man«,

„ 131, „ 10 v. u. a^{te} statt i^{te},

„ 135, „ 9 im Exponenten des letzten Factors $r_{\varrho\alpha}$ statt $r_{m\alpha}$,

„ 136 im zweiten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung (11.) $\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$ statt $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$,

„ 138, Zeile 9 v. u. (3.) statt (2.),

„ 153, 154 dreimal $2\pi\sqrt{-1}$ statt $2\pi i$,

„ 154—157 am Fusse des zweiten $\sum$-Zeichens in den daselbst auftretenden LAURENTschen Reihen 1 statt 0,

„ 157, Zeile 12, 13 »daselbst« statt »dasselbe«;

„ 147 unten wurde das Citat „CAUCHY etc." genauer gefasst.

2) Die vorstehende Abhandlung, die, wie mir aus Mittheilungen des Autors bekannt, in verhältnissmässig kurzer Zeit (October bis Weihnachten 1864) verfasst worden ist und als Programmarbeit zu einem vorher festgesetzten Zeitpunkte abgeliefert werden musste, wurde später in umgearbeiteter Fassung im Journal f. d. r. u. a. Mathematik veröffentlicht (siehe die folgende Abhandlung); nur die Nummern 1, 2, 6 sind im Wesentlichen unverändert in die zweite Redaction übergegangen. Die Nummern 4—7 der ersten Bearbeitung enthalten manches fehlerhafte. So ist in der No. 4 die Fassung der Aufgabe (S. 126) zu eng und demgemäss die am Schlusse dieser Nummer aufgestellte Bedingung zwar nothwendig aber nicht hinreichend — was a. a. O. behauptet und in der No. 5 zu beweisen versucht wird. In der That ist (wie aus den Erörterungen der folgenden Abhandlung hervorgeht) der Schluss im letzten Absatze von S. 143 nur dann ohne Weiteres gestattet, wenn die $r_{i1}, \ldots, r_{im}$ nicht nur von einander verschieden, sondern auch nicht um ganze Zahlen von einander verschieden sind. In der No. 6 ist in II. (S. 146) der Werth von ϱ (Gl. (3.)) unrichtig; die vorhergehende Gleichung ist ausser für den im Texte richtig angegebenen Fall $m = 2$, $\varrho = 2$ noch für $m = 1$ und ein beliebiges ϱ erfüllt; danach ist der Satz »Zweitens« zu berichtigen; in III. wäre hinzuzufügen, dass die $r_1, \ldots, r_m$ als von einander verschieden vorauszusetzen sind (vgl. die allgemeine Fassung in der No. 6 III. der folgenden Abhandlung). In der No. 7 sind die Aussagen (S. 151, Zeile 12 v. u. bis Schluss der Nummer) nur dann zutreffend, wenn noch die Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt werden, die das Auftreten von Logarithmen in den Entwickelungen der Integrale in der Umgebung eines jeden singulären Punktes verhindern.

Trotz dieser Mängel, die bei der zweiten Redaction (folgende Abhandlung), mit Ausnahme des bei der No. 6 II. angemerkten Versehens bei der Berechnung von ϱ, beseitigt worden sind, schien der vollständige Wiederabdruck dieser Abhandlung einerseits im Hinblick auf die Nummern 7, 8, andererseits mit Rücksicht darauf gerechtfertigt, dass diese erste Redaction einen wichtigen Einblick in die Entwickelung der Ideen, die den Verfasser zur Begründung der modernen Theorie der linearen Differentialgleichungen geführt haben, gewährt. SCH.

VI.

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT VERÄNDERLICHEN COEFFICIENTEN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 66, 1866, S. 121—160.)

Nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft stellt man sich [121 in der Theorie der Differentialgleichungen nicht sowohl die Aufgabe, eine gegebene Differentialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, als vielmehr die, den Verlauf ihrer Integrale für alle Punkte der Ebene, d. h. für alle Werthe der unbeschränkt Veränderlichen aus der Differentialgleichung selbst abzuleiten. Die Analysis lehrt eine Function determiniren, wenn man das Verhalten derselben in der Umgebung derjenigen Punkte ermitteln kann, für welche sie unstetig oder mehrdeutig wird. Es ist daher die wesentliche Aufgabe bei der Integration einer gegebenen Differentialgleichung, die Lage dieser Punkte und das Verhalten der Integrale in deren Umgebung festzustellen. — In diesem Sinne haben Briot und Bouquet im Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, die Differentialgleichungen der Form $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ behandelt, wenn $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ eine ganze Function von y und $\frac{dy}{dx}$ bedeutet. — In den Abhandlungen der Societät der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1857[1]) hat Riemann die Differentialgleichung hergeleitet, welcher die durch die Gausssche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen genügen; und man kann umgekehrt die dortige Abhandlung als eine solche ansehen, wodurch die Integration jener Differentialgleichung geleistet ist. — Im Folgenden er-

---

1) Riemanns Werke, (II. Aufl. 1892), S. 67. Sch.

laube ich mir einige Ergebnisse einer über lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten angestellten Untersuchung mitzutheilen, zu welcher ich durch das Studium der RIEMANNschen Abhandlung veranlasst wurde. Es ergab sich, dass die Integrale einer beliebigen linearen Differentialgleichung, welche kein von der abhängigen Variabeln freies Glied enthält, bei Umläufen um die singulären Punkte sich wie Potenzen und Logarithmen verhalten (No. 3). Von besonderem Interesse sind diejenigen linearen Differentialgleichungen, deren sämmtliche Integrale mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x-a$ multiplicirt für $x=a$ endlich bleiben, für jeden endlichen Werth 122] von a, und mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt für $x=\infty$ dieselbe Eigenschaft besitzen. Ihre Form ist in No. 4 und 5 vollständig festgestellt. Ein specieller Fall dieser Klasse von Differentialgleichungen ist die von RIEMANN in der ebenerwähnten Abhandlung erhaltene Differentialgleichung, so dass die Eigenschaften der durch die GAUSSsche Reihe darstellbaren Functionen, von denen RIEMANN ausgeht, auch von einem anderen Gesichtspunkte aus als denselben characteristisch erkannt werden (No. 6). Zu derselben Klasse von Differentialgleichungen gehören auch diejenigen linearen Differentialgleichungen, welchen nur algebraische Functionen genügen. — Im Sommer 1863 hielt WEIERSTRASS eine Vorlesung über ABELsche Functionen, worin er als Einleitung die Fundamente der Theorie der linearen Differentialgleichungen entwickelte. Dieser Vorlesung werde ich mich in der Art der begrifflichen Feststellung der Integrale einer linearen Differentialgleichung, wie sie in No. 1 angedeutet ist, im Wesentlichen anschliessen. — Die vorliegende Arbeit ist, von einzelnen hier angebrachten Vereinfachungen und Zusätzen abgesehen, zuerst im »Programm der städtischen Gewerbeschule zu Berlin, Ostern 1865« erschienen.

1.

Es sei:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y \tag{1.}$$

eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, deren Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ Functionen von x sind, die innerhalb eines einfach zusammenhangenden Flächentheils T der x-Ebene nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, im Übrigen aber innerhalb dieser Fläche eindeutig und con-

tinuirlich sind. Diejenigen Punkte innerhalb T, für welche eine oder mehrere der Functionen p unstetig sind, werden wir im Folgenden, nach dem Vorgange von WEIERSTRASS, singuläre Punkte nennen. — Es sei ferner x_0 irgend ein Punkt in T und um denselben ein Kreis beschrieben, welcher sich bis zum nächsten singulären Punkte erstreckt, so bezeichnen wir das durch diesen Kreis abgegrenzte Flächengebiet, ebenfalls nach WEIERSTRASS, als die Umgebung des Punktes x_0.

Ist nun x_0 ein Punkt, der nicht zu den singulären gehört, so giebt es innerhalb T eine in der Umgebung desselben überall endliche, eindeutige und continuirliche Function y, welche der Differentialgleichung (1.) genügt und so beschaffen ist, dass $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene [123 Werthe annehmen. Dieses lässt sich folgendermassen beweisen:

In der Umgebung von x_0 innerhalb T seien die Maxima der Moduln der Functionen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ resp. $M_1, M_2, \ldots, M_m$. Ist a_1 der dem Punkte x_0 zunächst liegende singuläre Punkt, und setzt man $\mathrm{mod}(a_1 - x_0) = r$, und

$$\frac{M_1}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_2, \quad \ldots, \quad \frac{M_m}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_m,$$

so ist bekanntlich (s. BRIOT et BOUQUET, Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, pag. 137) für jedes ganzzahlige α

$$\mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_1}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_1}{dx^\alpha}\right)_0, \quad \mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_2}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_2}{dx^\alpha}\right)_0, \quad \ldots, \quad \mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_m}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_m}{dx^\alpha}\right)_0,$$

wo wir mit $(f(x))_0$ den Werth einer Function $f(x)$ für $x = x_0$ bezeichnen.

Die sämmtlichen Ableitungen einer der Differentialgleichung (1.) genügenden Function y lassen sich auf die Form bringen:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \mathfrak{A}_{\alpha 1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \mathfrak{A}_{\alpha 2}(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \mathfrak{A}_{\alpha m}(x)y, \tag{2.}$$

worin die Grössen $\mathfrak{A}$ sich aus den Grössen p und deren Ableitungen durch die Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Man bilde nunmehr die Differentialgleichung

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \varphi_1\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \varphi_2\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \varphi_m u, \tag{3.}$$

so lassen sich die sämmtlichen Ableitungen einer derselben genügenden Func-

tion u in der ähnlichen Form

$$(4.) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} = \mathfrak{B}_{n1}(x)\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \mathfrak{B}_{n2}(x)\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \mathfrak{B}_{nm}(x)u$$

darstellen. Die Grössen $\mathfrak{B}$ werden aus den entsprechenden Grössen $\mathfrak{A}$ abgeleitet, indem man an die Stelle einer jeden Function p und ihrer Ableitungen die entsprechende Function φ und ihre entsprechenden Ableitungen setzt. Hieraus folgt, dass

$$\mathfrak{B}_{n1}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{n1}(x_0), \quad \mathfrak{B}_{n2}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{n2}(x_0), \quad \ldots, \quad \mathfrak{B}_{nm}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{nm}(x_0).$$

Wenn sich daher eine in der Umgebung von x_0 eindeutige, continuirliche und endliche Function u bestimmen lässt, der Art, dass sie der Differentialgleichung (3.) genügt, und dass für $x = x_0$ die Grössen $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ beliebig 124] gegebene positive Werthe annehmen, so existirt auch eine in der Umgebung von x_0 eindeutige, continuirliche und endliche Function y von der Beschaffenheit, dass sie der Differentialgleichung (1.) genügt, und dass

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen.

Setzt man $\frac{x - x_0}{r} = z$, so lässt sich die Differentialgleichung (3.) auf die Gestalt bringen:

$$(3a.) \qquad (1-z)\frac{d^m u}{dz^m} = M_1 r\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + M_2 r^2\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + M_m r^m u.$$

Versucht man dieser Differentialgleichung durch eine Reihe von der Form $u = \sum_0^\infty {}_a b_a z^a$ zu genügen, so findet man für jeden ganzzahligen Werth von k die Relation:

$$(5.) \quad \begin{cases} (m+k)(m+k-1)\ldots(k+1).b_{m+k} = (m+k-1)(m+k-2)\ldots(k+1)[k+M_1 r].b_{m+k-1} \\ \qquad + M_2 r^2.(m+k-2)(m+k-3)\ldots(k+1).b_{m+k-2} + \cdots + M_m r^m b_k. \end{cases}$$

Nimmt man daher $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ positiv an, so sind alle Grössen b positiv, und es ist $b_{m+k} = \frac{k+M_1 r}{m+k}\cdot b_{m+k-1} + \psi$, wo ψ eine positive Grösse ist.

Man kann annehmen, dass $M_1 r > m$. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so bleiben alle vorhergehenden Schlüsse a potiori gültig, wenn man M_1 so gross annimmt, dass dieser Bedingung Genüge geschieht.

Daher ist $b_{m+k} > b_{m+k-1}$ für jedes ganzzahlige k, d. h. die Grössen b wachsen mit ihrem Index, und deswegen ist $\frac{b_r}{b_s}$ nicht unendlich, wenn $r < s$, für alle Werthe von r und s.

Dividirt man die Gleichung (5.) durch

$$(m+k)(m+k-1)\dots(k+1).b_{m+k-1},$$

so erhält man

$$\frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = \frac{k+M_1 r}{m+k} + \frac{M_2 r^2}{(m+k)(m+k-1)} \cdot \frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}} + \dots + \frac{M_m r^m}{(m+k)(m+k-1)\dots(k+1)} \cdot \frac{b_k}{b_{m+k-1}}.$$

Hieraus folgt

$$\lim \frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = 1 \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

mithin ist

$$\lim \frac{b_{m+k} \cdot z^{m+k}}{b_{m+k-1} \cdot z^{m+k-1}} = z \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

d. h. die Reihe $u = \sum_0^\infty b_a z^a$ ist convergent, so lange der Modul von z [125 kleiner ist als 1; oder die Differentialgleichung (3.) hat innerhalb T ein in der Umgebung von x_0 gültiges Integral der Form $\sum_0^\infty c_a (x-x_0)^a$, derart dass $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$ oder auch $u_0, \left(\frac{du}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right)_0$ beliebige positive Werthe erhalten können. —

Hiermit ist die Existenz einer Function y von der oben angegebenen Beschaffenheit erwiesen. —

Umgiebt man jeden der singulären Punkte mit einem beliebig kleinen endlichen Kreise, so ist der übrig bleibende Theil der Fläche T, der T' heissen möge, eine mehrfach zusammenhangende Fläche. Ziehen wir von jedem Kreise aus eine sich selbst und die übrigen nicht schneidende Linie, z. B. eine gerade Linie, bis zur Begrenzung von T, so wird die Fläche T' durch diese Querschnitte in eine einfach zusammenhangende T'' zerlegt. Innerhalb dieser Fläche lässt sich die eben definirte Function y nur auf eine Weise fortsetzen, so dass man eine innerhalb der Fläche T'' eindeutige, continuirliche und endliche Function y erhält, welche der Differentialgleichung (1.) genügt und so beschaffen ist, dass für einen Punkt x_0 dieser Fläche

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

beliebig gegebene Werthe annehmen.

Geht man in T'' von x_0 aus und kehrt nach einer oder mehrmaliger Überschreitung eines oder mehrerer Querschnitte nach x_0 zurück, so erhalten y und dessen Ableitungen im Allgemeinen von den ursprünglichen verschiedene Werthe. Mit diesen als Anfangswerthen ist innerhalb T'' eine im Allgemeinen von y verschiedene Function bestimmt. Auf diese Weise erlangt man im Allgemeinen unendlich viele solcher Functionen. Denkt man sich die Fläche T von unendlich vielen Blättern bedeckt, alle mit denselben Querschnitten, und jedem dieser Blätter eine solche Function (einen Zweig) zuertheilt, so hangen diese Blätter längs der Querschnitte so zusammen, dass wenn x in der Fläche T' einen Querschnitt überschreitet, sich ein Zweig continuirlich in einen anderen der unendlich vielen Zweige fortsetzt, da die Werthe der Functionen in T'' zu beiden Seiten eines Querschnitts im Allgemeinen von einander verschieden sind.

Hiermit ist der Verlauf eines Integrals der Differentialgleichung (1.) innerhalb T'' vollständig bestimmt, wenn in einem Punkte dieser Fläche für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ beliebig gegebene Anfangswerthe festgesetzt sind.

126] 2.

Wenn man im Punkte x_0 der Fläche T'' für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ m verschiedene Werthsysteme festsetzt, so erhält man m particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Wir wählen, was offenbar immer möglich ist, diese Werthsysteme so, dass die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m \end{vmatrix}$$

für $x = x_0$ nicht verschwindet. Alsdann kann jedes Integral η, welches dadurch bestimmt ist, dass $\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d^2\eta}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ resp. die beliebig gegebenen Anfangswerthe $\eta_0, \eta_0', \eta_0'', \ldots, \eta_0^{(m-1)}$ annehmen, als lineare homogene Function von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ mit constanten Coefficienten dargestellt werden, also

(1.) $$\eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Constanten sind.

Denn unter der gemachten Voraussetzung liefert das System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= c_1(y_1)_0 + c_2(y_2)_0 + \cdots + c_m(y_m)_0,\\
\eta_0' &= c_1\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + c_2\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_0 + \cdots + c_m\left(\frac{dy_m}{dx}\right)_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_0^{(m-1)} &= c_1\left(\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}\right)_0 + c_2\left(\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}\right)_0 + \cdots + c_m\left(\frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}\right)_0,
\end{aligned}$$

für $c_1, c_2, \ldots, c_m$ endliche und bestimmte Werthe; und wenn die Function η nebst ihren $m-1$ ersten Ableitungen mit der Function $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$ und deren entsprechenden Ableitungen für $x = x_0$ übereinstimmt, so findet nach der vorigen Nummer diese Übereinstimmung für alle Werthe von x statt.

Ein solches System von Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$, für welches die Determinante D in einem innerhalb T' liegenden Punkte nicht verschwindet, durch welches sich also alle particulären Integrale in der Form der Gleichung (1.) ausdrücken lassen, werde ich im Folgenden ein Fundamentalsystem, und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dessen Elemente nennen.

Jeder Zweig einer Function y kann als ein particuläres Integral inner- [127 halb T'' mit bestimmten Anfangswerthen angesehen werden, und lässt sich daher als lineare homogene Function von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ mit constanten Coefficienten darstellen.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Zwischen je $m+1$ Zweigen derselben Function y findet eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten statt.

Denn es seien $y, y', y'', \ldots, y^{(m)}$ $m+1$ solche Zweige, so hat man folgende $m+1$ lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,\\
y' &= c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_m' y_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(m)} &= c_1^{(m)} y_1 + c_2^{(m)} y_2 + \cdots + c_m^{(m)} y_m,
\end{aligned}$$

wo die Grössen c sämmtlich bestimmte Constanten sind. Eliminirt man aus

denselben die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_m$, so erhält man als Eliminationsresultante eine lineare homogene Gleichung zwischen $y, y', \ldots, y^{(m)}$ mit constanten Coefficienten.

Um einzusehen, dass bei der Bestimmung einer Function, welche der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer genügt, der Ausgangspunkt x_0 gleichgültig sei, muss noch gezeigt werden, dass

die Determinante eines Fundamentalsystems für die ganze Fläche T' endlich und von Null verschieden ist.

Aus den m Gleichungen:

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^m y_1}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_1, \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_m \end{array}\right.$$

folgt:

$$D.p_1 = D^1,$$

wo D^1 aus D erhalten wird, wenn man $\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \cdots, \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}$ resp. durch 128] $\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \cdots, \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt. Bekanntlich ist D^1 die Ableitung von D, daher ist

$$\frac{d \log D}{dx} = p_1$$

oder

$$(3.)\qquad D = C.e^{\int p_1 dx},$$

wo C eine Constante bedeutet, die durch die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ und ihren Ableitungen für $x = x_0$ bestimmt und der Voraussetzung gemäss von Null verschieden ist. Da $\int p_1 dx$ nur für einen singulären Punkt unendlich werden kann, so folgt, dass $e^{\int p_1 dx}$ und folglich auch D innerhalb T'' überall endlich und von Null verschieden ist.

Hieraus folgt auch, dass wenn die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem bilden, sie noch ein solches System ausmachen, wenn man jede derselben auf demselben Wege innerhalb T'' um singuläre Punkte herum bis zu dem Punkte x_0 zurück fortgesetzt hat.

Die gegebene Definition eines Fundamentalsystems kann auch durch die folgende ersetzt werden:

Ein System von Integralen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ bildet ein Fundamentalsystem, wenn eine Gleichung der Form

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_m\eta_m = 0$$

für keine endlichen bestimmten Werthe der Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Statt haben kann.

Denn es sei $y_1, y_2, \ldots, y_m$ irgend ein Fundamentalsystem (im Sinne der ersten Definition), so darf man setzen:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= f_{11}y_1 + f_{12}y_2 + \cdots + f_{1m}y_m,\\
\eta_2 &= f_{21}y_1 + f_{22}y_2 + \cdots + f_{2m}y_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_m &= f_{m1}y_1 + f_{m2}y_2 + \cdots + f_{mm}y_m,
\end{aligned}$$

wo die Grössen f Constanten sind. — Die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{vmatrix}$$

darf nicht verschwinden, da sonst zwischen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt finden müsste. Daher lassen sich $y_1, y_2, \ldots, y_m$ und folglich alle particulären Integrale der linearen Diffe- [129 rentialgleichung als lineare homogene Functionen der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ mit constanten Coefficienten darstellen. Dieses erfordert aber, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_1}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_1 \\ \frac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_2}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_m}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_m \end{vmatrix}$$

innerhalb T' überall endlich und von Null verschieden ist. Hierdurch ist die Übereinstimmung der beiden Definitionen erwiesen.

Bekanntlich kann man folgendermassen verfahren, um m particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y \tag{4.}$$

zu erhalten. Es sei y_1 ein particuläres Integral derselben, welches nicht identisch verschwindet, und man setze

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

so genügt z einer linearen Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} = q_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + q_2 \frac{d^{m-3} z}{dx^{m-3}} + \cdots + q_{m-1} z. \tag{5.}$$

Es sei z_1 ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$y_2 = y_1 \int z_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (4.). Man setze

$$z = z_1 \int u\, dx,$$

so genügt u einer linearen Differentialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} = r_1 \frac{d^{m-3} u}{dx^{m-3}} + r_2 \frac{d^{m-4} u}{dx^{m-4}} + \cdots + r_{m-2} u. \tag{6.}$$

Ist u_1 ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$z_2 = z_1 \int u_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (5.) und

$$y_3 = y_1 \int dx\, z_1 \int u_1\, dx \tag{130]}$$

ein drittes particuläres Integral der Differentialgleichung (4.). Fährt man so fort, so gelangt man schliesslich zu einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dw}{dx} = tw, \tag{7.}$$

und man erhält auf diese Weise m particuläre Integrale der Differentialgleichung (4.).

Wir behaupten nun,

dass die so erhaltenen particulären Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, nehmen wir $m = 3$ an. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (6.) erster Ordnung. Bildeten nun y_1, y_2, y_3 kein Fundamentalsystem, so hätte man eine Gleichung:

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 dx + c_3 y_1 \int dx z_1 \int u_1 dx = 0, \tag{8.}$$

wo c_1, c_2, c_3 Constanten sind, die nicht sämmtlich verschwinden. Da y_1 nicht identisch verschwindet, so darf man diese Gleichung durch y_1 dividiren; differentiirt man alsdann, so erhält man

$$c_2 z_1 + c_3 z_1 \int u_1 dx = 0.$$

Da z_1 nicht identisch verschwindet, so darf man wieder durch z_1 dividiren und erhält alsdann durch Differentiation

$$c_3 u_1 = 0.$$

Da nun u_1 nicht identisch verschwindet, so hätte man $c_3 = 0$. Es müsste alsdann

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 dx = 0$$

sein. Hieraus würde auf ähnliche Weise folgen $c_2 z_1 = 0$, und daher $c_2 = 0$ und folglich auch $c_1 = 0$.

Es ergiebt sich also, dass die Gleichung (8.) nicht bestehen kann, und dass daher die auf die angegebene Weise ermittelten Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Bemerkenswerth ist die Form, in welche sich die Determinante D, welche wir die Determinante des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nennen wollen, mit Hülfe der Integrale $y_1, z_1, u_1, \ldots, w$ bringen lässt.

Es ist nämlich

$$D = C . y_1^m . z_1^{m-1} . u_1^{m-2} \ldots w, \tag{9.}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Dieses wird folgendermassen bewiesen. In der Differentialgleichung [131 (5.) ist, wie leicht zu sehen,

$$q_1 = p_1 - m \frac{d \log y_1}{dx}.$$

Bezeichnet man die Determinante eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (5.) mit D_1, so folgt nach dem Gesetze der Gleichung (3.)

$$D_1 = C' . e^{\int \left[p_1 - m \frac{d \log y_1}{dx}\right] dx} = C' . y_1^{-m} . e^{\int p_1 dx},$$

d. h. nach Gleichung (3.)

$$D_1 = C'' . y_1^{-m} . D, \tag{10.}$$

wo C' und C'' Constanten sind. Ebenso folgt, wenn man mit D_2 die Determinante eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (6.) bezeichnet,

$$D_2 = C''' . z_1^{-(m-1)} . D_1 = C'''' . y_1^{-m} . z_1^{-(m-1)} . D. \tag{11.}$$

Indem man so fortfährt, ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichung (9.).

Wir werden später von diesem Satze eine wichtige Anwendung machen.

3.

Nach No. 1 kommt die Aufgabe der Integration einer linearen Differentialgleichung auf die Untersuchung der Frage hinaus, was aus einem beliebigen durch die Anfangswerthe in einem Punkte x_0 bestimmten Integrale wird, wenn man es innerhalb T' um einen singulären Punkt herum bis zum Punkte x_0 zurück fortsetzt.

Es genügt zu diesem Zwecke, das Verhalten irgend eines Systems von Fundamentalintegralen zu untersuchen. Es sei daher $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y, \tag{1.}$$

wo über die Coefficienten p dieselben Voraussetzungen gemacht werden, wie am Anfange der No. 1. Ist alsdann u irgend ein Integral der Differentialgleichung (1.), so darf man setzen

$$u = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m, \tag{2.}$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_m$ Constanten sind. — Nach einem Umlaufe um einen singulären Punkt a mögen die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ resp. übergehen in $y_1', y_2', \ldots, y_m'$, so hat man nach der vorigen Nummer ein System von Gleichungen:

(3.)
$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdots + \alpha_{1m}y_m, \\ y_2' = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \cdots + \alpha_{2m}y_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m' = \alpha_{m1}y_1 + \alpha_{m2}y_2 + \cdots + \alpha_{mm}y_m, \end{array}\right. \qquad [132$$

wo die Grössen α_{rs} Constanten sind. — Nach einem Umlaufe um den Punkt a geht alsdann u über in

(4.)
$$u' = y_1 \sum_1^m{}_i \alpha_{i1}x_i + y_2 \sum_1^m{}_i \alpha_{i2}x_i + \cdots + y_m \sum_1^m{}_i \alpha_{im}x_i.$$

Wir wollen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ so bestimmen, dass

$$u' = \omega . u$$

wird, wo ω eine Constante bedeutet. Multiplicirt man zu dem Zweck die Gleichung (2.) mit ω und subtrahirt sie alsdann von der Gleichung (4.), so ergiebt der Umstand, dass zwischen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, zur Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ das folgende System von Gleichungen:

(5.)
$$\left\{\begin{array}{l} x_1(\alpha_{11}-\omega) + x_2\alpha_{21} + \cdots + x_m\alpha_{m1} = 0, \\ x_1\alpha_{12} + x_2(\alpha_{22}-\omega) + \cdots + x_m\alpha_{m2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1\alpha_{1m} + x_2\alpha_{2m} + \cdots + x_m(\alpha_{mm}-\omega) = 0. \end{array}\right.$$

Ist ω eine Wurzel der Gleichung

(6.)
$$A = \left|\begin{array}{cccc} \alpha_{11}-\omega & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\omega & \cdots & \alpha_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{mm}-\omega \end{array}\right| = 0,$$

so lassen sich die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ so bestimmen, dass sie nicht alle verschwinden. Die Determinante

$$\vartheta = \left|\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{array}\right|$$

ist von Null verschieden, da nach der No. 2 die Functionen $y_1', y_2', \ldots, y_m'$

ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden. Hieraus folgt, dass die sämmtlichen
133] Wurzeln der Gleichung (6.) von Null verschieden sind. Setzt man daher

$$\omega = e^{2r\pi\sqrt{-1}},$$

und legt dem r einen der unendlich vielen und um ganze Zahlen verschiedenen, endlichen Werthe bei, welche diese Gleichung befriedigen, so wird $u.(x-a)^{-r}$ in der Umgebung von a eindeutig.

Wir nennen die Gleichung (6.) die zum singulären Punkte a gehörige Fundamentalgleichung. Diese Benennung wird gerechtfertigt durch folgenden Satz:

Die Coefficienten der nach Potenzen von ω entwickelten Gleichung (6.) sind von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig.

Es ist nämlich der Coefficient von ω^k der Gleichung $A = 0$ bekanntlich die Summe der Hauptunterdeterminanten der k^{ten} Ordnung der Determinante δ. Es sei nunmehr $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ein neues Fundamentalsystem, welches mit dem vorigen durch die m Gleichungen

$$u_\alpha = k_{\alpha 1} y_1 + k_{\alpha 2} y_2 + \cdots + k_{\alpha m} y_m \quad (\text{für } \alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

wo die Grössen k Constanten sind, zusammenhängt, man setze die Substitution

$$(K) = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{m1} & k_{m2} & \ldots & k_{mm} \end{Bmatrix}$$

mit der Substitution

$$(A) = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{Bmatrix}$$

zusammen und die resultirende Substitution mit der inversen Substitution von (K), die wir in üblicher Weise mit $(K)^{-1}$ bezeichnen wollen. Alsdann ist die Summe der Hauptunterdeterminanten der k^{ten} Ordnung derjenigen Determinante, welche aus den Elementen der Substitution $(K)(A)(K)^{-1}$ gebildet wird, der Coefficient von ω^k in der Gleichung $A' = 0$, welche an die Stelle

von $A = 0$ tritt, wenn man das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots, y_m$ durch das Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ersetzt. Nach einer bekannten Eigenschaft der Unterdeterminanten (vergl. Brioschi, Determinanten, § 7, Formel 61) ergiebt sich nun ohne Mühe, dass dieser Coefficient gleich ist dem Coefficienten von ω^k in der Gleichung $A = 0$.

I. Es seien die Wurzeln der Fundamentalgleichung (6.) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ [134 alle von einander verschieden, so ergiebt die Substitution jeder derselben in das Gleichungssystem (5.) ein Werthsystem $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Das zur Wurzel ω_a gehörige Werthsystem dieser Grössen sei $c_{a1}, c_{a2}, \ldots, c_{am}$, so liefert die Gleichung

$$(7.) \qquad u_a = c_{a1} y_1 + c_{a2} y_2 + \cdots + c_{am} y_m \quad \text{für} \quad a = 1, 2, \ldots, m$$

m Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$, welche ein Fundamentalsystem bilden. Denn setzt man

$$(8.) \qquad \omega_a = e^{2r_a \pi \sqrt{-1}},$$

so ist $u_a . (x-a)^{-r_a}$ in der Umgebung von a eindeutig. Man hat daher

$$u_a = (x-a)^{r_a} \varphi_a,$$

wo φ_a eine nach ganzen Potenzen von $x-a$ und von $(x-a)^{-1}$ fortschreitende Reihe ist. — Da aber die Differenz zweier der Grössen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ weder Null noch eine ganze Zahl ist, so kann eine Gleichung der Form

$$C_1 (x-a)^{r_1} \varphi_1 + C_2 (x-a)^{r_2} \varphi_2 + \cdots + C_m (x-a)^{r_m} \varphi_m = 0,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_m$ Constanten sind, nicht bestehen, ohne dass diese sämmtlich verschwinden; woraus sich ergiebt, dass $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ein Fundamentalsystem ist.

Wir erhalten also den Satz:

Im Allgemeinen gehört zu jedem singulären Punkte a ein Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$, dessen sämmtliche Elemente mit Potenzen von $x-a$ multiplicirt in der Umgebung von a eindeutig werden, so dass

$$(9.) \qquad u_1 = (x-a)^{k_1} \varphi_1, \quad u_2 = (x-a)^{k_2} \varphi_2, \quad \ldots, \quad u_m = (x-a)^{k_m} \varphi_m,$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_m$ bestimmte endliche Grössen und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen sind.

II. Wir nehmen jetzt an, es seien Wurzeln der Fundamentalgleichung (6.) einander gleich, und zwar seien λ_1 Wurzeln gleich ω_1, λ_2 Wurzeln gleich ω_2, etc. λ_n Wurzeln gleich ω_n, wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die von einander verschiedenen Wurzeln bedeuten, so dass $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = m$. Bezeichnen wir mit v' die Function, in die irgend eine Function v nach einem Umlaufe um den Punkt a übergeht, so gilt folgendes Theorem:

Ist ω eine λfache Wurzel der Fundamentalgleichung (6.), so gehört zu derselben eine Gruppe von Integralen von folgender Eigenschaft:

135]

$$(10.)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1' &= \omega u_1,\\ u_2' &= \omega_{21}u_1 + \omega u_2,\\ u_3' &= \omega_{31}u_1 + \omega_{32}u_2 + \omega u_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\\ u_\lambda' &= \omega_{\lambda 1}u_1 + \omega_{\lambda 2}u_2 + \cdots + \omega_{\lambda,\lambda-1}u_{\lambda-1} + \omega u_\lambda, \end{aligned}\right.$$

wo die mit zwei Indices versehenen Grössen ω Constanten sind. Die zu den verschiedenen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ gehörigen Gruppen von Integralen constituiren zusammen ein Fundamentalsystem.

Um diesen Satz zu beweisen, verfahren wir folgendermassen: Es ist oben die Existenz eines Integrals nachgewiesen, welches nach einem Umlaufe um den singulären Punkt a übergeht in sich selbst multiplicirt mit ω_1, bezeichnen wir dasselbe mit $\overset{1}{u}_1$. Es ist offenbar erlaubt, das Fundamentalsystem $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, von dem wir ausgehen, durch ein zweites zu ersetzen, in welchem $\overset{1}{u}_1$ an die Stelle eines der Elemente y getreten ist. Giebt es eine zweite Wurzel der Gleichung (6.), die gleich ω_1 ist, so führt ein Verfahren, welches demjenigen ähnlich ist, das wir oben bei den Gleichungen (2.) bis (5.) angewendet haben, zur Bestimmung eines Integrals $\overset{1}{u}_2$ als lineare Function der Elemente des zweiten Fundamentalsystems derart, dass

$$\overset{1}{u}_2' = \overset{1}{\omega}_{21}\overset{1}{u}_1 + \omega_1 u_2,$$

wo $\overset{1}{\omega}_{21}$ eine neue unbestimmte Constante ist. Es ist alsdann erlaubt, das zweite Fundamentalsystem durch ein drittes zu ersetzen, in welchem $\overset{1}{u}_2$ an die Stelle eines der $m-2$ übrigen Elemente y getreten ist. — Ist eine dritte

Wurzel der Gleichung (6.) gleich ω_1, so wird man ein Integral $\overset{1}{u}_3$ als lineare Function der Elemente des dritten Fundamentalsystems bestimmen können, derart dass

$$\overset{1}{u}_3' = \overset{1}{\omega}_{31}\overset{1}{u}_1 + \overset{1}{\omega}_{32}\overset{1}{u}_2 + \omega_1\overset{1}{u}_3,$$

wo $\overset{1}{\omega}_{31}, \overset{1}{\omega}_{32}$ neue unbestimmte Constanten sind. Es ist wieder erlaubt, das dritte Fundamentalsystem durch ein viertes zu ersetzen, in welchem $\overset{1}{u}_3$ an die Stelle eines der noch übrigen $m-3$ Elemente y getreten ist. Fährt man so fort, so wird die Existenz einer Gruppe von λ_1 Integralen, die zur Wurzel ω_1 gehört und die im Satze characterisirte Beschaffenheit hat, nachgewiesen, und zu gleicher Zeit ein Fundamentalsystem hergestellt, worin λ_1 der Elemente y durch die Functionen dieser Gruppe ersetzt sind. Indem man nunmehr von diesem Fundamentalsysteme ausgeht, wird ebenso die Existenz der zur [136 Wurzel ω_2 gehörigen Gruppe von Integralen nachgewiesen, und es wird möglich sein, ein Fundamentalsystem herzustellen, welches die zu den Wurzeln ω_1 und ω_2 gehörigen Gruppen von Integralen als Elemente enthält. Indem man von diesem Fundamentalsystem ausgeht, und so fortfährt, wird schliesslich gezeigt, dass zu jeder Wurzel ω_α der Gleichung (6.) eine Gruppe von λ_α Integralen mit den im Satze angegebenen Eigenschaften gehöre, und dass alle Gruppen zusammen ein Fundamentalsystem bilden.

Aus diesem hier angedeuteten Verfahren geht zugleich hervor, dass die mit doppeltem Index versehenen Grössen ω der Gleichungen (10.), wenn sie nicht verschwinden, willkürliche Werthe annehmen können.

Als Corollar zu diesem Theoreme ergiebt sich ein Satz, welcher das Verhalten der Elemente eines Fundamentalsystems, folglich eines jeden Integrals, in der Umgebung eines beliebigen singulären Punktes kennen lehrt, in dem Falle, dass die zu diesem Punkte gehörige Fundamentalgleichung gleiche Wurzeln hat:

Es sei a irgend ein singulärer Punkt, und von den Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung seien λ_1 gleich ω_1, λ_2 gleich $\omega_2, \ldots, \lambda_n$ gleich ω_n, wo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ von einander verschieden sind, und $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = m$, so giebt es ein Fundamentalsystem, dessen Elemente in Gruppen vertheilt werden können, derart dass zu jeder der verschiedenen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Gruppe von

resp. je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ Integralen gehört. Es sei ω eine der Wurzeln und λ der Grad ihrer Vielfachheit, so hat die zu derselben gehörige Gruppe von λ Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ die Gestalt:

$$(11.)\quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = (x-a)^r \varphi_{11}, \\ u_2 = (x-a)^r \varphi_{21} + (x-a)^r \varphi_{22} . \log(x-a), \\ u_3 = (x-a)^r \varphi_{31} + (x-a)^r \varphi_{32} . \log(x-a) + (x-a)^r \varphi_{33} . [\log(x-a)]^2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_\lambda = (x-a)^r \varphi_{\lambda 1} + (x-a)^r \varphi_{\lambda 2} . \log(x-a) + \cdots + (x-a)^r \varphi_{\lambda\lambda} . [\log(x-a)]^{\lambda-1}, \end{array}\right.$$

wo r einen der unendlich vielen um ganze Zahlen von einander verschiedenen Werthe des Ausdruckes $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log\omega$ bedeutet, und die Grössen φ in der Umgebung von a eindeutige Functionen von x sind, zwischen denen die Beziehung besteht, dass jede derselben eine lineare homogene Function der Grössen $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}, \ldots, \varphi_{\lambda 1}$ mit constanten Coefficienten ist.

137] Um diesen Satz zu beweisen, sei $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots, \overset{a}{u}_{\lambda_a}$ die zur Wurzel ω_a gehörige Gruppe des vorigen Theorems, und es werde vorausgesetzt, dass von den Integralen $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots, \overset{a}{u}_{\varrho-1}$, wo $\varrho < \lambda_a$, bereits erwiesen sei, dass sie die in den ersten $\varrho-1$ der Gleichungen (11.) angegebene Form haben. Man setze nunmehr

$$(12.)\quad \overset{a}{u}_\varrho = v_{\varrho 1} + v_{\varrho 2}\log(x-a) + v_{\varrho 3}[\log(x-a)]^2 + \cdots + v_{\varrho\varrho}[\log(x-a)]^{\varrho-1},$$

so ist offenbar, dass man die Functionen $v_{\varrho 2}, v_{\varrho 3}, \ldots, v_{\varrho\varrho}$ beliebig wählen darf, während alsdann $v_{\varrho 1}$ durch diese Gleichung bestimmt ist. Wir wählen jene Functionen so, dass

$$v'_{\varrho 2} = \omega_a v_{\varrho 2}, \quad v'_{\varrho 3} = \omega_a v_{\varrho 3}, \quad \ldots, \quad v'_{\varrho\varrho} = \omega_a v_{\varrho\varrho},$$

d. h. dass $v_{\varrho\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_a}\varphi_{\varrho\mathfrak{b}}$ für $\mathfrak{b} = 2, 3, \ldots, \varrho$, wo $\varphi_{\varrho\mathfrak{b}}$ eine in der Umgebung von a eindeutige Function bedeutet, und $r_a = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log\omega_a$ ist.

Setzt man in die Gleichung

$$(13.)\qquad \overset{a}{u}'_\varrho = \overset{a}{\omega}_{\varrho 1}\overset{a}{u}_1 + \overset{a}{\omega}_{\varrho 2}\overset{a}{u}_2 + \cdots + \overset{a}{\omega}_{\varrho,\varrho-1}\overset{a}{u}_{\varrho-1} + \overset{a}{\omega}_a\overset{a}{u}_\varrho$$

linkerhand für $\overset{a}{u}'_\varrho$ den Werth, der aus der Gleichung (12.) hervorgeht, wenn

man an die Stelle von $v_{\varrho 2}, v_{\varrho 3}, \ldots, v_{\varrho\varrho}$ resp. $\omega_a v_{\varrho 2}, \omega_a v_{\varrho 3}, \ldots, \omega_a v_{\varrho\varrho}$, und an die Stelle von $\log(x-a)$ den Ausdruck $\log(x-a)+2\pi\sqrt{-1}$ und endlich $v'_{\varrho 1}$ an die Stelle von $v_{\varrho 1}$ setzt; und rechterhand für $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots, \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ die für dieselben gültigen Ausdrücke aus den Gleichungen (11.) und ebenso für $\overset{a}{u}_\varrho$ den Werth aus der Gleichung (12.), so darf man, nach Weglassung des Ausdruckes

$$\omega_a v_{\varrho 1} \log(x-a) + \omega_a v_{\varrho 2} [\log(x-a)]^2 + \cdots + \omega_a v_{\varrho\varrho} [\log(x-a)]^{\varrho-1}$$

auf beiden Seiten, die Coefficienten der gleichhohen Potenzen von $\log(x-a)$, von der ersten bis zur $\varrho-2^{\text{ten}}$, einander gleichsetzen, wodurch man $\varrho-2$ Gleichungen erhält. Die letzte dieser Gleichungen giebt $v_{\varrho\varrho}$ als lineare homogene Function der Grössen $\varphi_{rs}(x-a)^{r_a}$, die in den Functionen $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots, \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ enthalten sind. Setzt man diesen Werth von $v_{\varrho\varrho}$ in die vorletzte Gleichung ein, so giebt diese $v_{\varrho,\varrho-1}$ als lineare homogene Function derselben Grössen. Setzt man die gefundenen Werthe von $v_{\varrho\varrho}$ und $v_{\varrho,\varrho-1}$ in die drittletzte Gleichung ein, so giebt diese $v_{\varrho,\varrho-2}$ als lineare homogene Function derselben Grössen. Fährt man so fort, so bestimmt man $v_{\varrho 2}, v_{\varrho 3}, \ldots, v_{\varrho\varrho}$ als lineare homogene Functionen derselben Grössen. Es ist alsdann noch eine Gleichung von folgender Form zu befriedigen:

$$v'_{\varrho 1} + \omega_a 2\pi\sqrt{-1}\, v_{\varrho 2} + A = \omega_a v_{\varrho 1} + B, \tag{14.}$$

wo A eine lineare Function der Grössen $v_{\varrho 2}, v_{\varrho 3}, \ldots, v_{\varrho\varrho}$ und B eine lineare [138 Function der Grössen $\varphi_{rs}(x-a)^{r_a}$, die in $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots, \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ vorkommen, ist. Denkt man sich in A für die Functionen $v_{\varrho 2}, v_{\varrho 3}, \ldots, v_{\varrho\varrho}$ ihre bereits bestimmten Werthe gesetzt, so darf man $v_{\varrho 2}$ durch die Gleichung

$$\omega_a 2\pi\sqrt{-1}\, v_{\varrho 2} + A = B \tag{15.}$$

bestimmen, so dass auch $v_{\varrho 2}$ als lineare Function der Grössen $\varphi_{rs}(x-a)^{r_a}$, die in $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots, \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ vorkommen, bestimmt ist. — Es ergiebt sich alsdann für $v_{\varrho 1}$ die Gleichung

$$v'_{\varrho 1} = \omega_a v_{\varrho 1}. \tag{16.}$$

Aus dieser folgt, dass $v_{\varrho 1} = (x-a)^{r_a}\varphi_{\varrho 1}$ ist, wo $\varphi_{\varrho 1}$ eine in der Umgebung von a eindeutige Function bedeutet.

Hieraus folgt nicht nur, dass auch $\overset{a}{u}_\varrho$ die in Gleichung (11.) angenommene Gestalt hat, sondern dass die in dem Ausdrucke derselben vorkommenden

Grössen φ mit Ausnahme von $\varphi_{\varrho 1}$ lineare homogene Functionen der in den Integralen $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots, \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ enthaltenen Grössen φ sind.

Da nun $\overset{a}{u}_1$ nach den im Anfange dieser Nummer gemachten Entwickelungen, jedenfalls die in der ersten Gleichung (11.) angegebene Gestalt hat, so folgt aus den jetzigen Auseinandersetzungen für $\overset{a}{u}_2$ die Form in der zweiten Gleichung (11.), alsdann für $\overset{a}{u}_3$ die Form in der dritten Gleichung (11.) u. s. w., und zugleich ergiebt sich, dass alle Grössen φ einer Gruppe lineare homogene Functionen derjenigen sind, welche nicht mit einer Potenz eines Logarithmus multiplicirt sind; so dass hiermit unser Satz erwiesen ist. —

Ist der Punkt ∞ ein singulärer Punkt, so substituire man in die Differentialgleichung (1.) $\frac{1}{t}$ statt x, alsdann gehört zu dem singulären Punkte $t = 0$ ein Fundamentalsystem der Form (9.) oder (11.), welches das zum Punkte $x = \infty$ gehörige ist, wenn man wieder $t = \frac{1}{x}$ setzt.

Die Functionen φ der Gleichungen (9.) oder (11.) lassen sich in der Umgebung von a in Reihen entwickeln, welche nach ganzen Potenzen von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ fortschreiten. Sind die Coefficienten dieser Reihen in gegebenen Fällen vermittelst der Differentialgleichung, in welche die Ausdrücke u zu substituiren sind, bestimmt, so ist das Verhalten der Integrale in der Umgebung von a vollständig bekannt.

139] Um den Verlauf eines Integrals in der ganzen Ebene zu erforschen, müssen noch die Coefficienten der linearen Substitutionen untersucht werden, wodurch sich die zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme durch einander ausdrücken.

4.

Wir nehmen jetzt an, dass in der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y \tag{1.}$$

die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ in der ganzen unendlichen Ebene eindeutige Functionen von x seien, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ unstetig werden. Ausserdem muss jetzt im Allgemeinen der Punkt ∞ als singulärer Punkt aufgefasst werden.

Die Querschnitte, wodurch die Fläche T' in eine einfach zusammenhängende T'' zerlegt wird, sind jetzt Linien, welche von den um die Punkte

$a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ beschriebenen beliebig kleinen aber endlichen Kreisen ausgehend, sich selbst und die übrigen niemals schneidend ins Unendliche verlaufen.

Unter einem zu einem singulären Punkte a_i gehörigen Fundamentalsysteme verstehen wir von jetzt ab ein solches, dessen Elemente in der Umgebung von a_i die Form (9.) oder (11.) der vorigen Nummer haben.

Wir stellen uns nunmehr folgende Aufgabe:

Es soll die Beschaffenheit der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ der Differentialgleichung (1.) ermittelt werden, in dem Falle, dass jedes Integral y derselben mit einer endlichen bestimmten Potenz von $x-a_i$ multiplicirt für $x = a_i$ nicht mehr unendlich werde, wenn a_i einer der ϱ singulären Punkte ist, und dass y mit einer endlichen bestimmten Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt für $x = \infty$ ebenfalls nicht mehr unendlich werde.

Es ist offenbar, dass in diesem Falle in den Elementen eines jeden zu irgend einem singulären Punkte a_i gehörigen Fundamentalsystems die Grössen φ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten. Ebenso werden in dem zum Punkte ∞ gehörigen Fundamentalsysteme die Grössen φ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von x enthalten.

I. Wir setzen für ∞ das Zeichen $a_{\varrho+1}$ und bezeichnen ein Fundamentalsystem, welches zum singulären Punkte a_i gehört, mit $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$. Da die Grössen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ für jeden Werth von i aus der Zahlenreihe $1, 2, \ldots, \varrho+1$ ein Fundamentalsystem constituiren, so darf man setzen:

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(i)} = b_{11}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{12}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{1m}^{(i)} y_m^{(i)}, \\ y_2^{(i)} = b_{21}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{22}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{2m}^{(i)} y_m^{(i)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{(i)} = b_{m1}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{m2}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{mm}^{(i)} y_m^{(i)}, \end{array} \right. \qquad [140$$

wo die Grössen b_{rs} Constanten bedeuten. Wir wollen die Substitution

$$\left(\begin{array}{cccc} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \ldots & b_{1m}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \ldots & b_{2m}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1}^{(i)} & b_{m2}^{(i)} & \ldots & b_{mm}^{(i)} \end{array} \right)$$

mit $(B)_i$ bezeichnen, und für $i = 1, 2, \ldots, \varrho$

$$(3.)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_a^{(i)} = (x-a_i)^{r_{ia}}\varphi_a^{(i)}, \\ \text{und für } i=\varrho+1 \\ y_a^{(\varrho+1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\varrho+1,a}}\varphi_a^{(\varrho+1)} \end{array}\right.$$

setzen, so dass die Function $\varphi_a^{(i)}$ eine ganze Function von $\log(x-a_i)$ bedeutet, deren Coefficienten in der Umgebung von a_i eindeutige Functionen von x sind, und ebenso $\varphi_a^{(\varrho+1)}$ eine ganze Function von $\log\frac{1}{x}$, deren Coefficienten in der Umgebung von ∞ eindeutige Functionen von x sind.

Setzt man alsdann für $i=1, 2, \ldots, \varrho+1$

$$(4.)\qquad \omega_{ia} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_{ia}},$$

so sind $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots, \omega_{im}$ die m Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen Fundamentalgleichung.

Nach einem Umlaufe um den singulären Punkt a_1 gehen die Functionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}$ in lineare Functionen derselben über, welche durch Anwendung einer gewissen Substitution $(R)_1$ erhalten werden, deren Form sich aus den Gleichungen (10.) der vorigen Nummer ergiebt. Um zu finden, worin jene Functionen übergehen, wenn man einen Umlauf um den Punkt a_i macht, muss man auf dieselben zuerst die Substitution $(B)_i$, darauf eine Substitution $(R)_i$, vermöge deren die linearen Functionen von $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ bestimmt werden, in welche die letzteren Functionen nach einem Umlaufe um a_i übergehen, und deren Form aus den Gleichungen (10.) der vorigen Nummer sich ergiebt, und endlich die Substitution $(B)_i^{-1}$, womit wir wieder die inverse Substitution von $(B)_i$ bezeichnen, anwenden.

141] Durchläuft x in directer Richtung die Begrenzung einer Fläche, welche die sämmtlichen singulären Punkte enthält, darauf dieselbe Curve in entgegengesetzter Richtung, so erhält die Function offenbar ihren ursprünglichen Werth wieder. Der letztere Weg ist aber einem Umlaufe um den Punkt ∞ gleich zu achten, während der erstere durch die successiven Umläufe um die einzelnen singulären Punkte ersetzt werden kann. Man kann sich demnach, wenn man den Punkt ∞ mit zu den singulären Punkten rechnet, auch so ausdrücken: die Function nimmt zuletzt ihren früheren Werth an, wenn man successive alle singulären Punkte umkreist.

Bezeichnen wir eine Substitution (S), die durch Zusammensetzung mehrerer anderer $(k), (l), \ldots$ entstanden ist, symbolisch mit

$$(S) = (k)(l)\ldots,$$

so werden die Werthe, welche die Functionen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ nach successiver Umkreisung sämmtlicher singulärer Punkte erhalten, gefunden, wenn man auf dieselben die Substitution

$$(R)_1(B)_1(R)_1(B)_2^{-1}(B)_2(R)_2(B)_2^{-1}\ldots(B)_{\varrho+1}(R)_{\varrho+1}(B)_{\varrho+1}^{-1}$$

anwendet. — Weil nun durch diese Substitution die Functionen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ jede in sich selbst verwandelt werden, so muss sie mit der folgenden übereinstimmen:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right\}.$$

Da aber die Determinante aus den Elementen einer Substitution (S), die aus den Substitutionen $(k), (l), \ldots$ zusammengesetzt ist, gleich ist dem Producte der Determinanten aus den Elementen von (k), von (l) etc., so muss

$$\text{Det.}(R)_1 . \text{Det.}(B)_1 \text{Det.}(R)_1 \text{Det.}(B)_2^{-1} . \text{Det.}(B)_2 \text{Det.}(R)_2 \text{Det.}(B)_2^{-1}\ldots \\ \times \text{Det.}(B)_{\varrho+1} \text{Det.}(R)_{\varrho+1} \text{Det.}(B)_{\varrho+1}^{-1} = 1$$

sein.

Nun ist

$$\text{Det.}(B)_i . \text{Det.}(B)_i^{-1} = 1,$$

und wie aus den Gleichungen (10.) der vorigen Nummer sich leicht ergiebt,

$$\text{Det.}(R)_i = \omega_{i1}\omega_{i2}\ldots\omega_{im} = e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_1^m {}_a r_{ia}};$$

folglich ist [142

$$\text{(5.)} \qquad \sum_1^{\varrho+1}{}_i \sum_1^m {}_a r_{ia} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Diese ganze Zahl wollen wir mit k bezeichnen.

Nennt man r_{ia} den Exponenten, zu dem $y_a^{(i)}$ gehört, so kann man dieses Resultat so aussprechen:

Die Summe der Exponenten, zu welchen die Elemente der sämmtlichen $\varrho+1$ Fundamentalsysteme gehören, ist eine ganze Zahl.

Oder auch

Die Summe der Logarithmen der Wurzeln der $\varrho+1$ verschiedenen Fundamentalgleichungen ist ein ganzes Vielfaches von $2\pi\sqrt{-1}$.

II. Man kann annehmen, dass in den Gleichungen (3.) die Grössen r_{ia} so gewählt sind, dass $\varphi_a^{(i)}$ für $x=a$ nicht verschwindet und nur ∞ wird wie ein Ausdruck der Form

$$L = a + b\log(x-a_i) + c[\log(x-a_i)]^2 + \cdots + l[\log(x-a_i)]^{r-1},$$

und $\varphi_a^{(\varrho+1)}$ für $x=\infty$ nicht verschwindet und nur ∞ wird wie ein Ausdruck

$$L' = a' + b'\log x + c'(\log x)^2 + \cdots + l'(\log x)^{r'-1}.$$

In den Ausdrücken L und L' sind $a, b, c, \ldots, l,\ a', b', c', \ldots, l'$ Constanten und r und r' ganze Zahlen.

Es ist

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m} = p_1\dfrac{d^{m-1}y_1^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2\dfrac{d^{m-2}y_1^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_1^{(i)}, \\ \dfrac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m} = p_1\dfrac{d^{m-1}y_2^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2\dfrac{d^{m-2}y_2^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_2^{(i)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m} = p_1\dfrac{d^{m-1}y_m^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2\dfrac{d^{m-2}y_m^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_m^{(i)}. \end{array}\right.$$

Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^{m-1}y_1^{(i)}}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_1^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1^{(i)} \\ \dfrac{d^{m-1}y_2^{(i)}}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_2^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{m-1}y_m^{(i)}}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_m^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m^{(i)} \end{vmatrix} = \Delta_0^{(i)},$$

und bezeichnet mit $\Delta_a^{(i)}$ diejenige Determinante, welche man aus $\Delta_0^{(i)}$ erhält,

wenn man die $\mathfrak{a}^{te}$ Verticalreihe der letzteren durch $\frac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m}, \frac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m}, \ldots, \frac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m}$ [143 ersetzt, so ergiebt sich

$$\Delta_0^{(i)} p_\mathfrak{a} = \Delta_\mathfrak{a}^{(i)}. \tag{7.}$$

Aus den Gleichungen (2.) folgt die Relation

$$\Delta_\mathfrak{a}^{(i)} = \text{Det.}(B)_i \Delta_\mathfrak{a}^{(i)} \tag{8.}$$

für $\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \ldots, m$. — Da sowohl $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ als auch $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ ein Fundamentalsystem constituiren, darf $\text{Det.}(B)_i$ nicht verschwinden. Daher sind $\Delta_\mathfrak{a}^{(i)}$ und $\Delta_\mathfrak{a}^{(i)}$ zu gleicher Zeit eindeutig oder mehrdeutig, endlich oder unendlich, Null oder von Null verschieden. — Da ferner $y_\mathfrak{a}^{(i)}(x-a_i)^{-r_{i\mathfrak{a}}}$ für $x = a_i$ nicht verschwindet und nur unendlich wird wie L, so hat $\frac{d^s y_\mathfrak{a}^{(i)}}{dx^s}(x-a_i)^{-r_{i\mathfrak{a}}+s}$ dieselbe Eigenschaft. — Nach einem Umlaufe um a_i geht $\Delta_\mathfrak{a}^{(i)}$ über in $\text{Det.}(R)_i . \Delta_\mathfrak{a}^{(i)}$, folglich ist $\Delta_\mathfrak{a}^{(i)}$ von der Form $(x-a_i)^\varepsilon \psi$, wenn man $\varepsilon = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \text{Det.}(R)_i$ setzt, und wo ψ in der Umgebung von a_i eindeutig ist. Daher enthält der entwickelte Ausdruck von $\Delta_\mathfrak{a}^{(i)}$ für $\mathfrak{a} = 0, 1, \ldots, m$ keine Logarithmen, und

$$\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\sum_\mathfrak{a} r_{i\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

ist in der Umgebung von a_i, ebenso wie

$$\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\sum_\mathfrak{a} r_{i\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich. Nach der Gleichung (8.) hat daher auch

$$\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\sum_\mathfrak{a} r_{i\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

in der Umgebung von a_i dieselbe Eigenschaft. — Hieraus folgt, dass der Ausdruck:

$$K_0 = \Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\sum_\mathfrak{a} r_{i\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2}} (x-a_2)^{-\sum_\mathfrak{a} r_{2\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2}} \ldots (x-a_\varrho)^{-\sum_\mathfrak{a} r_{\varrho\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

für alle endlichen Werthe von x eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Weil ferner $y_\mathfrak{a}^{(\varrho+1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{-r_{\varrho+1,\mathfrak{a}}}$ für $x = \infty$ nicht verschwindet und nur unendlich wird wie L', so hat $\frac{d^s y_\mathfrak{a}^{(\varrho+1)}}{dx^s}\left(\frac{1}{x}\right)^{-r_{\varrho+1,\mathfrak{a}}+s}$ dieselbe Eigenschaft, und daher

sind, da wieder der entwickelte Ausdruck von $\Delta_a^{(\varrho+1)}$ keinen Logarithmus enthält, $\Delta_0^{(\varrho+1)} x^{\sum_a r_{\varrho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}}$ und $\Delta_0^{(1)} x^{\sum_a r_{\varrho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von $x = \infty$ eindeutig, endlich und continuirlich.

144] Daraus folgt, dass K_0 für $x = \infty$ unendlich ist höchstens von der Ordnung

$$-\sum_1^{\varrho+1} \sum_1^m r_{ia} + (\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2} = -k + (\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2}.$$

Setzt man, wie am Schlusse der No. 2, in die Differentialgleichung (1.) $y = y_1^{(i)} \int z\,dx$, und wenn z_1 ein nicht verschwindendes particuläres Integral der Differentialgleichung in z ist, $z = z_1 \int u\,dx$, und wenn u_1 ein nicht verschwindendes Integral der Differentialgleichung in u ist, $u = u_1 \int v\,dx$, und fährt so fort, so erhält man schliesslich eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integral wir mit w bezeichnen wollen. Es ist offenbar, dass man die Integrale $z_1, u_1, v_1, \ldots$ so wählen kann, dass

$$y_2^{(i)} = y_1^{(i)} \int z_1\,dx, \quad y_3^{(i)} = y_1^{(i)} \int dx\, z_1 \int u_1\,dx, \quad \text{etc.},$$

und dass die Integrale der Differentialgleichungen in $z, u, v, \ldots, w$ sämmtlich die Eigenschaft haben müssen, mit bestimmten Potenzen von $x - a_i$ multiplicirt für $x = a_i$ endlich zu werden, damit den Integralen der Differentialgleichung (1.) diese Eigenschaft zukomme. Da nun $y_2^{(i)}(x-a_i)^{-r_{ia}}$ für $x = a_i$ nicht verschwindet und nur ∞ wird wie L, so hat $y_1^{(i)} z_1 (x-a_i)^{-r_{ia}+1}$ dieselbe Eigenschaft. Da ferner $y_3^{(i)}(x-a_i)^{-r_{ia}}$ diese Eigenschaft hat, so kommt dieselbe auch der Function $y_1^{(i)} z_1 u_1 (x-a_i)^{-r_{ia}+2}$ zu etc. — Nun aber ist nach Gleichung (9.) in No. 2

$$\Delta_0^{(i)} = C.(y_1^{(i)})^m . z_1^{m-1} . u_1^{m-2} . v_1^{m-3} \ldots w,$$

wo C eine Constante bedeutet, oder

$$\Delta_0^{(i)} = C.y_1^{(i)}(y_1^{(i)}.z_1)(y_1^{(i)}.z_1.u_1)(y_1^{(i)}.z_1.u_1.v_1)\ldots(y_1^{(i)}.z_1.u_1.v_1 \ldots w),$$

daraus folgt, dass der Ausdruck

$$\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\sum_a r_{ia} + \frac{m(m-1)}{2}} \quad \text{und daher auch} \quad \Delta_0^{(1)}(x-a_i)^{-\sum_a r_{ia} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

für $x = a_i$ nicht verschwindet, und da er, wie schon bemerkt, keinen Logarithmus enthält, auch nicht unendlich wird. —

Mit Hülfe desselben Satzes aus No. 2 wird gezeigt, dass

$$\Delta_0^{(\varrho+1)} x^{\sum_a r_{\varrho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}} \quad \text{und daher auch} \quad \Delta_0^{(1)} x^{\sum_a r_{\varrho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

für $x = \infty$ nicht verschwindet und nicht unendlich wird.

Aus der Gleichung (7.) ergiebt sich (vergl. No. 2)

$$\Delta_0^{(s)} = C e^{\int p_1 dx},$$

wo C eine nicht verschwindende Constante ist. Damit [145

$$e^{\int p_1 dx} . (x - a_i)^{-\sum_a r_{ia} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

in der Umgebung von a endlich, eindeutig, continuirlich und von Null verschieden sei, muss

$$\lim (x - a_i) . p_1 \quad \text{für} \quad x = a_i$$

einen endlichen Werth haben. Bezeichnet man den Coefficienten von $(x-a_i)^{-1}$ in der Entwickelung von p_1 nach steigenden Potenzen von $(x-a_i)$ mit Γ_i, so muss

$$\Gamma_i = \sum_a r_{ia} - \frac{m(m-1)}{2}$$

sein. — Damit ferner $e^{\int p_1 dx} . x^{\sum_a r_{\varrho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, endlich, continuirlich und von Null verschieden sei, darf

$$\lim (x . p_1) \quad \text{für} \quad x = \infty$$

nicht unendlich sein. Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit $\mathfrak{F}$, so hat man

$$\mathfrak{F} = -\sum_a r_{\varrho+1,a} - \frac{m(m-1)}{2},$$

so dass

$$(9.) \qquad \sum_1^{\varrho} \Gamma_i - \mathfrak{F} = k - (\varrho - 1) \frac{m(m-1)}{2}.$$

Da aber p_1 der Voraussetzung gemäss in der ganzen Ebene eindeutig und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich ist, da wir ferner jetzt gefunden haben, dass es in diesen Punkten von einer endlichen Ordnung unendlich und für $x = \infty$ nicht unendlich ist, so ist p_1 bekanntlich eine rationale Function von x.

Die Bedingung, dass $\lim(xp_1)$ für $x = \infty$ nicht unendlich sei, erfordert, dass der Grad des Nenners von p_1 mindestens um eine Einheit höher ist als der des Zählers; in Folge dessen ist aber bekanntlich

$$\sum_1^\varrho \Gamma_i - \mathfrak{F} = 0,$$

so dass sich aus der Gleichung (9.) ergiebt

$$k = (\varrho - 1)\frac{m(m-1)}{2}. \tag{10.}$$

Daher ist K_0 eine Constante, und zwar ist diese Constante von Null verschieden, weil $\Delta_0^{(1)}$ nicht verschwinden darf, wenn $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}$ ein Fundamentalsystem constituiren sollen.

III. Auf ähnliche Weise findet man, dass der Ausdruck

146]
$$K_\mathfrak{b} = \Delta_\mathfrak{b}^{(1)}(x-a_1)^{-\sum_\alpha r_{1\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}(x-a_2)^{-\sum_\alpha r_{2\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}\ldots(x-a_\varrho)^{-\sum_\alpha r_{\varrho\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}};$$

wo $\mathfrak{b}$ jede der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ bedeutet, für jedes endliche x eindeutig, continuirlich und endlich ist. — Da ferner $\Delta_\mathfrak{b}^{(1)}.x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, endlich und continuirlich ist, so folgt, dass der Ausdruck $K_\mathfrak{b}$ eine ganze Function höchstens vom Grade

$$-k + (\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2} + (\varrho-1)\mathfrak{b} = (\varrho-1)\mathfrak{b}$$

ist.

Bezeichnet man daher mit $F_s(x)$ eine ganze Function von x höchstens vom Grade s, so folgt mit Hülfe der Gleichung (7.):

$$p_\mathfrak{b} = \frac{F_{(\varrho-1)\mathfrak{b}}(x)}{(x-a_1)^\mathfrak{b}(x-a_2)^\mathfrak{b}\ldots(x-a_\varrho)^\mathfrak{b}} \tag{11.}$$

für $\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, m$.

Die Differentialgleichung (1.) muss daher, um den in der Aufgabe gestellten Forderungen zu genügen, die folgende Form haben:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{F_{\varrho-1}(x)}{\psi}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(\varrho-1)}(x)}{\psi^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{F_{(m-1)(\varrho-1)}(x)}{\psi^{m-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{F_{m(\varrho-1)}(x)}{\psi^m}y, \tag{12.}$$

wo

$$\psi = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$$

gesetzt ist.

Wir werden in der nächsten Nummer umgekehrt nachweisen, dass jedes Integral dieser Differentialgleichung mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich wird, wenn a_i irgend ein singulärer Punkt ist, und dass jedes Integral mit einer bestimmten endlichen Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt für $x=\infty$ dieselbe Eigenschaft hat.

IV. Setzen wir

$$\frac{F_{\alpha(\varrho-1)}(x)\,.\,(x-a_i)^\alpha}{\psi^\alpha} = P_{i\alpha}(x)$$

für $\alpha = 1, 2, \dots, m$, so lässt sich die Differentialgleichung (12.) folgendermassen schreiben:

$$(13.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}y.$$

Es sei [147

$$y = (x-a_i)^r u,$$

so verwandelt sich diese Differentialgleichung in die folgende:

$$(14.)\qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{P'_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{P'_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P'_{im}(x)}{(x-a_i)^m}u,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\begin{aligned} P'_{i\alpha}(x) = {} & \frac{-m(m-1)\dots(m-\alpha+1)}{1.2\dots\alpha} r(r-1)\dots(r-\alpha+1) \\ & + \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-\alpha+1)}{1.2\dots(\alpha-1)} r(r-1)\dots(r-\alpha+2)\,P_{i1}(x) \\ & + \frac{(m-2)(m-3)\dots(m-\alpha+1)}{1.2\dots(\alpha-2)} r(r-1)\dots(r-\alpha+3)\,P_{i2}(x) \\ & + \frac{(m-3)(m-4)\dots(m-\alpha+1)}{1.2\dots(\alpha-3)} r(r-1)\dots(r-\alpha+4)\,P_{i3}(x) + \dots + P_{i\alpha}(x) \end{aligned}$$

für $\alpha = 1, 2, \dots, m$.

Es wird in der nächsten Nummer gezeigt, dass die Differentialgleichung (13.) ein oder mehrere Integrale von der Eigenschaft hat, dass sie mit einer endlichen, bestimmten Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a eindeutig, endlich und continuirlich und in a_i von Null verschieden werden.

Ist $(x-a_i)^r$ diese Potenz für eines dieser Integrale, so muss der Differentialgleichung (14.) durch eine in der Umgebung von a_i convergente Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a_i)^\alpha$$

genügt werden, wo c_0 von Null verschieden ist. Setzt man diese Reihe für u in die Differentialgleichung ein, so ergiebt der Coefficient von $(x-a_i)^{-m}$ die Gleichung:

$$P'_{im}(a_i).c_0 = 0.$$

Da aber c_0 von Null verschieden ist, so muss $P'_{im}(a) = 0$ sein. Sind daher $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ Elemente des zu a_i gehörigen Fundamentalsystems mit der angegebenen Eigenschaft, so sind die Exponenten $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$, zu denen sie gehören, Wurzeln der Gleichung

$$(15.)\quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2)P_{i1}(a_i) \\ \quad -r(r-1)\ldots(r-m+3)P_{i2}(a_i) - \cdots - rP_{i,m-1}(a_i) - P_{im}(a_i) = 0. \end{cases}$$

148] Setzt man $t = \frac{1}{x}$, so findet man ohne Mühe, dass die Differentialgleichung (12.) übergeht in:

$$(16.)\qquad \frac{d^m y}{dt^m} = \frac{\Phi_1(t)}{t}\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \frac{\Phi_2(t)}{t^2}\frac{d^{m-2}y}{dt^{m-2}} + \cdots + \frac{\Phi_m(t)}{t^m}y,$$

wo die Grössen $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots, \Phi_m(t)$ rationale Functionen von t sind, die für $t = 0$ endlich bleiben. Es ergiebt sich alsdann, dass wenn $y_1^{(\varrho+1)}, y_2^{(\varrho+1)}, \ldots, y_n^{(\varrho+1)}$ diejenigen Elemente des zum Punkte ∞ gehörigen Fundamentalsystems sind, welche mit einer bestimmten endlichen Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt in der Umgebung von $x = \infty$ endlich, eindeutig und continuirlich und für $x = \infty$ von Null verschieden werden, die Exponenten $r_{\varrho+1,1}, r_{\varrho+1,2}, \ldots, r_{\varrho+1,n}$, zu denen sie gehören, Wurzeln der Gleichung

$$(17.)\quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2)\Phi_1(0) \\ \quad -r(r-1)\ldots(r-m+3)\Phi_2(0) - \cdots - r\Phi_{m-1}(0) - \Phi_m(0) = 0 \end{cases}$$

sind. —

5.

Um den in der vorigen Nummer versprochenen Nachweis zu geben, gehen wir von der Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_{i2}(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}y$$

aus, wo i eine der Zahlen $1, 2, \ldots, \varrho$ bedeutet. Die Wurzeln der Gleichung

$$(2.)\quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2)\,P_{i1}(a_i) \\ \quad - r(r-1)\ldots(r-m+3)\,P_{i2}(a_i) - \cdots - r\,P_{i,m-1}(a_i) - P_{im}(a_i) = 0 \end{cases}$$

denken wir uns so geordnet, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser sei als der irgend einer vorhergehenden, und sie seien in dieser Reihenfolge $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$.

Setzt man nun

$$y = (x-a_i)^{r_{i1}} u,$$

so geht die Differentialgleichung (1.) über in

$$(3.)\quad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{Q_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{Q_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{Q_{im}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}u,$$

wo die Grössen $Q_{ia}(x)$ aus den Grössen $P'_{ia}(x)$ der Differentialgleichung (14.) der vorigen Nummer erhalten werden, wenn man in den Ausdrücken der letzteren r_{ia} statt r setzt, und in dem aus $P'_{im}(x)$ hervorgehenden Ausdruck [149 den durch (2.) entstehenden Factor $x-a_i$ fortlässt.

Wir formen nunmehr die Differentialgleichung (3.) um in:

$$(4.)\quad \begin{cases} (x-a_i)^{m-1}\dfrac{d^m u}{dx^m} - Q_{i1}(a_i).(x-a_i)^{m-2}\dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} \\ \quad - Q_{i2}(a_i).(x-a_i)^{m-3}\dfrac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} - \cdots - Q_{i,m-1}(a_i)\dfrac{du}{dx} \\ \quad = Q'_{i1}(x).(x-a_i)^{m-1}\dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + Q'_{i2}(x).(x-a_i)^{m-2}\dfrac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots \\ \quad + Q'_{i,m-1}(x).(x-a_i)\dfrac{du}{dx} + Q_{im}(x)u, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{Q_{i1}(x)-Q_{i1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i1}(x),\quad \frac{Q_{i2}(x)-Q_{i2}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i2}(x),\quad \ldots,$$

$$\frac{Q_{i,m-1}(x)-Q_{i,m-1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i,m-1}(x)$$

gesetzt ist.

Versucht man dieser Differentialgleichung durch eine Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_a\, c_a (x-a_i)^a$$

zu genügen, so findet man für jeden positiven ganzzahligen Werth von k:

$$(5.)\quad \left\{\begin{array}{l} [(k+1)k(k-1)\dots(k-m+2) - Q_{i1}(a_i).(k+1)k(k-1)\dots(k-m+3) \\ \quad - Q_{i2}(a_i)(k+1)k(k-1)\dots(k-m+4) - \dots - Q_{i,m-1}(a_i)(k+1)]\, c_{k+1} \\ \quad = A_{k0}c_k + A_{k1}c_{k-1} + A_{k2}c_{k-2} + \dots + A_{kk}c_0, \end{array}\right.$$

worin die Grössen A sich aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Functionen $Q'_{i1}(x)$, $Q'_{i2}(x)$, …, $Q_{im}(x)$ nach Potenzen von $x-a_i$ und aus numerischen Grössen durch die blossen Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Die Gleichung

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{l} w(w-1)\dots(w-m+2) - Q_{i1}(a_i)\,w(w-1)\dots(w-m+3) \\ \quad - Q_{i2}(a_i)\,w(w-1)\dots(w-m+4) - \dots - Q_{i,m-1}(a_i) \;=\; 0 \end{array}\right.$$

hat, wie ohne Mühe gefunden wird, die Wurzeln

$$(7.)\qquad r_{i2}-r_{i1}-1,\; r_{i3}-r_{i2}-1,\; r_{i4}-r_{i1}-1,\; \dots,\; r_{im}-r_{i1}-1.$$

Keine dieser Grössen kann wegen der über die Reihenfolge der Wurzeln 150] $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}$ gemachten Voraussetzung einer positiven ganzen Zahl oder der Null gleich sein. Demnach bleibt für jeden positiven ganzzahligen Werth von k und für $k=0$ der Coefficient von c_{k+1} der Gleichung (5.) von Null verschieden. Daher lassen sich mit Hülfe dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten c unter der Form darstellen:

$$(8.)\qquad c_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha c_0$$

für alle positiven ganzzahligen Werthe von α.

Es seien die Maxima der Moduln der Functionen

$$Q'_{i1}(x),\; Q'_{i2}(x),\; \dots,\; Q'_{i,m-1}(x),\; Q_{im}(x)$$

in der Umgebung von a_i resp. $M_1, M_2, \dots, M_{m-1}, M_m$, so ist bekanntlich für jeden ganzzahligen positiven Werth von α:

$$(9.)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{mod}\left(\dfrac{d^\alpha Q'_{i1}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\dots\alpha\,\dfrac{M_1}{r^\alpha}, \\ \mathrm{mod}\left(\dfrac{d^\alpha Q'_{i2}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\dots\alpha\,\dfrac{M_2}{r^\alpha}, \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{mod}\left(\dfrac{d^\alpha Q_{im}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\dots\alpha\,\dfrac{M_m}{r^\alpha}, \end{array}\right.$$

wo r die Entfernung des Punktes a_i vom nächsten singulären Punkte und $(f(x))_{a_i}$ den Werth von $f(x)$ für $x = a_i$ bezeichnet.

Man bilde nunmehr die Differentialgleichung:

$$(10.)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma_1 \cdot (x-a_i)^{m-2}\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \gamma_2 \cdot (x-a_i)^{m-3}\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots + \gamma_{m-1}\frac{dv}{dx} \\ &\quad = \frac{M_1}{1-\frac{x-a_i}{r}} \cdot (x-a_i)^{m-1}\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \frac{M_2}{1-\frac{x-a_i}{r}} \cdot (x-a_i)^{m-2}\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots \\ &\quad + \frac{M_{m-1}}{1-\frac{x-a_i}{r}} \cdot (x-a_i)\frac{dv}{dx} + \frac{M_m}{1-\frac{x-a_i}{r}} v, \end{aligned}\right.$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ beliebige positive Grössen sind, jedoch der Beschränkung unterworfen, dass die Gleichung

$$(11.)\quad \gamma_1 w(w-1)\ldots(w-m+3) + \gamma_2 w(w-1)\ldots(w-m+4) + \cdots + \gamma_{m-1} = 0$$

weder eine ganze positive Zahl noch die Null zur Wurzel habe. — Versucht man auch der Differentialgleichung (10.) durch eine Reihe

$$v = \sum_0^\infty {}_\alpha g_\alpha (x-a_i)^\alpha$$

zu genügen, so ergiebt sich für jedes ganzzahlige, positive k die Relation [151

$$(12.)\quad \left\{\begin{aligned} &[\gamma_1(k+1)k\ldots(k-m+3) + \gamma_2(k+1)k\ldots(k-m+4) + \cdots + \gamma_{m-1}(k+1)]\, g_{k+1} \\ &\qquad = B_{k0}g_k + B_{k1}g_{k-1} + B_{k2}g_{k-2} + \cdots + B_{kk}g_0, \end{aligned}\right.$$

wo die Grössen B sich ebenso aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Functionen $\frac{M_1}{1-\frac{x-a_i}{r}}, \frac{M_2}{1-\frac{x-a_i}{r}}, \ldots, \frac{M_m}{1-\frac{x-a_i}{r}}$ nach Potenzen von $x-a_i$ und aus numerischen Grössen zusammensetzen, wie sich die Grössen A der Gleichung (5.) aus den entsprechenden Coefficienten der Reihenentwickelungen von $Q'_{i1}(x), Q'_{i2}(x), \ldots, Q_{im}(x)$ und aus denselben numerischen Grössen zusammensetzen. Da die Grössen B sämmtlich positiv sind, so folgt aus den Ungleichheiten (9.), dass

$$(13.)\qquad B_{k\alpha} > \mathrm{mod}\, A_{k\alpha}$$

für $\alpha = 0, 1, \ldots, k$.

Es giebt stets eine endliche Grenze für k, $k = t$, derart, dass für $k \gtreqless t$

$$(14.)\left\{\begin{array}{c}\mathrm{mod}[k(k-1)\ldots(k-m+2)-Q_{i1}(a_i)k(k-1)\ldots(k-m+3)-Q_{i2}(a_i)k(k-1)\ldots(k-m+4)-\cdots-Q_{i,m-1}(a_i)] \\ > \gamma_1 k(k-1)\ldots(k-m+3)+\gamma_2 k(k-1)\ldots(k-m+4)+\cdots+\gamma_{m-1}.\end{array}\right.$$

Da nun nach Gleichung (12.) sich jedes g unter der Form

$$(15.) \qquad g_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha g_0$$

darstellen lässt, wo $\mathfrak{B}_\alpha$ eine positive Zahl ist, so sind alle Grössen g positiv, wenn man g_0 positiv annimmt. — Aus den Ungleichheiten (13.) und (14.) in Verbindung mit den Gleichungen (5.) und (12.) würde für jeden ganzzahligen Werth von k folgen

$$(16.) \qquad g_k > \mathrm{mod}\, c_k,$$

wenn dieses für $k \leqq t$ stattfände.

Nun sei unter den Moduln der Grössen

$$1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_t$$

A der grösste, und unter den Grössen

$$1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}$$

B die kleinste, und c_0 so gewählt, dass

$$(17.) \qquad \mathrm{A}\,\mathrm{mod}\, c_0 < \mathrm{B} g_0.$$

Da die Grössen g_0, B und A von Null verschieden sind, so ist diese Ungleichheit immer erfüllbar und liefert für c_0 von Null verschiedene Werthe. 152] Alsdann ist für $k \leqq t$, folglich für jedes k

$$g_k > \mathrm{mod}\, c_k.$$

Wenn daher die Reihe

$$v = \sum_0^\infty{}_\alpha g_\alpha (x-a_i)^\alpha$$

convergirt, so convergirt um so mehr die Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a_i)^\alpha,$$

wenn man über c_0 gemäss der Ungleichheit (17.) disponirt.

Multiplicirt man die Gleichung (10.) mit $1-\frac{x-a_i}{r}$ und substituirt alsdann die Reihe für v, so ergiebt sich für jeden ganzzahligen Werth von k

$$(18.)\quad \left\{\begin{aligned} &[(k+1)k(k-1)\dots(k-m+3)\gamma_1+(k+1)k(k-1)\dots(k-m+4)\gamma_2+\cdots \\ &\qquad +(k+1)\gamma_{m-1}]g_{k+1} \\ &=\left[k(k-1)\dots(k-m+2)\left(\frac{\gamma_1}{r}+M_1\right)+k(k-1)\dots(k-m+3)\left(\frac{\gamma_2}{r}+M_2\right)+\cdots\right. \\ &\qquad \left.+k\left(\frac{\gamma_{m-1}}{r}+M_{m-1}\right)+M_m\right]g_k. \end{aligned}\right.$$

Daher ist

$$\lim\frac{g_{k+1}}{g_k}(\text{für } k=\infty)=\frac{\gamma_1+rM_1}{r\gamma_1}$$

und

$$\lim\frac{g_{k+1}(x-a_i)^{k+1}}{g_k(x-a_i)^k}=\frac{\gamma_1+rM_1}{r\gamma_1}(x-a_i).$$

Die Reihe für v ist daher convergent für alle Werthe von x, für welche

$$\operatorname{mod}(x-a_i)<\frac{r\gamma_1}{\gamma_1+rM_1}.$$

Da γ_1 und r von Null verschiedene positive Grössen sind, so findet die Convergenz innerhalb eines endlichen, um den Punkt a beschriebenen Kreises statt.

Daraus folgt, dass die Reihe

$$u=\sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha(x-a_i)^\alpha$$

innerhalb desselben Kreises convergirt. Es giebt daher eine innerhalb dieses Kreises und folglich nach No. 1 in der ganzen Umgebung von a_i eindeutige, endliche und continuirliche und in a_i von Null verschiedene Function u, welche der Differentialgleichung (3.) genügt.

Hiernach giebt es also ein particuläres Integral der Differentialgleichung [153 (1.), y_{i_1}, welches mit $(x-a_i)^{-r_{i_1}}$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich und in a_i von Null verschieden ist.

Setzt man jetzt

$$(19.)\qquad y=y_{i_1}\int z\,dx,$$

so erhält man für z eine lineare Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung der

Form:

$$(1a.)\qquad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} = \frac{G_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \frac{G_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \cdots + \frac{G_{i,m-1}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}z,$$

worin die Coefficienten $G_{i1}(x)$, $G_{i2}(x)$, ..., $G_{i,m-1}(x)$ Functionen sind, welche innerhalb eines endlichen den Punkt a_i umgebenden Kreises S eindeutig, endlich und continuirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$(2a.)\qquad \begin{cases} r'(r'-1)\dots(r'-m+2) - r'(r'-1)\dots(r'-m+3)G_{i1}(a_i) \\ \quad -r'(r'-1)\dots(r'-m+4)G_{i2}(a_i) - \cdots - r'G_{i,m-2}(a_i) - G_{i,m-1}(a_i) = 0 \end{cases}$$

sind, wie leicht zu zeigen,

$$(20.)\qquad r_{i2}-r_{i1}-1,\ r_{i3}-r_{i1}-1,\ r_{i4}-r_{i1}-1,\ \dots,\ r_{im}-r_{i1}-1.$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}$ gemachten Voraussetzung in der Reihenfolge (20.) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der zu dem Exponenten r_{i1} gehörigen Function y_{i1} ergründet wurde, die Existenz einer Function z_1 nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i1}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S eindeutig, continuirlich und endlich und in a von Null verschieden wird. Setzt man in die Gleichung (19.) z_1 statt z, so erhält man ein Integral der Differentialgleichung (1.) von der Form $y_{i2} = \varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a_i)$, wo φ_1 und φ_2 nicht unendlich viele Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten, so dass y_{i2} mit einer endlichen Potenz von $x-a_i$ multiplicirt für $x = a_i$ endlich wird.

Man setze nunmehr

$$(21.)\qquad z = z_1 \int t\,dx,$$

so erhält man für t eine lineare Differentialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$(1b.)\qquad \frac{d^{m-2}t}{dx^{m-2}} = \frac{G'_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-2}t}{dx^{m-2}} + \frac{G'_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-4}t}{dx^{m-4}} + \cdots + \frac{G'_{i,m-2}(x)}{(x-a_i)^{m-2}}t,$$

worin die Coefficienten $G'_{i1}(x)$, $G'_{i2}(x)$, ..., $G'_{i,m-2}(x)$ Functionen sind, welche
154] innerhalb eines endlichen den Punkt a_i umgebenden Kreises S' eindeutig, endlich und continuirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$(2b.)\quad \begin{cases} r''(r''-1)\dots(r''-m+3)-r''(r''-1)\dots(r''-m+4)G'_{i1}(a_i) \\ \quad -r''(r''-1)\dots(r''-m+5)G'_{i2}(a_i)-\dots-r''G'_{i,m-2}(a_i)-G'_{i,m-1}(a_i) = 0 \end{cases}$$

sind, wie leicht zu zeigen,

$$(22.)\qquad r_{i2}-r_{i1}-1,\ r_{i4}-r_{i2}-1,\ \dots,\ r_{im}-r_{i2}-1.$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}$ gemachten Voraussetzung in der Reihenfolge (22.) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeden folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der Functionen y_{i1} und z_1 ergründet wurde, die Existenz einer Function t_1 nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i1}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S' eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden wird. Setzt man in die Gleichung (21.) t_1 statt t, so erhält man ein Integral der Differentialgleichung (1a.) von der Form $z_2 = \varphi'_1+\varphi'_2\log(x-a_i)$, wo φ'_1 und φ'_2 nicht unendlich viele Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten. Setzt man diesen Werth von z_2 statt z in die Gleichung (19.) ein, so erhält man ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1.) der Form $y_{i2} = \varphi''_1+\varphi''_2\log(x-a_i)+\varphi''_3[\log(x-a_i)]^2$, wo $\varphi''_1, \varphi''_2, \varphi''_3$ nicht unendlich viele Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten, und daher y_{i2} mit einer endlichen bestimmten Potenz von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich wird. — Fährt man so fort, so wird die Existenz von m particulären Integralen der Differentialgleichung (1.), welche nach No. 1 in der ganzen Umgebung von a_i definirt sind, und nach No. 2 ein Fundamentalsystem bilden, nachgewiesen, die alle mit bestimmten, endlichen Potenzen von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich werden. Daraus folgt aber, dass alle Integrale der Differentialgleichung (1.) dieselbe Eigenschaft besitzen.

Ähnlich wird für den Punkt ∞ der Beweis geliefert, indem man hierbei von der Differentialgleichung (16.) der vorigen Nummer ausgeht.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich also umgekehrt:

Jedes Integral der Differentialgleichung (12.) der vorigen Nummer hat die Eigenschaft, mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x-a$ multiplicirt für jeden endlichen Werth von a,

und mit einer bestimmten endlichen Potenz von x multiplicirt für $x = \infty$ endlich zu werden.

155] 6.

An die Untersuchungen der beiden vorigen Nummern knüpfen wir noch einige Folgerungen.

I. Wenn eine Function F die Eigenschaft hat, mit $(x-a_i)^{-k}$ multiplicirt, in der Nähe von a_i die Gestalt einer ganzen rationalen Function von $\log(x-a_i)$

$$(1.)\quad (x-a_i)^{-k}F = \varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a_i) + \varphi_2 [\log(x-a_i)]^2 + \cdots + \varphi_n [\log(x-a_i)]^n$$

anzunehmen, deren Coefficienten in der Nähe von a_i eindeutige, endliche und continuirliche Functionen von x sind, so kann k so gewählt werden, dass $(x-a_i)^{-k}F$ für $x = a_i$ auch nicht mehr verschwindet und nur unendlich wird wie eine ganze Function von $\log(x-a_i)$

$$L = a + b\log(x-a_i) + c[\log(x-a_i)]^2 + \cdots + l[\log(x-a_i)]^e$$

mit constanten Coefficienten $a, b, c, \ldots, l$. Wir sagen alsdann in Übereinstimmung mit II. in No. 4, dass F zum Exponenten k gehöre.

1) Es sei $G(x)$ eine wie F beschaffene Function, so dass

$$(2.)\quad G(x) = \psi_0 + \psi_1 \log(x-a_i) + \psi_2 [\log(x-a_i)]^2 + \cdots + \psi_l [\log(x-a_i)]^l,$$

und es gehöre $G(x)$ zum Exponenten r, so ist $\int G(x)\,dx$ (wo die Integrationsconstante Null genommen wird) eine wie F beschaffene Function, die zum Exponenten $r+1$ gehört.

Da es einleuchtend ist, dass das Integral $\int G(x)\,dx$ eine wie F beschaffene Function ist, so ist nur zu zeigen, dass es zum Exponenten $r+1$ gehört.

Setzt man

$$(x-a_i)^{-r}\cdot\psi_a = \sum_0^\infty{}_b\, c_b^a (x-a_i)^b,$$

so ist

$$(3.)\quad \int G(x)\,dx = \sum_0^\lambda{}_a\, c_0^a \int (x-a_i)^r [\log(x-a_i)]^a\,dx + \sum_1^\infty{}_b \sum_0^\lambda{}_a\, c_b^a \int (x-a_i)^{r+b} [\log(x-a_i)]^a\,dx.$$

Die einfache Summe und die Doppelsumme rechter Hand lassen sich resp. auf die Form $(x-a_i)^{r+1}\eta$ und $(x-a_i)^{r+1}\vartheta$ bringen, wo für $x = a_i$ die Function ϑ verschwindet, η aber von Null verschieden ist und nur unendlich wird wie

ein Ausdruck L. Hieraus ergiebt sich, dass $\int G(x)dx$ zum Exponenten $r+1$ gehört.

2) Sind ferner $G(x)$ und $G_1(x)$ zwei wie F beschaffene Functionen, die resp. zu den Exponenten r und r_1 gehören, so ist das Product eine wie F beschaffene Function, welche zum Exponenten $r+r_1$ gehört.

Wir haben am Schlusse der vorigen Nummer ein gewisses Fundamental- [156 system hergeleitet, welches wir mit Hülfe der eben festgesetzten Principien näher untersuchen wollen. — Um das Element $y_{i\alpha}$ zu erhalten, dient die Reihe der abgeleiteten Differentialgleichungen $m-1^{\text{ter}}$, $m-2^{\text{ter}}$ bis zu der $m-\alpha+1^{\text{ter}}$ Ordnung. Jeder dieser Differentialgleichungen entspricht eine gewisse Reihe von Grössen, und zwar denen von der Ordnung $m-1$ und $m-2$ resp. die Reihen (20.) und (22.) der vorigen Nummer, und allgemein der von der Ordnung $m-\alpha+1$ die Reihe

$$(4.)\qquad r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1,\ r_{i,\alpha+1}-r_{i,\alpha-1}-1,\ r_{i,\alpha+2}-r_{i,\alpha-1}-1,\ \ldots,\ r_{im}-r_{i,\alpha-1}-1.$$

Nach den Entwicklungen der vorigen Nummer hat die Differentialgleichung der $m-\alpha+1^{\text{ten}}$ Ordnung ein Integral, welches mit $(x-a_i)^{-(r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1)}$ multiplicirt in der Nähe von a_i eindeutig, endlich, continuirlich und für $x=a_i$ von Null verschieden ist, also eine wie F beschaffene Function ist, die zum Exponenten $r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1$ gehört. Bezeichnen wir das Integral mit v_α, so ist nach dem Verfahren am Schlusse der vorigen Nummer

$$(5.)\qquad y_{i\alpha}=y_{i1}\int dx v_1\ldots\int dx v_{\alpha-2}\int dx v_{\alpha-1}\int dx v_\alpha.$$

Durch wiederholte Anwendung der beiden für die wie F beschaffenen Functionen gegebenen Sätze ergiebt sich, dass $y_{i\alpha}$ eine wie F beschaffene Function ist, die zum Exponenten

$$(r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1)+1+(r_{i,\alpha-1}-r_{i,\alpha-2}-1)+1+\cdots+(r_{i2}-r_{i1}-1)+1+r_{i1}=r_{i\alpha}$$

gehört.

Ähnliche Betrachtungen gelten für die Differentialgleichung (16.) der Nummer 4.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Zu jedem singulären Punkte a_i der Differentialgleichung (12.) in No. 4 (und zum Punkte ∞) gehört eine der Gleichungen (15.) (und die Gleichung (17.)) derselben Nummer. In der Umgebung

irgend eines dieser Punkte giebt es stets ein Fundamentalsystem, dessen Elemente den Wurzeln der Gleichung (15.) (oder (17.)) derart entsprechen, dass zu jeder Wurzel ein Element als zu seinem Exponenten gehört.

Diesen Satz kann man auf jede der nach dem Verfahren am Schlusse der vorigen Nummer abzuleitenden $m-1$ Differentialgleichungen anwenden, derart, dass für die Differentialgleichung $m-\alpha+1^{\text{ter}}$ Ordnung die Reihe (4.) die Exponenten enthält, zu denen die Elemente ihres Fundamentalsystems gehören. Setzt man in dieser Reihe $\alpha = 2, 3, \ldots, m$, so erhält man $m-1$ Reihen, 157] die zusammen alle Differenzen der Wurzeln $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$ enthalten. Es seien irgend zwei dieser Wurzeln $r_{i\lambda}$ und $r_{i\mu}$ einander gleich, wo $\lambda > \mu$, so giebt es ein Integral w einer bestimmten der $m-1$ abgeleiteten Differentialgleichungen, welches eine wie F beschaffene zum Exponenten $r_{i\lambda}-r_{i\mu}-1$ gehörige Function ist. Geht man von dem Integrale w aus, um nach dem Verfahren der vorigen Nummer ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung zu bilden, so führt schon die erste Integration einen Logarithmus ein, so dass das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung ebenfalls Logarithmen enthält. Man hat daher den Satz:

Sollen die Integrale der Differentialgleichung (12.) der No. 4 in ihrem Ausdrucke in der Umgebung eines singulären Punktes a_i (oder des Punktes ∞) keine Logarithmen enthalten, so darf die zugehörige Gleichung (15.) (oder (17.)) derselben Nummer keine gleichen Wurzeln haben.

Aus dem Verfahren am Schlusse der vorigen Nummer ergiebt sich ferner leicht:

Wenn die Differenzen der Wurzeln einer zum singulären Punkte a_i (dem Punkte ∞) gehörigen Gleichung (15.), ((17.)) der No. 4 weder Null noch ganze Zahlen sind, so enthalten die Integrale der Differentialgleichung (12.) derselben Nummer in ihrem Ausdrucke in der Umgebung dieses Punktes keine Logarithmen.

Sind dagegen einige dieser Differenzen ganze Zahlen, so können Logarithmen auftreten.

II. Ist ein Integral y einer linearen Differentialgleichung eine algebraische Function, so hat dasselbe in der Umgebung eines singulären

Punktes a bekanntlich die Gestalt:

$$y = \sum_{0}^{\infty}{}_{a} c_a (x-a)^{-\nu+\frac{a}{\mu}},$$

wo μ die Anzahl der Elemente desjenigen Cyclus der Wurzeln der algebraischen Gleichung zwischen x und y ist, zu dem y gehört, und ν eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet, je nachdem y im Punkte a unendlich oder endlich ist. (Vergl. PUISEUX in LIOUVILLES Journal de mathématiques, t. XV und XVI.) Ein solches Integral wird daher mit einer bestimmten Potenz von $x-a$ multiplicirt für $x=a$ endlich. Hat daher eine lineare Differentialgleichung nur algebraische Integrale, so hat sie die Gestalt der Differentialgleichung (12.) in No. 4. Ferner ist ersichtlich, dass zu jedem singulären Punkte ein Fundamentalsystem von der Form (9.) in No. 3 gehört. Die Elemente desselben gehören nach I. dieser Nummer zu verschiedenen [158 Exponenten, welche Wurzeln der Gleichung (15.) oder (17.) der No. 4 sind. Da aber eine algebraische Function nach einer endlichen Anzahl von Umläufen um einen singulären Punkt ihren ursprünglichen Werth wieder annimmt, so müssen die Wurzeln dieser Gleichungen rationale Zahlen sein. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Wenn einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten in der ganzen Ebene eindeutig, und nur für eine endliche Anzahl von Punkten unstetig sind, nur algebraische Integrale genügen, so gehört sie zu der durch die Gleichung (12.) in No. 4 characterisirten Klasse von Differentialgleichungen. In diesem Falle sind die Wurzeln der Gleichungen (15.) und (17.) von einander verschiedene rationale Zahlen.

III. Nimmt man in der Differentialgleichung (12.) in No. 4 $\varrho = 1$ an, so reduciren sich sämmtliche Functionen $F_{\varrho-1}(x)$, $F_{2(\varrho-1)}(x)$, ..., $F_{m(\varrho-1)}(x)$ auf Constanten, und man erhält eine Differentialgleichung der Gestalt

$$(6.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{f_1}{x-a_1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{f_2}{(x-a_1)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{f_m}{(x-a_1)^m} y,$$

wo $f_1, f_2, \ldots, f_m$ Constanten sind. — Die Exponenten der Elemente des zu dem Punkte a_1 gehörigen Fundamentalsystems $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sind die m Wurzeln der Gleichung

$$(7.)\qquad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-m+1)-f_1 r(r-1)\dots(r-m+2) \\ \qquad -f_2 r(r-1)\dots(r-m+3)-\dots-f_m = 0. \end{cases}$$

Setzt man $y = (x-a_1)^{r_a}.u$, so erhält man eine Differentialgleichung für u, in welcher der Coefficient von u verschwindet, welcher also durch $u = \text{Const.}$ genügt wird; daraus folgt, wenn die Gleichung (7.) nur ungleiche Wurzeln hat, dass die Functionen

$$(8.)\qquad (x-a_1)^{r_1},\ (x-a_1)^{r_2},\ \dots,\ (x-a_1)^{r_m}$$

selbst das zum singulären Punkte a_1 gehörige Fundamentalsystem constituiren, so dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung (6.), wie bekannt,

$$y = \sum_1^m{}_a c_a (x-a_1)^{r_a}$$

wird, wo $c_1, c_2, \dots, c_m$ Constanten sind.

Sind aber mehrere Wurzeln der Gleichung (7.) einander gleich, so seien λ_1 Wurzeln gleich r_1, λ_2 Wurzeln gleich r_2 etc. λ_n Wurzeln gleich r_n und 159] $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n = m$. Es bilden alsdann die Gruppen von Functionen, welche man erhält, wenn man in der Gruppe

$$(x-a_1)^{r_a},\ (x-a_1)^{r_a}\log(x-a_1),\ (x-a_1)^{r_a}[\log(x-a_1)]^2,\ \dots,\ (x-a_1)^{r_a}[\log(x-a_1)]^{\lambda_a-1}$$

für a successive $1, 2, \dots, n$ setzt, zusammengenommen das zum singulären Punkt a_1 gehörige Fundamentalsystem, ganz mit unserer allgemeinen Theorie übereinstimmend.

(Vergl. CAUCHY, Exercices de mathématiques, vol. I, pag. 261.)

7.

I. Die Differentialgleichung, welcher die durch die GAUSSsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen genügen, gehört zu der in den Nummern 4 und 5 behandelten Klasse von Differentialgleichungen. Sie wird nämlich in der allgemeinsten Form aus der Differentialgleichung (12.) in No. 4 erhalten, wenn man $m = 2$ und die Anzahl der singulären Punkte $\varrho = 2$ annimmt, so dass sie die Gestalt hat:

$$(1.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F_1(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}\frac{dy}{dx} + \frac{F_2(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2}y,$$

wo $F_1(x)$ und $F_2(x)$ resp. ganze Functionen ersten und zweiten Grades von x sind.

Um die specielle Form derselben, wie sie RIEMANN in der oben erwähnten Abhandlung (S. 19[1])) gegeben hat, zu erhalten, sei:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

Setzt man

$$F_1(x) = f_0 + f_1 x; \quad F_2(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2,$$

so sind die Gleichungen, wodurch die Exponenten der zu den Punkten $0, 1, \infty$ gehörigen Fundamentalsysteme bestimmt werden, resp.

(a) $$r(r-1) + f_0 r - g_0 = 0,$$

(b) $$r(r-1) - (f_0 + f_1) r - (g_0 + g_1 + g_2) = 0,$$

(c) $$r(r-1) + (2 + f_1) r - g_2 = 0.$$

Bestimmt man die Constanten f_0, f_1, g_0, g_1, g_2 dadurch, dass man die Wurzeln der Gleichung (a) gleich α und α', der Gleichung (b) gleich 0 und γ', der Gleichung (c) gleich β und β' annimmt, wo

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma' = 1,$$

so geht die Differentialgleichung (1.) über in:

(2.) $$(1-x)\frac{d^2y}{d\log x^2} - [\alpha + \alpha' + (\beta + \beta')x]\frac{dy}{d\log x} + (\alpha\alpha' - \beta\beta' x)y = 0,$$

welches die RIEMANNsche Form ist. Wird hierbei angenommen, dass die Grössen $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, γ' weder ganze Zahlen noch gleich Null sind, so gehört zu jedem der Punkte $0, 1, \infty$ ein Fundamentalsystem der Form (9.) in [160 No. 3. Von dieser Form der Integrale der Differentialgleichung (2.) ist RIEMANN ausgegangen.

II. Die Differentialgleichung (12.) in No. 4 enthält ausser den die Lage der singulären Punkte bestimmenden Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ im Allgemeinen noch $\frac{m(m+1)\varrho}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$ Constanten, nämlich die Coefficienten der ganzen Functionen $F_{\varrho-1}(x)$, $F_{2(\varrho-1)}(x)$, $\ldots$, $F_{m(\varrho-1)}(x)$. Zu jedem singulären Punkte gehören m Exponenten (die den Elementen des bezüglichen Fundamentalsystems

[1]) Riemanns Werke (1892), S. 81. Sch.

zuertheilt sind), also zu allen singulären Punkten (den Punkt ∞ mitgerechnet) $m(\varrho+1)$ Exponenten. Von den letzteren sind nur $m(\varrho+1)-1$ willkürlich, da die Summe aller (nach No. 4) einer bestimmten ganzen Zahl gleich ist. — Die Anzahl der willkürlichen Exponenten ist der Anzahl der Constanten der Differentialgleichung gleich, wenn

$$\frac{m(m+1)\varrho}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m(\varrho+1)-1,$$

oder

$$\varrho = 1+\frac{2}{m}, \tag{3.}$$

so dass entweder

$$m = 1 \text{ und } \varrho = 3,$$

oder

$$m = 2 \text{ und } \varrho = 2.$$

Hieraus folgt:

1) Sind die Exponenten der Elemente der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme gegeben, so sind die Constanten der Differentialgleichung, welcher die durch die Gausssche Reihe darstellbaren Functionen genügen, folglich auch abgesehen von constanten Factoren die Elemente der Fundamentalsysteme selbst, vollständig bestimmt.

Dieser Satz stimmt im Wesentlichen mit dem von Riemann in der angeführten Abhandlung No. IV, Seite 11 sqq.[1]) gegebenen überein, welcher dort auf andere Weise hergeleitet ist.

Es folgt aus der Gleichung (3.):

2) Den Fall einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit 3 singulären Punkten abgerechnet, ist die Differentialgleichung (1.), welcher die durch die Gausssche Reihe darstellbaren Functionen genügen, die einzige aus der Klasse der durch die Gleichung (12.) in No. 4 repräsentirten Differentialgleichungen, welcher die in 1) angegebene Eigenschaft zukommt.

Berlin, October 1865.

---

[1]) Riemanns Werke (1892), S. 74 ff. Sch.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 165, Zeile 2 v. u. $c_1^{(m)} y_1$ statt $c_1^{(m)} y_1$,

„ 166, „ 8 v. u. ihren statt ihre,

„ 174, letzte Zeile $m-2$ statt $m-1$,

„ 175, Zeile 7 $m-3$ statt $m-2$,

„ 176, 177, 181 fünfmal $2\pi\sqrt{-1}$ statt $2\pi i$,

„ 183, letzte Zeile $\left(\frac{1}{x}\right)^{-r_{\varrho+1,\alpha}+s}$ statt $\left(\frac{1}{x}\right)^{-r_{\varrho+1,\alpha}s}$,

„ 184, Zeile 13 in der zweiten Gleichung $\int dx\, z_1$ statt $\int z_1$,

„ 196, Gleichung (3.) unter dem zweiten Integralzeichen $[\log(x-a_i)]^\alpha$ statt $\log(x-a_i)$,

„ 200, Zeile 3 $(x-a_1)^{r_\alpha}$ statt $(x-a)^{r_\alpha}$.

2) Der Beweis (No. 4, S. 184, vergl. auch die No. 2 der folgenden Abhandlung), dass der Ausdruck

$$\text{(a)} \qquad \Delta_0^{(1)}(x-a_i)^{-\sum_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

für $x = a_i$ nicht verschwindet, erfordert, wie Herr J. TANNERY (Annales de l'École Normale Supérieure, Ser. II, Bd. 4, 1875, S. 150) bemerkt hat, für den Fall, wo einige der $r_{i\alpha}$ einander gleich werden, eine Ergänzung. Es kann sich nämlich in diesem Falle ereignen, dass die Grössen $r_{i\alpha}$ durch die ihnen in der No. 4 II. auferlegte Bedingung, wonach es ein Fundamentalsystem $y_1^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ giebt, welches (nach der in der No. 6 I., S. 196 eingeführten Terminologie) zu diesen Grössen als Exponenten gehört, nicht vollkommen bestimmt sind (vergl. das von Herrn TANNERY a. a. O. aufgestellte Beispiel); man kann dann nur sagen, dass sich stets ein Fundamentalsystem angeben lässt, für welches die Exponenten $r_{i\alpha}$, zu denen es gehört, so beschaffen sind, dass der Ausdruck (a) in der That für $x = a_i$ einen endlichen und von Null verschiedenen Werth annimmt, und zwar stimmen diese Exponenten mit den Wurzeln der Gleichung (15.) der No. 4 (S. 188) — nach der in No. 4 der folgenden Abhandlung (S. 220 dieses Bandes) eingeführten Terminologie, der dem Punkte $x = a_i$ entsprechenden determinirenden Fundamentalgleichung — überein (vgl. auch STICKELBERGER, zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig, 1881, S. 14—17).

In Bezug auf das Citat S. 200 und die irrthümliche Gleichung (3.) der No. 7 (S. 202) nebst den aus dieser gezogenen Folgerungen, vergl. die der vorhergehenden Abhandlung hinzugefügten Anmerkungen zu S. 147 und zu No. 6 II. SCH.

VII.

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT VERÄNDERLICHEN COEFFICIENTEN.

(Ergänzungen zu der im 66sten Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung.[1])

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 68, 1868, S. 354—385.)

Einleitung. [354

Im Folgenden erlaube ich mir einige Ergänzungen zu meiner im 66sten Bande dieses Journals enthaltenen Arbeit[1]) zu liefern, und daran einige weitere Entwickelungen zu knüpfen. Die Sätze der §§ 4, 5, 6 der angeführten Abhandlung ergeben sich aus der Untersuchung beliebiger linearer homogener Differentialgleichungen, eingeschränkt auf das Gebiet eines singulären Punktes, in welchem die Coefficienten eine gewisse Gestalt annehmen. Die bei dieser Untersuchung sich ergebenden Sätze stellen sich nicht bloss als die wahre Quelle der dortigen Entwickelungen dar, sondern gestatten auch anderweitige Anwendungen. Die bei der besonderen Form der Coefficienten aus denselben auf rationale Weise abzuleitende Gleichung wird mit der »Fundamentalgleichung«, welche aus den Coefficienten der Differentialgleichung auf transscendente Weise gebildet ist, in engere Beziehung gesetzt, indem die Wurzeln der ersteren in Gruppen vertheilt werden, welche Gruppen einander gleicher Wurzeln der letzteren entsprechen. Die diesen Gruppen zugehörigen Integrale verlaufen in der Umgebung des singulären Punktes gewissermassen für sich selbst, so dass die abgesonderte Betrachtung derselben zu den Fundamentaleigenschaften der Integrale führt, ein Umstand, der sich schon bei der Unter-

[1]) Siehe die vorstehende Abhandlung. Sch.

suchung der allgemeinen Form der Integrale in der Umgebung eines beliebigen singulären Punktes in der oben angeführten Abhandlung § 3 kundgegeben. —

Es wird gezeigt, dass die linearen nicht homogenen Differentialgleichungen sich unserer Untersuchung unterwerfen lassen, wenn man ihnen gewisse lineare homogene Differentialgleichungen zuordnet. Die sich dabei ergebenden Sätze liefern auch ein wahres Kriterium dafür, ob für singuläre Punkte, in deren Umgebung die Coefficienten die oben angeführte besondere Form haben, in den Integralen einer Gruppe Logarithmen auftreten. Dieses bildet alsdann 355] den Ausgangspunkt zur Unterscheidung der wirklich singulären Punkte von den nur scheinbaren einer beliebigen Differentialgleichung.

Bei den Citaten aus der oben angeführten Abhandlung möge des Zeichen A. gebraucht werden.

1.

In der eben erwähnten Abhandlung § 3 ist die Gestalt der Integrale der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1.}$$

in der Umgebung eines singulären Punktes fixirt worden, in der Voraussetzung, dass die Coefficienten der Differentialgleichung in der Umgebung desselben Punktes eindeutig sind. Ist a ein solcher singulärer Punkt, so gehört zu demselben eine Gleichung $A = 0$ des m^{ten} Grades, deren Coefficienten gewisse von der Natur der Differentialgleichung abhängige Constanten sind, welche wir Fundamentalgleichung genannt haben (A. § 3 Gl. (6.)). Die Wurzeln derselben $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sind stets von Null verschieden. Sind nicht zwei derselben gleich, so ist gezeigt worden, dass es ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ giebt von der Beschaffenheit, dass

$$y_\alpha = (x-a)^{k_\alpha} \varphi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.}$$

wo $k_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log \omega_\alpha$ und φ_α eine in der Umgebung von a eindeutige Function ist. — Wenn hingegen die Fundamentalgleichung mehrfache Wurzeln enthält, wenn z. B. ω_1 eine λfache Wurzel derselben ist, so entspricht dieser Gruppe einander gleicher Wurzeln die Integralgruppe

$$u_\alpha = (x-a)^{k_\alpha} \sum_1^\alpha{}_b \varphi_{ab} [\log (x-a)]^{b-1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda), \tag{2b.}$$

wo φ_{ab} in der Umgebung von a eindeutige Functionen von der Beschaffenheit sind, dass φ_{ab} als eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \ldots, \varphi_{a1}$ dargestellt werden kann, während die Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_l$ nur um ganze Zahlen differirende Werthe des Ausdruckes $\frac{1}{2\pi i}\log\omega_1$ bedeuten. Die zu den verschiedenen Wurzelgruppen gehörigen Integralgruppen bilden zusammen ein Fundamentalsystem. Es ist daselbst ein Verfahren angedeutet worden, die lineare Abhängigkeit der Grössen φ_{ab} näher zu bestimmen. Haben nämlich die Grössen ω_{ab} dieselbe Bedeutung wie in A. § 3 Gl. (10.), so hat man das System von Gleichungen: [356

$$(3.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_1 \sum_2^a{}_b (2\pi i)^{b-1}\varphi_{ab} = \sum_1^{a-1}{}_b \omega_{ab}\varphi_{b1}, \\ \omega_1 \sum_2^a{}_b (b-1)(2\pi i)^{b-2}\varphi_{ab} = \sum_2^{a-1}{}_b \omega_{ab}\varphi_{b2}, \\ \omega_1 \sum_4^a{}_b \frac{(b-1)(b-2)}{2}(2\pi i)^{b-3}\varphi_{ab} = \sum_3^{a-1}{}_b \omega_{ab}\varphi_{b3}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_1(a-1)2\pi i\varphi_{aa} = \omega_{a,a-1}\varphi_{a-1,a-1}. \end{array}\right. \qquad (a=2,3,\ldots,l)$$

Aus der letzten ergiebt sich φ_{aa}, aus der vorletzten $\varphi_{a,a-1}$, u. s. w., endlich aus der ersten φ_{a2} als lineare homogene Function der Grössen φ, deren erster Index kleiner ist als a. Ist φ_{aa} von Null verschieden, so folgt aus der letzten der Gleichungen (3.), dass auch $\varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33}, \ldots, \varphi_{a-1,a-1}$ von Null verschieden sind. Setzt man daher in dieser Gleichung successive $a = 2, 3, \ldots, a$ und multiplicirt die entstandenen Gleichungen, so erhält man

$$(4.)\qquad (2\pi i\omega_1)^{a-1}.1.2\ldots(a-1)\varphi_{aa} = \omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{a,a-1}.\varphi_{11}, \quad \text{d. h.}$$

I. Der Coefficient von $[\log(x-a)]^{a-1}$ im Ausdrucke (2b.) des Elements u_a ist entweder Null oder bis auf einen constanten Factor das Integral u_1.

Dieses Resultat lässt sich auch auf andere Weise herleiten, indem man direct den folgenden Satz beweist:

II. Ist $V = v_0 + v_1\log(x-a) + v_2[\log(x-a)]^2 + \cdots + v_r[\log(x-a)]^r$ ein Integral der Differentialgleichung (1.), und sind die Coefficienten v bis auf einen allen gemeinschaftlichen Factor $(x-a)^\alpha$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen, so ist auch der Coefficient

der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ ein Integral derselben Differentialgleichung.

Substituirt man nämlich in der Differentialgleichung (1.) V für y, ordnet den erhaltenen Ausdruck nach Potenzen von $\log(x-a)$ und dividirt durch $(x-a)^\alpha$, so erhält man eine Gleichung der Form:

$$(5.) \qquad P_0 + P_1 \log(x-a) + P_2[\log(x-a)]^2 + \cdots + P_r[\log(x-a)]^r = 0,$$

wo $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_r$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen sind. Eine Gleichung dieser Form kann aber nur bestehen, wenn die Coefficienten der Potenzen von $\log(x-a)$ einzeln verschwinden.

Denn da sie auch bestehen bleiben muss, wenn x eine beliebige Anzahl von Umläufen um den singulären Punkt a gemacht hat, so folgt:

$$(6.) \quad P_0 + P_1[\log(x-a) + 2k\pi i] + P_2[\log(x-a) + 2k\pi i]^2 + \cdots + P_r[\log(x-a) + 2k\pi i]^r = 0$$

357] für jeden ganzzahligen Werth von k. Es entsprächen demnach einem bestimmten Werthe von x unzählig viele Wurzeln z der Gleichung

$$P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots + P_r z^r = 0,$$

woraus bekanntlich folgt, dass die Coefficienten $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_r$ verschwinden. — Bezeichnet man aber die linke Seite der Differentialgleichung (1.) mit $D(y)$, so ist $(x-a)^\alpha P_r = D(v_r)$. Die Gleichung $P_r = 0$ drückt also aus, dass v_r ein Integral dieser Differentialgleichung ist.

Es ist überdies $P_\alpha = D(v_\alpha) + \varphi_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r-1$, wo φ_α eine lineare Function der Grössen $v_{\alpha+1}, v_{\alpha+2}, \ldots, v_r$ und ihrer Ableitungen ist. Die Gleichungen $P_\alpha = 0$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, sind daher Differentialgleichungen für $v_{r-1}, v_{r-2}, \ldots, v_0$, durch welche man successive diese Functionen ermitteln kann.

Da jedes wie V beschaffene Integral eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten einer Integralgruppe (2b.) ist, so folgt umgekehrt der Satz II. aus dem Satze I. Jedes nicht wie V beschaffene Integral ist, als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Integrale (2.) und (2b.), eine Summe solcher wie V beschaffener Integrale.

Zur Transformation eines Fundamentalsystems dient häufig der folgende Satz:

III. Ist $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein willkürliches Fundamentalsystem, und sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ lineare homogene Functionen mit constanten Co-

efficienten von beliebigen n Elementen desselben $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$(7.) \qquad v_a = \sum_1^n{}_b c_{ab} y_b \qquad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

derart, dass die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so bilden $v_1, v_2, \ldots, v_n, y_{n+1}, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem.

Denn eine Gleichung

$$(8.) \qquad c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n + c_{n+1} y_{n+1} + \cdots + c_m y_m = 0$$

mit constanten Coefficienten wäre gleichbedeutend mit

$$y_1 \sum_1^n{}_b c_b c_{b1} + \cdots + y_n \sum_1^n{}_b c_b c_{bn} + c_{n+1} y_{n+1} + \cdots + c_m y_m = 0.$$

Da aber $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem ist, so könnte diese Gleichung nur stattfinden, wenn die Coefficienten der verschiedenen y verschwinden. Setzt man aber die Coefficienten von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Null gleich, so folgt, [358 dass entweder $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, und daher auch in (8.) $c_{n+1} = \cdots = c_m = 0$, oder $C = 0$. Diese letztere Gleichung widerspricht aber der Voraussetzung.

Die Bedingung, dass die Determinante C nicht verschwindet, ist offenbar gleichbedeutend mit der Bedingung, dass eine Gleichung der Gestalt:

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_n v_n = 0$$

mit constanten Coefficienten nicht stattfindet.

2.

Es werde in der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y = 0$$

$y = (x-a)^r z$ gesetzt, wo r eine beliebige Grösse, so geht dieselbe über in:

$$(2.) \quad (x-a)^m \frac{d^m z}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \cdots + (x-a) P_{m-1} \frac{dz}{dx} + P_m z = 0,$$

wo

$$(3.)\quad P_a = \sum_0^{a-1} \frac{(m-b)(m-b-1)\dots(m-a+1)}{a!} r(r-1)\dots(r-a+b+1)(x-a)^b p_b + (x-a)^a p_a,\ (p_0 = 1).$$

Wenn die Coefficienten p die Form haben $p_a = q_a(x-a)^{-a}$, wo q_a in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich, so folgt aus (3.), dass P_a ebenfalls in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich ist. Da die Differentialgleichung (2.) in die Differentialgleichung (1.) übergeht, wenn man $z = (x-a)^{-r}y$ setzt, so folgt umgekehrt, dass wenn die Grössen P_a in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich sind, die Ausdrücke $p_a(x-a)^a$ dieselbe Eigenschaft haben. Unter derselben Voraussetzung giebt es ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) $y_1, y_2, \dots, y_m$, dessen Elemente wie F beschaffene Functionen (A. § 6) sind und resp. zu gewissen Exponenten $r_1, r_2, \dots, r_m$ gehören. Diesem Fundamentalsysteme entspricht ein ähnlich beschaffenes Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2.) $z_1, z_2, \dots, z_m$, dessen Elemente resp. zu den Exponenten

$$\varrho_1 = r_1 - r,\quad \varrho_2 = r_2 - r,\quad \dots,\quad \varrho_m = r_m - r$$

gehören. — Wir nehmen r so an, dass die letzteren Exponenten grösser als m sind.

359] Bezeichnet man mit Δ_0 die Determinante des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \dots, y_m$, so ist (A. § 2 Gl. (3.))

$$\Delta_0 = Ce^{-\int p_1 dx}.$$

Ist ebenso Δ_0' die Determinante des Fundamentalsystems $z_1, z_2, \dots, z_m$, so ist

$$\Delta_0' = C'e^{-\int \frac{P_1}{x-a} dx},$$

wo C und C' nicht verschwindende Constanten bedeuten. Da nun nach (3.) $P_1 = mr + (x-a)p_1$, so folgt

$$\Delta_0' = C'(x-a)^{-mr} e^{-\int p_1 dx},$$

daher

$$(4.)\qquad \Delta_0 = C''(x-a)^{mr}\Delta_0',$$

wenn man $\frac{C}{C'} = C''$ setzt. Es ist von Wichtigkeit nachzuweisen, dass der Ausdruck $D_0 = \Delta_0 . (x-a)^{-\sum r_a + \frac{m(m-1)}{2}}$, wo $\sum r_a$ die Summe der Exponenten

$r_1, r_2, \ldots, r_m$ bedeutet, für $x = a$ nicht verschwindet. Dieses ist (A. § 4) mit Hülfe der Productform von Δ_0 geschehen. Allein der dortige Beweis erfordert einige Erörterungen für den Fall, dass einige der Exponenten r kleiner als m und positive ganze Zahlen sind. Um diese zu vermeiden, beweist man nach (A. § 4) aus der Productform von Δ'_0, dass $D'_0 = \Delta'_0(x-a)^{-\sum\varrho_\alpha + \frac{m(m-1)}{2}}$, wo $\sum\varrho_\alpha$ die Summe der Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ bedeutet, nicht verschwindet, da wir über diese Exponenten so verfügt haben, dass sie sämmtlich grösser als m sind. Aus der Gleichung $\sum\varrho_\alpha = -mr + \sum r_\alpha$ und Gleichung (4.) folgt aber $D_0 = C''.D'_0$, folglich ist auch D_0 für $x = a$ von Null verschieden.

3.

Sind die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1.}$$

in der Umgebung des singulären Punktes a eindeutig, und die Integrale für $x = a$ nur so unstetig, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt endlich werden, bilden ferner $y_1, y_2, \ldots, y_m$ das den Gleichungen (2.) und (2b.) der No. 1 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen, so sind sie wie F (A. § 6) beschaffene Functionen, die resp. zu den Exponenten $r_1, r_2, \ldots, r_m$ gehören mögen. Bezeichnet man wieder mit Δ_0 die Determinante dieses Fundamentalsystems, mit Δ_α diejenige Determinante, welche man aus [360 Δ_0 erhält, wenn man die α^{te} Verticalreihe durch $\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \ldots, \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt, so ist

$$p_\alpha = -\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_0} \tag{2.}$$

(A. § 4 Gl. (7.)). Nun aber ist (A. § 4 II. und III.)

$$D_\alpha = \Delta_\alpha(x-a)^{-\sum r_\alpha + \frac{m(m-1)}{2} + \alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, m)$$

in der Umgebung von a eindeutig, endlich und continuirlich, und (s. die vor. Nummer) D_0 für $x = a$ von Null verschieden, folglich ist

$$p_\alpha(x-a)^\alpha = -\frac{D_\alpha}{D_0}$$

für $x = a$ nicht unendlich. Man hat also den Satz:

Wenn die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung für einen singulären Punkt a, in dessen Umgebung die Coefficienten derselben eindeutig sind, nur so unstetig werden, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt nicht mehr unendlich sind, so hat die Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes a die Gestalt:

$$(3.)\quad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m y = 0,$$

wo $P_1, P_2, \ldots, P_m$ in der Umgebung des Punktes a eindeutig, continuirlich und endlich sind.

Dieser Satz setzt nichts über die Beschaffenheit der Coefficienten der Differentialgleichung und deren Integrale ausserhalb der Umgebung von a voraus. Man kann aber aus demselben den Satz in No. 4 Gl. (12.) der A. herleiten. Sind nämlich die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) überall eindeutige Functionen, die in einer endlichen Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ unstetig werden, und sind die Integrale für jeden dieser singulären Punkte a_λ nur so unstetig, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x-a_\lambda$ multiplicirt nicht mehr unendlich werden, so folgt aus dem eben bewiesenen Satze, dass $p_\alpha \cdot \psi^\alpha$ für jeden endlichen Werth von x endlich ist, wenn man

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho) = \psi$$

setzt. Wenn die Integrale ausserdem für $x = \infty$ nur so unstetig werden, dass sie mit bestimmten Potenzen von x multiplicirt nicht mehr unendlich sind, so folgt auf dieselbe Weise wie für die übrigen singulären Punkte, dass $p_\alpha x^\alpha$ für $x = \infty$ nicht unendlich ist. Hieraus aber ergiebt sich, wenn man

$$p_\alpha \psi^\alpha = Q_\alpha$$

361] setzt, dass $\frac{Q_\alpha}{x^{\alpha(\varrho-1)}}$ für $x = \infty$ nicht unendlich ist. Da also Q_α eine überall eindeutige, für jeden endlichen Werth endliche Function ist, die für $x = \infty$ höchstens von der Ordnung $\alpha(\varrho-1)$ unendlich wird, so ist Q_α eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $\alpha(\varrho-1)$. Hiermit ist aber die Form der Differentialgleichung (12.) in No. 4 der A. erwiesen.

4.

Wir haben (A. § 5 und 6) bewiesen, dass der Differentialgleichung

$$(1.)\quad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m(x) y = 0,$$

wo $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_m(x)$ in der Umgebung von a eindeutige, endliche und continuirliche Functionen sind, ein Fundamentalsystem von Integralen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ entspricht, dessen Elemente wie F beschaffene Functionen sind, die resp. zu den Exponenten $r_1, r_2, \ldots, r_m$ gehören, welche Wurzeln der Gleichung:

$$(2.)\quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1) + P_1(a) r(r-1)\ldots(r-m+2) \\ \qquad + P_2(a) r(r-1)\ldots(r-m+3) + \cdots + P_m(a) = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt ist der Exponent, zu welchem irgend ein wie F beschaffenes Integral der Differentialgleichung gehört, eine Wurzel der Gleichung (2.). —

Bildet man für die Differentialgleichung (1.) das Fundamentalsystem, welches in No. 1 unter (2.) und (2b.) angeführt worden, so enthalten die in demselben vorkommenden Functionen φ_a und φ_{ab} in ihrer Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von $(x-a)^{-1}$; die Elemente des Fundamentalsystems sind daher wie F beschaffene Functionen. Da nun die Grössen k_a (No. 1) nur bis auf additive ganze Zahlen bestimmt sind, so wählen wir dieselben für die Differentialgleichung (1.) so, dass k_a der Exponent ist, zu welchem das Element y_a oder u_a gehört. Hieraus folgt:

I. Das $\frac{1}{2\pi i}$fache des Logarithmus jeder Wurzel der der Differentialgleichung (1.) zugehörigen Fundamentalgleichung (A. § 3 Gl. (6.)) ist bis auf additive ganze Zahlen eine Wurzel der Gleichung (2.).

Ist η irgend ein Element des Fundamentalsystems $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, welches zum Exponenten r gehört, so ist

$$\eta(x-a)^{-r} = \psi_1 + \psi_2 \log(x-a) + \psi_3 [\log(x-a)]^2 + \cdots + \psi_\lambda [\log(x-a)]^{\lambda-1},$$

wo $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\lambda$ in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich sind. Daher kann die lineare homogene Function der Elemente des Funda- [362 mentalsystems (2.) und (2b.) der No. 1 mit constanten Coefficienten, durch

welche η dargestellt wird, nur diejenigen Elemente dieses Fundamentalsystems enthalten, deren zugehörige Exponenten sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, also die Elemente einer Gruppe (2b.) in No. 1. Hieraus folgt:

II. Das $2\pi i$fache jeder Wurzel der Gleichung (2.) ist der Logarithmus einer Wurzel der der Differentialgleichung (1.) zugehörigen Fundamentalgleichung (A. § 3 Gl. (6.)).

Aus dem Satze I folgt, dass verschiedenen Wurzeln der Fundamentalgleichung solche Wurzeln der Gleichung (2.) entsprechen, die weder gleich noch um ganze Zahlen von einander verschieden sind. Umgekehrt folgt daher aus dem Satze II, dass jeder Gruppe von Wurzeln der Gleichung (2.), die entweder gleich, oder um ganze Zahlen von einander verschieden sind, eine Gruppe gleich vieler einander gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung entspricht. Es sei eine solche Gruppe von Wurzeln der Gleichung (2.): $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda = (R)$, so geordnet, dass der reelle Theil irgend einer derselben nicht kleiner ist als der reelle Theil irgend einer nachfolgenden, so giebt es ein Integral v_1 der Gestalt $v_1 = (x-a)^{r_1}\varphi$, wo φ in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich und in a von Null verschieden ist. Der Beweis hierfür ist genau übereinstimmend mit dem Beweise des Satzes, dass ein derartiges Integral derjenigen Wurzel der Gleichung (2.) zugehört, deren reeller Theil nicht kleiner ist, als der reelle Theil irgend einer anderen Wurzel (A. § 5). Denn es genügt die hier über r_1 gemachte Voraussetzung, um das, worauf es bei diesem Beweise ankommt, festzustellen, dass nämlich der Coefficient von c_{k+1} in Gl. (5.) der A. § 5 für keinen ganzzahligen positiven Werth von k verschwindet.

Setzt man in die Differentialgleichung (1.) $y = v_1 \int z\,dx$, so gehört der Differentialgleichung für z ein Integral z_1 an der Gestalt $z_1 = (x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi'$, wo φ' dieselben Eigenschaften wie φ hat. Setzt man in die letzterhaltene Differentialgleichung $z = z_1 \int t\,dx$, so gehört der Differentialgleichung für t ein Integral t_1 an der Gestalt $t_1 = (x-a)^{r_3-r_2-1}\varphi^{(2)}$, wo $\varphi^{(2)}$ dieselben Eigenschaften wie φ hat. Fährt man so fort, so erhält man eine Differentialgleichung der Ordnung $m-(\lambda-1)$, der ein Integral $w_1 = (x-a)^{r_\lambda - r_{\lambda-1}-1}\varphi^{(\lambda-1)}$ angehört, wo $\varphi^{(\lambda-1)}$ dieselben Eigenschaften hat wie φ. Alsdann sind

$$v_2 = v_1 \int z_1\,dx, \quad v_3 = v_1 \int z_1\,dx \int t_1\,dx, \quad \ldots, \quad v_\lambda = v_1 \int z_1\,dx \int t_1\,dx \ldots \int w_1\,dx$$

Integrale der Differentialgleichung (1.), welche resp. zu den Exponenten [363 $r_2, r_3, \ldots, r_\lambda$ gehören (A. § 5 und 6).

Bezeichnet man diejenige Function, in welche eine beliebige Function $f(x)$ nach einem Umlaufe um a übergeht, mit $[f(x)]'$, so ist von einer Function F, wie sie in der A. § 6 characterisirt ist, ersichtlich, dass sie die Eigenschaften

$$\frac{d}{dx}[F]' = \left[\frac{dF}{dx}\right]' \text{ und } \int[F]'dx = [\int F dx]' + \text{Const.}$$

besitzt. Da aber $v_1, z_1, t_1, \ldots, w_1, v_2, v_3, \ldots, v_\lambda$, wie F beschaffene Functionen (A. § 6) und ausserdem $v_1(x-a)^{-r_1}$, $z_1, t_1, \ldots, w_1$ in der Umgebung von a eindeutig sind, so folgt, dass auch $\frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \ldots$ wie F beschaffene Functionen sind und daher

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{v_2}{v_1}\right]' = \frac{d}{dx}\left[\frac{v_2}{v_1}\right]' = \frac{d}{dx}\frac{v_2}{v_1}.$$

Durch Integration ergiebt sich

$$\left[\frac{v_2}{v_1}\right]' = \frac{v_2}{v_1} + C,$$

wo C eine Constante bedeutet.

Entspricht nun der Gruppe (R) die Gruppe (W) der gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung: $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_\lambda$, so ist $v_1' = \omega_1 v_1$. Daher ergiebt die letzte Gleichung:

$$[v_2]' = \omega_{21} v_1 + \omega_1 v_2, \tag{3.}$$

wenn man $C\omega_1 = \omega_{21}$ setzt. Ferner ist

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{v_3}{v_1}\right]' = \frac{d}{dx}\left[\frac{v_3}{v_1}\right]' = [z_1 \int t_1 dx]' = z_1[\int t_1 dx]' = z_1\{\int [t_1]' dx + C_1\}$$
$$= z_1\{\int t_1 dx + C_1\} = z_1 \int t_1 dx + C_1 z_1,$$

wo C_1 eine neue Constante. Durch Integration folgt:

$$\left[\frac{v_3}{v_1}\right]' = C_1 \int z_1 dx + \int z_1 dx \int t_1 dx + C_2,$$

wo C_2 eine fernere Constante. Daher ist

$$[v_3]' = \omega_{31} v_1 + \omega_{32} v_2 + \omega_1 v_3, \tag{4.}$$

wenn man $C_2\omega = \omega_{21}$, $C_1\omega_1 = \omega_{22}$ setzt. So fortfahrend findet man

$$(5.)\qquad \begin{cases} [v_4]' = \omega_{41}v_1 + \omega_{42}v_2 + \omega_{43}v_3 + \omega_1 v_4, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [v_\lambda]' = \omega_{\lambda 1}v_1 + \omega_{\lambda 2}v_2 + \cdots + \omega_1 v_\lambda. \end{cases}$$

364] Vergleicht man die Gleichungen (3.), (4.), (5.) mit den Gleichungen (10.) (A. § 3), so folgt, dass man die Integralgruppe $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ mit derjenigen der $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ (No. 1 Gl. (2b.)), welche der Gruppe (W) der Wurzeln der Fundamentalgleichung entspricht, identificiren kann. Hierdurch sind aber die Exponenten $k_1, k_2, \ldots, k_\lambda$ bestimmt, derart, dass $k_1 = r_1$, $k_2 = r_2$, $\ldots$, $k_\lambda = r_\lambda$. Zwischen den Integralen $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ findet keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt. Dieses folgt ebenso wie in A. § 2 Gl. (8.). —

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich:

III. Vertheilt man die Wurzeln der Gleichung (2.) in Gruppen (R) derart, dass jede Gruppe einander gleiche oder von einander um ganze Zahlen verschiedene Wurzeln enthält, so entspricht jeder dieser Gruppen eine Gruppe (W) gleich vieler einander gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung. Das $2\pi i$-fache der Wurzeln einer Gruppe (R) ist ein Logarithmus der Wurzel der entsprechenden Gruppe (W).

Ferner:

IV. Jeder Gruppe (R) mit den Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ entspricht eine Gruppe von wie F beschaffenen Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ derart, dass u_α zum Exponenten r_α gehört. Sind die Wurzeln r so geordnet, dass der reelle Theil irgend einer derselben nicht kleiner ist als der reelle Theil irgend einer nachfolgenden, und ist ω_1 eine der gleichen Wurzeln der dieser Gruppe entsprechenden Gruppe (W), so ist es möglich das System der Integrale $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ so zu gestalten, dass

$$(6.)\qquad [u_\alpha]' = \omega_{\alpha 1}u_1 + \omega_{\alpha 2}u_2 + \cdots + \omega_{\alpha,\alpha-1}u_{\alpha-1} + \omega_1 u_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

wo $\omega_{\alpha 1}, \omega_{\alpha 2}, \ldots$ Constanten sind. Die Integrale selbst haben die Gestalt

$$(7.)\qquad u_\alpha = (x-a)^{r_\alpha} \sum_1^\alpha{}_\beta\, \varphi_{\alpha\beta}[\log(x-a)]^{\beta-1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

wo $\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha\alpha}$ in der Umgebung von a endlich, eindeutig und continuirlich und für $x = a$ nicht sämmtlich Null sind. Die Functionen $(x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 2, \ldots, \lambda)$ lassen sich durch die Functionen $(x-a)^{r_{\alpha'}}\varphi_{\alpha'\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 1, \ldots, \lambda)$, wo $\alpha' < \alpha$, linear, homogen und mit constanten Coefficienten ausdrücken. Insbesondere ist $\varphi_{\alpha\alpha} = \text{Const.}\,\varphi_{11}$.

Zwischen den Integralen ein und derselben Gruppe findet keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt; die Gesammtheit der Gruppen bildet ein Fundamentalsystem.

Aus dem Umstande, dass die Functionen $(x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 2, \ldots, \lambda)$ sich [365 linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch die Functionen $(x-a)^{r_{\alpha'}}\varphi_{\alpha'\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 1, \ldots, \lambda)$, wo $\alpha' < \alpha$, ausdrücken lassen, folgert man, dass dieselben zu Wurzeln der Gruppe (R) als Exponenten gehören, deren Index kleiner ist als α, deren reeller Theil also grösser ist als der reelle Theil von r_α, wenn nicht Wurzeln derselben Gruppe (R) einander gleich sind. Da nun u_α zum Exponenten r_α gehört, so gehört nothwendigerweise $\varphi_{\alpha 1}(x-a)^{r_\alpha}$ zum Exponenten r_α, und $\varphi_{\alpha 1}$ kann nur verschwinden, wenn Wurzeln derselben Gruppe einander gleich sind, da ausserdem die Integrale (7.) nicht identisch Null sind. Man hat daher den Satz:

V. Sind die Wurzeln einer Gruppe (R) von einander verschieden, so fehlt in keinem Elemente der zugehörigen Integralgruppe (7.) das vom Logarithmus freie Glied, und zwar gehört dasselbe zu demjenigen Exponenten, welchem das Integral selbst zugeordnet ist.

Ist η ein wie F beschaffenes Integral, so ist dasselbe offenbar eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten nur von denjenigen Elementen des Fundamentalsystems des Satzes IV., welche ein und derselben Wurzelgruppe (R) entsprechen, und zwar derjenigen, welche den Exponenten, zu welchem η gehört, enthält. Ist derselbe r_β, während $r_1, r_2, \ldots, r_{\beta-1}, r_{\beta+1}, \ldots, r_\lambda$ die übrigen Wurzeln der Gruppe (R) vorstellen, deren Elemente wie im Satze IV. geordnet ist, ist ferner $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ die der Gruppe (R) entsprechende Integralgruppe (Gl. (7.)), so ist zunächst

$$\eta = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_\lambda u_\lambda, \tag{8.}$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$ Constanten sind. Sind nicht zwei Wurzeln der Gruppe ein-

ander gleich, und multiplicirt man diese Gleichung mit $(x-a)^{-r_\lambda}$, und setzt $x=a$, so erhält man $0 = c_\lambda u_\lambda (x-a)^{-r_\lambda}$ (für $x=a$). Da aber der Factor von c_λ von Null verschieden ist, so folgt, dass c_λ verschwindet. Dieses vorausgesetzt folgt durch Multiplication der Gleichung (8.) mit $(x-a)^{-r_{\lambda-1}}$ auf dieselbe Weise, dass $c_{\lambda-1}$ verschwindet. Und so fort bis $c_{\beta+1}$. Man hat daher:

(9.) $$\eta = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_\beta u_\beta.$$ D. h.

VI. Ist (R) diejenige Wurzelgruppe des Satzes IV., welche den Exponenten r_β enthält, zu dem ein wie F beschaffenes Integral η gehört, und sind nicht zwei Wurzeln in (R) einander gleich, so ist η eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten 366] nur von denjenigen Elementen der der Gruppe (R) entsprechenden Integralgruppe des Satzes IV., deren zugehörige Exponenten einen nicht kleineren reellen Theil als r_β haben.

Da die vom Logarithmus freien Glieder in $u_1, u_2, \ldots, u_\beta$ sämmtlich von Null verschieden sind und zu verschiedenen Exponenten gehören, so folgt auch:

VII. Sind nicht zwei Wurzeln in (R) einander gleich, so ist der vom Logarithmus freie Theil von η von Null verschieden und gehört mit η zu demselben Exponenten.

Da jedes Integral, als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Elemente des Fundamentalsystems des Satzes IV., eine Summe von wie F beschaffenen Integralen ist, die zu verschiedenen Exponenten gehören, so ergiebt sich ferner:

VIII. Sind die Wurzeln der Gleichung (2.) von einander verschieden, so enthält jedes Integral ein von Logarithmen freies Glied.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze VII. ist der Satz:

IX. Sind die Wurzeln in (R) von einander verschieden, so ist der vom Logarithmus freie Theil eines mit Logarithmen behafteten wie F beschaffenen Integrals η, dessen Exponent in (R) enthalten ist, kein Integral der Differentialgleichung (1.).

Denn ist dieser vom Logarithmus freie Theil ζ, so würde $\eta-\zeta$ zugleich mit ζ ein Integral der Differentialgleichung (1.) sein; dieses ist aber nach Satz VII. nicht möglich, da in $\eta-\zeta$ der vom Logarithmus freie Theil verschwindet.

Eine ähnliche Folgerung für den vom Logarithmus freien Theil eines beliebigen mit Logarithmen behafteten Integrals ergiebt sich aus Satz VIII., wenn die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (2.) von einander verschieden sind.

X. Sind die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ einer Gruppe (R) von einander verschieden, und $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ irgend welche wie F beschaffene Integrale, welche resp. zu diesen Wurzeln als zu ihren Exponenten gehören, so ist eine Gleichung:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_\lambda v_\lambda = 0 \tag{10.}$$

mit constanten Coefficienten nicht möglich.

Denn sind die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ wie im Satze IV. geordnet, und multiplicirt man die Gleichung (10.) mit $(x-a)^{-r_\lambda}$, so verschwinden für $x = a$ alle Glieder bis auf $(x-a)^{-r_\lambda} v_\lambda$, da $r_1 - r_\lambda, r_2 - r_\lambda, \ldots, r_{\lambda-1} - r_\lambda$ positive ganze Zahlen sind. Daher ist $c_\lambda = 0$, und die Gleichung (10.) geht in eine ähn- [367 liche Gleichung zwischen $v_1, v_2, \ldots, v_{\lambda-1}$ über. Es wird nun ebenso gezeigt, dass in dieser $c_{\lambda-1}$ verschwindet; u. s. w.

Da ein wie F beschaffenes Integral eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der einer Wurzelgruppe (R) entsprechenden Integrale des Satzes IV. ist, welche den Exponenten, zu dem F gehört, enthält, so kann man nach Satz III. § 1 und Satz X. dieses § in dem Fundamentalsystem des Satzes IV. diese Integralgruppe durch eine beliebige Gruppe gleichvieler wie F beschaffener Integrale ersetzen, deren zugehörige Exponenten resp. mit den Wurzeln in (R) identisch sind, vorausgesetzt, dass nicht zwei dieser Wurzeln einander gleich sind.

Aus den Gleichungen

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 = v_1 \int s_1 dx, \quad u_3 = v_3 = v_1 \int s_1 dx \int t_1 dx, \quad \ldots,$$
$$u_\lambda = v_\lambda = v_1 \int s_1 dx \int t_1 dx \ldots \int w_1 dx$$

ergiebt sich analog wie (A. § 6 I.):

XI. Sind zwei Wurzeln in (R) einander gleich, so ist die dieser Gruppe entsprechende Integralgruppe des Satzes IV. nothwendig mit Logarithmen behaftet.

Eine Integralgruppe dagegen, welche einer nur verschiedene Wurzeln enthaltenden Gruppe (R) entspricht, kann von Logarithmen frei sein.

Die Coefficienten der Fundamentalgleichung (A. § 3 Gl. (6.)) hangen von den Constanten der Differentialgleichung im Allgemeinen auf transcendente Weise ab. Es ist bemerkenswerth, dass für einen singulären Punkt a, in dessen Umgebung die Differentialgleichung die Form der Differentialgleichung (1.) hat, die Fundamentalgleichung durch die Gleichung (2.) ersetzt werden kann, deren Coefficienten auf algebraische, rationale Weise aus den Constanten der Differentialgleichung gebildet sind. Der Zusammenhang zwischen beiden Gleichungen ist derart, dass die mit $2\pi i$ multiplicirten Wurzeln der Gleichung (2.) als die Logarithmen der Wurzeln der Fundamentalgleichung angesehen werden können. — Da die Exponenten, zu welchen die Integrale (7.) gehören, aus der Fundamentalgleichung (A. § 3 Gl. (6.)) nur bis auf additive ganze Zahlen sich ergeben, und erst aus der Gleichung (2.) vollkommen bestimmt werden, so scheint es zweckmässig, die Gleichung (2.) die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.) zu nennen.

368] 5.

Es sei

$$(1.) \qquad p_0\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y+q=0$$

eine nicht homogene lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Coefficienten, und es werde zur Abkürzung

$$p_0\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y=Y$$

gesetzt. Differentiirt man die Gleichung (1.), multiplicirt die entstandene Gleichung mit q und subtrahirt von derselben die mit $\frac{dq}{dx}$ multiplicirte Gleichung (1.), so erhält man

$$(2.) \qquad \frac{dY}{dx}q-Y\frac{dq}{dx}=0$$

oder

$$(3.) \qquad r_0\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+r_1\frac{d^m y}{dx^m}+r_2\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+r_{m+1}y=0,$$

eine homogene lineare Differentialgleichung der $m+1^{\text{ten}}$ Ordnung, deren

Coefficienten bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} r_{\alpha+1} = \left(\dfrac{dp_\alpha}{dx} + p_{\alpha+1} - p_\alpha \dfrac{d\log q}{dx}\right)(x-a) & (\alpha = 0, 1, \ldots, m-1), \\ r_0 = p_0(x-a), \quad r_{m+1} = \left(\dfrac{dp_m}{dx} - p_m \dfrac{d\log q}{dx}\right)(x-a). \end{cases}$$

Aus der Differentialgleichung (2.) folgt durch Integration:

$$(5.)\qquad Y = Cq,$$

wo C eine willkürliche Constante. — Ist y ein Integral der Differentialgleichung (2.) oder (3.), und ist der ihm entsprechende Werth der Constanten C in der Gleichung (5.) gleich Null, so ist y auch ein Integral der Differentialgleichung:

$$(6.)\qquad Y = p_0 \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0.$$

Ist die dem y entsprechende Constante C von Null verschieden, so ist $-\frac{y}{C}$ ein Integral der Differentialgleichung (1.). Umgekehrt sind die Integrale der letzteren Differentialgleichung Integrale der Differentialgleichung (3.), welche dem Werthe der Constanten $C = -1$ der Gleichung (5.) entsprechen; und die Integrale der Differentialgleichung (6.) sind Integrale der Differentialgleichung (3.), welche dem Werthe der Constanten $C = 0$ der Gleichung (5.) entsprechen. Demnach hat man den Satz:

I. Jedes Integral der Differentialgleichungen (1.) und (6.) ist [369 ein Integral der Differentialgleichung (3.). Umgekehrt ist jedes Integral der Differentialgleichung (3.) entweder ein Integral der Differentialgleichung (6.) oder bis auf einen constanten Factor ein Integral der Differentialgleichung (1.).

Die Untersuchung der nicht homogenen Differentialgleichung (1.) ist hierdurch auf die Untersuchung der beiden homogenen Differentialgleichungen (3.) und (6.) zurückgeführt.

Es seien nunmehr die Coefficienten der Differentialgleichung (6.) in der Umgebung eines singulären Punktes a eindeutig, und die Integrale derselben für $x = a$ nur so unstetig, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt nicht unendlich sind, so ist:

$$(7.)\qquad p_0 = (x-a)^m, \quad p_\alpha = (x-a)^{m-\alpha} P_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

wo P_α in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich ist (§ 3). Ist $\frac{d\log q}{dx}$ in der Umgebung von a eindeutig, so sind die Coefficienten der Differentialgleichung (3.) ebenfalls eindeutig. Sollen die Integrale der Differentialgleichung (1.) dieselbe Eigenschaft wie die Integrale der Differentialgleichung (6.) haben, so gehört dieselbe Eigenschaft nach Satz I. auch den Integralen der Differentialgleichung (3.) an. Es ist daher (nach § 3):

$$(8.) \qquad r_0 = (x-a)^{m+1}, \quad r_{\alpha+1} = (x-a)^{m-\alpha} R_{\alpha+1} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, m),$$

wo $R_{\alpha+1}$ in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich ist. Aus den Gleichungen (4.), (7.), (8.) folgt:

$$R_{\alpha+1} = (x-a)\left[\frac{dP_\alpha}{dx} - P_\alpha \frac{d\log q}{dx}\right] + (m-\alpha)P_\alpha + P_{\alpha+1} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, m-1), \quad P_0 = 1,$$

$$R_{m+1} = (x-a)\left[\frac{dP_m}{dx} - P_m \frac{d\log q}{dx}\right].$$

Insbesondere ist für $\alpha = 0$

$$R_1 = -(x-a)\frac{d\log q}{dx} + m + P_1, \quad \text{also} \quad \frac{d\log q}{dx} = \frac{m + P_1 - R_1}{x-a}.$$

Daher hat q die Gestalt:

$$(9.) \qquad q = (x-a)^\mu . Q,$$

wo Q in der Umgebung von a eindeutig, endlich und continuirlich und in a von Null verschieden ist. Setzt man $\frac{d\log Q}{dx} = s$, so hat man

$$(10.) \quad \begin{cases} R_{\alpha+1} = P_{\alpha+1} + (m-\alpha-\mu)P_\alpha + \left(\frac{dP_\alpha}{dx} - sP_\alpha\right)(x-a) & (\alpha = 0, 1, \ldots, m-1), \\ R_{m+1} = -\mu P_m + \left(\frac{dP_m}{dx} - sP_m\right)(x-a). \end{cases}$$

370] Man hat daher den Satz:

II. Sollen die Integrale der Differentialgleichungen (1.) und (6.), in welchen $p_0, p_1, \ldots, p_m, \frac{d\log q}{dx}$ in der Umgebung von a eindeutig sind, für $x = a$ nur so unstetig sein, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt nicht mehr unendlich werden, so haben die Integrale der Differentialgleichung (3.) dieselbe Eigenschaft. Die Coefficienten der Differentialgleichungen (1.) und (6.) sind alsdann durch die Gleichungen (7.) und (9.), die Coefficienten der Diffe-

rentialgleichung (3.) durch die Gleichungen (8.) und (10.) bestimmt. Sind umgekehrt die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) durch die Gleichungen (7.) und (9.) bestimmt, so haben die Integrale derselben zugleich mit den Integralen der Differentialgleichungen (6.) und (3.) die Eigenschaft mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt für $x=a$ nicht unendlich zu werden.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich noch folgende Sätze, welche Verallgemeinerungen von No. 4 und 5 der A. sind:

III. Sind die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) nur für eine endliche Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ unstetig, überdies $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m, \frac{d\log q}{dx}$ überall eindeutig, und sollen die Integrale der Differentialgleichungen (1.) und (6.) mit bestimmten Potenzen von $x-a_\alpha$ und x multiplicirt resp. für $x=a_\alpha$ und $x=\infty$ nicht unendlich werden, so ist:

$$(11.)\qquad \begin{cases} p_0 = \psi^m, \quad p_\alpha = \psi^{m-\alpha}.F_{\alpha(\varrho-1)} & (\alpha=1,2,\ldots,m), \\ q = C(x-a_1)^{\mu_1}(x-a_2)^{\mu_2}\ldots(x-a_\varrho)^{\mu_\varrho}, \end{cases}$$

wo $\psi=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$, $C, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$ constante Grössen und F_n eine ganze Function höchstens von dem Grade n bezeichnet.

Denn da die Integrale der Differentialgleichung (6.) die verlangte Eigenschaft haben sollen, so müssen zunächst nach § 4 der A. p_0 und p_α die in den Gleichungen (11.) angegebene Form haben. Nach Satz II. haben aber auch die Integrale der Differentialgleichung (3.) die im Satze angegebene Beschaffenheit, daher ist wieder nach § 4 der A.

$$r_1 = \psi^m.F'_{\varrho-1}, \quad r_0 = \psi^{m+1},$$

wo $F'_{\varrho-1}$ eine ganze Function höchstens von dem Grade $\varrho-1$ bezeichnet. Es ist aber

$$r_1 = \left[\frac{dp_0}{dx}+p_1-p_0\frac{d\log q}{dx}\right]\psi = \left[m\frac{d\psi}{dx}+F_{\varrho-1}-\psi\frac{d\log q}{dx}\right]\psi^m.$$

Also [371

$$F'_{\varrho-1} = m\frac{d\psi}{dx}+F_{\varrho-1}-\psi\frac{d\log q}{dx}$$

oder

$$(12.)\qquad \frac{d\log q}{dx} = \frac{F_{\varrho-1}-F'_{\varrho-1}}{\psi}+m\frac{d\log\psi}{dx},$$

woraus die im Satze für q angegebene Form hervorgeht.

Umgekehrt: IV. Jedes Integral der Differentialgleichungen (1.) und (6.), deren Coefficienten durch die Gleichungen (11.) bestimmt sind, hat die Eigenschaft mit bestimmten Potenzen von $x-a_\alpha$ und x multiplicirt für $x = a_\alpha$ und $x = \infty$ resp. nicht unendlich zu werden.

Der Nachweis wird geführt, wenn man den Satz II. für jeden der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ anwendet, und um ihn auch für $x = \infty$ anwenden zu können, in der Differentialgleichung (1.) mit den durch Gl. (11.) bestimmten Coefficienten $x = \frac{1}{u}$ substituirt und alsdann den singulären Punkt Null betrachtet.

6.

Setzt man in dem Ausdrucke

$$Y = (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m(x) y,$$

wo die Grössen P in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich sind, $y = (x-a)^\varepsilon f(x)$, wo ε eine beliebige Grösse und $f(x)$ eine in der Umgebung von a eindeutige, continuirliche und endliche Function von der Beschaffenheit ist, dass $\eta = (x-a)^\varepsilon f(x)$ kein Integral der Differentialgleichung $Y = 0$ ist, so lässt sich die resultirende Function auf die Gestalt $(x-a)^\mu . Q$ bringen, wo μ eine bestimmte Grösse und Q in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich und in a von Null verschieden ist. — Die Differentialgleichung

$$Y - (x-a)^\mu . Q = 0 \tag{1.}$$

hat alsdann das Integral $\eta = (x-a)^\varepsilon f(x)$.

I. Es sei $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$Y = 0, \tag{2.}$$

so ist das System der Integrale $\eta, y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $m+1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(x-a)^{m+1} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + (x-a)^m R_1(x) \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} R_2(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + R_{m+1}(x) y = 0, \tag{3.}$$

wo [372

$$(4.)\quad \begin{cases} R_{a+1}(x) = P_{a+1}(x) + (m-a-\mu)P_a(x) + \left[\dfrac{dP_a(x)}{dx} - sP_a(x)\right](x-a) & (a=0,1,\ldots,m-1) \\ R_{m+1} = -\mu P_m(x) + \left[\dfrac{dP_m(x)}{dx} - sP_m(x)\right](x-a), \qquad s = \dfrac{d\log Q}{dx}. \end{cases}$$

Denn nach dem Satze I. des vorigen § ist zunächst jedes der Integrale $\eta, y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Integral der Differentialgleichung (3.). Es kann aber eine Gleichung der Form $C\eta + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m = 0$ nicht bestehen, ohne dass die constanten Coefficienten derselben verschwinden, da η kein Integral der Differentialgleichung (2.) und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem derselben sind. —

Von der Differentialgleichung (1.) wollen wir sagen, sie sei der Differentialgleichung (2.) durch die Substitution $y = (x-a)^\varepsilon f(x)$ zugeordnet. Die Grösse μ heisse der Index der Substitution.

Die zum singulären Punkte a gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (3.) ist:

$$(5.)\qquad \sum_0^m{}_a\, r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+a)R_a(a) + R_{m+1}(a) = 0,$$

wo $R_0(a) = 1$ zu setzen ist. Diese Gleichung ist nach den Gleichungen (4.) gleichbedeutend mit:

$$\sum_0^m{}_a\, r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+a)[P_a(a) + (m-a-\mu+1)P_{a-1}(a)] - \mu P_m(a) = 0,$$

wo wieder $P_0(a) = 1$ zu setzen ist. Diese Gleichung lässt sich umformen in:

$$(6.)\qquad (r-\mu)\left[\sum_0^{m-1}{}_b\, r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+b+1)P_b(a) + P_m(a)\right] = 0.$$

Nun aber ist

$$(7.)\qquad \sum_0^{m-1}{}_b\, r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+b+1)P_b(a) + P_m(a) = 0$$

die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.). Also:

II. Eine Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (3.) ist gleich μ, die übrigen m Wurzeln genügen der determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.).

Das Resultat der Substitution von $y = (x-a)^{\varepsilon} f(x)$ in Y hat die Form $(x-a)^{\varepsilon}\psi(x)$, wo $\psi(x)$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe ist, in welcher der Coefficient von $(x-a)^0$ mit der linken Seite der Gleichung (7.) übereinstimmt, wenn man in dieselbe $r = \varepsilon$ setzt. Dieser Coefficient ist Null oder von Null verschieden, je nachdem ε eine Wurzel der Gleichung (7.) ist oder nicht. Daher:

373] III. Ist ε nicht einer Wurzel der Gleichung (7.) gleich, so ist der Index der Substitution μ gleich ε; ist dagegen ε eine Wurzel der Gleichung (7.), so ist der reelle Theil von μ grösser als der reelle Theil von ε, so dass $\mu-\varepsilon$ eine positive ganze Zahl wird.

Aus Satz I. folgt:

IV. Enthalten die Ausdrücke irgend welcher Integrale der Differentialgleichung (2.) in der Umgebung von a Logarithmen, so giebt es auch Integrale der Differentialgleichung (3.), deren Ausdrücke in der Umgebung von a mit Logarithmen behaftet sind. Und umgekehrt.

Ist ε eine Wurzel der Gleichung (7.), und vertheilt man nach Vorschrift des Satzes IV. in No. 4 sowohl die Wurzeln der Gleichung (5.) als die der Gleichung (7.) in Gruppen, und ist (R) diejenige Gruppe der Wurzeln der letzteren Gleichung, zu welcher ε gehört, so entspricht dieser die Gruppe (S) der Wurzeln der Gleichung (5.), welcher ausser den in (R) enthaltenen Wurzeln die Wurzel μ angehört. Die übrigen Gruppen der Wurzeln der Gleichung (7.) sind mit den übrigen Gruppen der Wurzeln der Gleichung (5.) identisch (nach Satz II.).

Ist der Index der Substitution μ einer der Wurzeln in (R) gleich, so enthält die Gruppe (S) gleiche Wurzeln, daher ist die dieser Gruppe entsprechende nach dem Satze IV. § 4 gebildete Integralgruppe mit Logarithmen behaftet (Satz XI. § 4). — Diese Integralgruppe in dem nach Satz IV. § 4 gebildeten Fundamentalsysteme der Differentialgleichung (3.) lässt sich aber nach Satz III. § 1 durch das System $\eta, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ ersetzen, wenn $\eta = (x-a)^{\varepsilon} f(x)$ und $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ die der Gruppe (R) entsprechenden nach Satz IV. § 4 gebildeten Integrale der Differentialgleichung (2.) sind, da zwischen $\eta, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ zu Folge des Satzes I. dieses § keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfinden kann. Da aber η keinen Logarithmus enthält, so sind irgend welche der Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$, d. h. die der Gruppe (R) ent-

sprechende Integralgruppe der Differentialgleichung (2.) mit Logarithmen behaftet.

Es werde jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass die einer Gruppe (R) von Wurzeln der Gleichung (7.) entsprechende nach Satz IV. § 4 gebildete Integralgruppe der Differentialgleichung (2.) mit Logarithmen behaftet ist. Die Wurzeln dieser Gruppe in der Reihenfolge des Satzes IV. § 4 seien $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ und die ihnen entsprechenden Integrale resp. $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$. Sind nicht zwei der Wurzeln in (R) einander gleich, und ist u_α mit Logarithmen behaftet, so ist der vom Logarithmus freie Theil desselben $(x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha 1}$, welcher nach § 4 [374 Satz V. nicht verschwindet, kein Integral der Differentialgleichung (2.) (§ 4 Satz IX). Ordnet man daher der Differentialgleichung (2.) die Differentialgleichung (3.) durch die Substitution $y=(x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha 1}$ zu, so ist nach Satz I. $v_\alpha = u_\alpha - (x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha 1}$ ein Integral der Differentialgleichung (3.). Da in diesem mit Logarithmen behafteten Integral das vom Logarithmus freie Glied verschwindet, so sind nach Satz VII. § 4 nothwendig zwei Wurzeln der Gruppe (S) einander gleich, d. h. μ mit einer der Wurzeln der Gruppe (R) übereinstimmend.

Wird der Differentialgleichung (2.) durch die Substitution $y=(x-a)^r f(x)$ die Differentialgleichung (3.) zugeordnet, wo $f(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe und r ein Glied einer nach § 4, Satz IV. gebildeten Gruppe (R) von Wurzeln der Gleichung (7.): $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ ist, so werde die Differenz $r_1 - r_\lambda$ mit s und die Summe der Glieder von $f(x)$, welche niedrigere Potenzen von $x-a$ als $(x-a)^{s+1}$ enthalten, mit $g(x)$, endlich die Differenz $f(x)-g(x)$ mit $\varphi(x)$ bezeichnet. Das Resultat der Substitution von $(x-a)^r\varphi(x)$ in Y liefert nur Potenzen von $x-a$, deren Exponenten einen grösseren reellen Theil haben als r_1. Ist daher der Index μ der Substitution $y=(x-a)^r f(x)$ einer Wurzel der Gruppe (R) gleich, so ist der Index der Substitution $y=(x-a)^r g(x)$ derselben Wurzel gleich; d. h. giebt es überhaupt eine Substitution $y=(x-a)^r f(x)$, deren Index mit r Wurzel derselben Gruppe (R) ist, so giebt es eine ganze Function $g(x)$ von der Beschaffenheit, dass der Index der Substitution $y=(x-a)^r g(x)$ mit r Wurzel derselben Gruppe ist. — Man hat daher den Satz:

V. Es werde der Differentialgleichung (2.) die Differentialgleichung (3.) durch die Substitution $y=(x-a)^r f(x)$, in der $f(x)$ eine ganze Function und r eine Wurzel der zur Differential-

gleichung (2.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung (7.) ist, zugeordnet; es werden ferner sowohl die Wurzeln dieser Gleichung als auch die Wurzeln der zur Differentialgleichung (3.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung (5.) nach Satz IV. § 4 in Gruppen vertheilt. Ist alsdann (R) diejenige Gruppe von Wurzeln der Gleichung (7.), welche r enthält, so entspricht dieser die Gruppe (S) der Wurzeln der Gleichung (5.), welcher ausser den in (R) enthaltenen Wurzeln der Index der Substitution μ als Glied angehört. Die nach Satz IV. § 4 gebildete der Gruppe (R) entsprechende Integralgruppe der Differentialgleichung (2.) ist mit Logarithmen **behaftet** oder **nicht behaftet**, je nachdem für ir-375] **gend eine** Wurzel r der Gruppe (R) oder für **keine** derselben die ganze Function $f(x)$ so bestimmt werden kann, dass die Gruppe (S) gleiche Wurzeln enthält.

In diesem Satze ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten von Logarithmen in den Ausdrücken der Integrale in der Umgebung des singulären Punktes a enthalten. Er bildet demnach eine wesentliche Ergänzung zu den Sätzen XI. § 4 und A. § 6, welche nur eine hinreichende aber keine nothwendige Bedingung enthalten.

7.

Es sei wieder

$$Y = (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m(x)\, y,$$

wo $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ in der Umgebung von a eindeutige, continuirliche und endliche Functionen sind; ferner sei (R): $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ eine nach Satz IV. § 4 gebildete Gruppe von Wurzeln der zur Differentialgleichung

$$Y = 0 \tag{1.}$$

gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung:

$$\sum_0^{m-1} {}_b\, r(r-1)\ldots(r-m+b+1) P_b(a) + P_m(a) = 0, \quad P_0(a) = 1. \tag{2.}$$

Wir wollen nunmehr die analytische Bedingung dafür entwickeln, dass für irgend eine Wurzel r_ϱ, welche der Gruppe (R) angehört, eine ganze Function

$f(x)$ bestimmt werden kann, derart dass der Index der Substitution $y = (x-a)^{r_\varrho} f(x)$ mit einer Wurzel der Gruppe (R) übereinstimmt. —

Zu dem Ende sei die Reihenfolge der Grössen $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ dieselbe wie im Satze IV. § 4 und $g(x)$ eine beliebige rationale ganze Function

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n,$$

und man substituire $y = (x-a)^{r_\lambda} g(x)$ in Y, so erhält man

$$Z = (x-a)^{r_\lambda} \sum_0^n{}_k \varphi(x,k)(x-a)^k c_k, \tag{3.}$$

wo

$$\varphi(x,k) = \sum_0^{m-1}{}_b (r_\lambda + k)(r_\lambda + k - 1)\ldots(r_\lambda + k - m + b + 1) P_b(x) + P_m(x), \quad P_0(x) = 1$$

gesetzt ist. Die Wurzeln $r_{\lambda-1}, r_{\lambda-2}, \ldots, r_1$ haben resp. die Werthe

$$r_\lambda + k_1,\ r_\lambda + k_2,\ \ldots,\ r_\lambda + k_{\lambda-1},$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_{\lambda-1}$ eine nicht abnehmende Reihe positiver ganzer Zahlen ist. Da nun die Grössen $\varphi(a,k)$ mit der linken Seite der Gleichung (2.) übereinstimmen, wenn man in derselben $r_\lambda + k$ an die Stelle von r setzt, so [376 hat man die Gleichungen:

$$\varphi(a,0) = 0,\quad \varphi(a,k_1) = 0,\quad \varphi(a,k_2) = 0,\quad \ldots,\quad \varphi(a,k_{\lambda-1}) = 0, \tag{4.}$$

während $\varphi(a,k)$ für jeden positiven Werth von k, der nicht mit $k_1, k_2, \ldots, k_{\lambda-1}$ übereinstimmt, von Null verschieden ist. Um Z nach Potenzen von $x-a$ zu entwickeln, setzen wir

$$\frac{d^\lambda \varphi(x,k)}{dx^\lambda} = \varphi^{(\lambda)}(x,k),\quad \varphi^{(a-b)}(a,k) = 1.2.3\ldots(a-k).(a,k)$$

und $A_a = \sum_0^a{}_k (a,k) c_k$; es ist alsdann, weil $A_0 = \varphi(a,0) c_0 = 0$,

$$Z = (x-a)^{r_\lambda} \sum_1^\infty{}_a A_a (x-a)^a. \tag{5.}$$

Soll es unter den Indices $1, 2, \ldots, \lambda-1$, wenigstens einen α geben, für den die Bedingungen

$$A_1 = 0,\quad A_2 = 0,\quad \ldots,\quad A_{k_\alpha - 1} = 0,\quad A_{k_\alpha} \text{ nicht gleich Null}, \tag{6.}$$

erfüllt werden, so ist es mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.), wie leicht zu sehen, nothwendig und hinreichend, dass wenigstens für einen der Indices

$\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda-1$ nicht zugleich die Determinanten

$$D(\mathfrak{b}, \alpha) =$$

$$\begin{vmatrix} (k_{\mathfrak{b}}+1, k_{\mathfrak{b}}) & (k_{\mathfrak{b}}+1, k_{\mathfrak{b}}+1) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ (k_{\mathfrak{b}}+2, k_{\mathfrak{b}}) & (k_{\mathfrak{b}}+2, k_{\mathfrak{b}}+1) & (k_{\mathfrak{b}}+2, k_{\mathfrak{b}}+2) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (k_{\mathfrak{b}+1}-1, k_{\mathfrak{b}}) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1, k_{\mathfrak{b}}+1) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1, k_{\mathfrak{b}}+2) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1, k_{\mathfrak{b}}+3) & \ldots & (k_{\mathfrak{b}+1}-1, k_{\mathfrak{b}+1}-2) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1, k_{\mathfrak{b}+1}-1) \\ (k_{\alpha}, k_{\mathfrak{b}}) & (k_{\alpha}, k_{\mathfrak{b}}+1) & (k_{\alpha}, k_{\mathfrak{b}}+2) & (k_{\alpha}, k_{\mathfrak{b}}+3) & \ldots & (k_{\alpha}, k_{\mathfrak{b}+1}-2) & (k_{\alpha}, k_{\mathfrak{b}+1}-1) \end{vmatrix}$$

für $\mathfrak{b} = 0, 1, 2, \ldots, \alpha-1$ verschwinden, wo $k_0 = 0$ zu setzen ist. — Ist diese Bedingung für einen bestimmten Werth von α zum ersten Male erfüllt, so sind die Grössen c_a für die Werthe des Index $a = 0, k_1, k_2, \ldots, k_{\alpha-1}$ willkürlich und von einander unabhängig geblieben. Es wird daher α ganze Functionen $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{\alpha-1}(x)$, welche für $x = a$ nicht verschwinden, geben von der Beschaffenheit, dass die Indices der Substitutionen

$$y = (x-a)^{r_\lambda} g_0(x), \quad y = (x-a)^{r_{\lambda-1}} g_1(x), \quad y = (x-a)^{r_{\lambda-2}} g_2(x), \quad \ldots, \quad y = (x-a)^{r_{\lambda-\alpha+1}} g_{\alpha-1}(x)$$

sämmtlich den Werth $r_{\lambda-\alpha}$ haben. — Der Satz V. im vorigen § lässt sich daher auch durch den folgenden ersetzen:

I. Es seien die Glieder einer nach Satz IV. § 4 gebildeten Gruppe von Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung (2.):

$$r_\lambda, \; r_\lambda + k_1, \; r_\lambda + k_2, \; \ldots, \; r_\lambda + k_{\lambda-1},$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_{\lambda-1}$ eine nicht abnehmende Reihe positiver ganzer Zahlen ist, und bildet man die zu dieser Gruppe gehörigen Determinanten $D(\mathfrak{b}, \alpha)$, so ist die nach § 4 Satz IV. der Gruppe (R) zugeordnete In-377] tegralgruppe mit Logarithmen behaftet oder nicht behaftet, je nachdem für wenigstens einen der Indices $\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda-1$ oder keinen derselben in der Reihe der Determinanten

$$D(0, \alpha), \; D(1, \alpha), \; \ldots, \; D(\alpha-1, \alpha)$$

sich solche befinden, welche von Null verschieden sind.

Dieser Satz kann auch folgendermassen hergeleitet werden. Setzt man in No. 5 der A. $a_i = a$ und r_λ statt r_{i1}, so verschwindet der Coefficient von c_{k+1} in Gleichung (5.) daselbst, wenn k einen der Werthe $k_1-1, k_2-1, \ldots, k_{\lambda-1}-1$ annimmt. Damit nun, für diese Werthe von k, c_{k+1} endlich bleibe, müssen

die zugehörigen Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung (5.) daselbst verschwinden. Damit ferner Reihenentwickelungen der Gestalt

$$(x-a)^r \sum_0^\infty{}_\alpha \mathfrak{b}_\alpha (x-a)^\alpha$$

möglich sind, wenn r eine beliebige der Wurzeln $r_\lambda, r_\lambda+k_1, r_\lambda+k_2, \ldots, r_\lambda+k_{\lambda-1}$ und der jedesmalige Werth von $\mathfrak{b}_0$ von Null verschieden sein soll, dürfen durch die Gleichungen, welche durch das Verschwinden der rechten Seite der Gleichung (5.) daselbst für die angegebenen Werthe von k erhalten werden, keine Relationen zwischen den Grössen c_α mit den Indices $\alpha = 0, k_1, k_2, \ldots, k_{\lambda-1}$ herbeigeführt werden. Es lässt sich nun zeigen, dass diesen beiden Bedingungen Genüge geschieht, wenn für jeden Werth von $\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda-1$, die Determinanten $D(0,\alpha), D(1,\alpha), \ldots, D(\alpha-1,\alpha)$ verschwinden. Tritt dieses ein, so kann man durch ähnliche Schlüsse wie in § 5 der A. zeigen, dass es zu jedem Werth von r aus der Reihe $r_\lambda, r_\lambda+k_1, r_\lambda+k_2, \ldots, r_\lambda+k_{\lambda-1}$ ein Integral der Form $(x-a)^r \sum_0^\infty{}_\alpha b_{r\alpha}(x-a)^\alpha$ giebt, worin b_{r0} von Null verschieden ist. Diese Gruppe von Integralen kann man in dem Fundamentalsysteme des Satzes IV. in § 4 (nach Satz X. in § 4 und Satz III. in § 1) der Integralgruppe, welche (R) entspricht, substituiren, so dass diese Gruppe nicht mit Logarithmen behaftet ist. —

Die Differenz $r_1 - r_\lambda = \delta$ ist eine ganze Zahl, welche die Ordnung der höchsten in den Determinanten $D(\mathfrak{b},\alpha)$ auftretenden Ableitung von $\varphi(x,k)$ (für $x=a$) nicht überschreitet. Jeder Gruppe (R) entspricht eine solche Zahl δ. Ist unter allen diesen den verschiedenen Gruppen entsprechenden Zahlen d die grösste, und entwickelt man die Functionen $P_\alpha(x)$ in Reihen nach Potenzen von $x-a$, so treten in keiner der irgend einer Gruppe (R) entsprechenden Determinanten $D(\mathfrak{b},\alpha)$ die Coefficienten derjenigen Potenzen von $x-a$ auf, deren Exponenten grösser sind als d. Diese Coefficienten üben daher auch keinen Einfluss aus auf die Beurtheilung der Frage, ob die irgend einer Gruppe (R) zugehörige Integralgruppe mit Logarithmen behaftet ist [378 oder nicht. — Man hat daher folgenden Satz:

II. Sind $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ganze Functionen, welche resp. aus $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ erhalten werden, wenn man in der Entwickelung derselben nach Potenzen von $x-a$ nur diejenigen Glieder beibehält, welche mit nicht höheren Potenzen von $x-a$ als der

d^{ten} multiplicirt sind, so sind die irgend einer Gruppe (R) entsprechenden Integrale der Differentialgleichung (1.) mit Logarithmen behaftet oder nicht, je nachdem die derselben Gruppe (R) entsprechenden Integrale der Differentialgleichung:

$$(7.) \quad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} F_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} F_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + F_m y = 0$$

mit Logarithmen behaftet sind oder nicht.

Der Differentialgleichung (7.) gehört die Gleichung (2.) als determinirende Fundamentalgleichung an. Sind die Grössen $P_\alpha(x)$ gleich constanten Grössen a_α, so dass die Differentialgleichung (1.) die Gestalt:

$$(8.) \quad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} a_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + a_m y = 0$$

hat, und die Wurzeln der Gleichung:

$$(9.) \quad \sum_0^{m-1} {}_\alpha r(r-1)\ldots(r-m+\alpha+1) a_\alpha + a_m = 0, \quad a_0 = 1,$$

verschieden, so sind für jede Gruppe (R) die sämmtlichen Determinanten $D(\mathfrak{b}, \alpha)$ gleich Null, da die erste Verticalreihe derselben nur verschwindende Elemente enthält, folglich sind die Integrale nicht mit Logarithmen behaftet (siehe A. § 6).

8.

Wenn die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung

$$(1.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y = 0$$

für einen Werth $x = a$ unendlich werden, übrigens aber in dessen Umgebung eindeutig sind, so hören im Allgemeinen die Integrale der Differentialgleichung auf in der Umgebung dieses Punktes eindeutig, stetig und endlich zu sein. Wenn dieses eintritt, so wollen wir den Punkt a einen wesentlich singulären Punkt der Differentialgleichung (1.) nennen. Wenn aber die Integrale in der Umgebung des Punktes a eindeutig, endlich und continuirlich bleiben, so soll a ein ausserwesentlich singulärer Punkt heissen*).

*) Diese Benennung hat Herr WEIERSTRASS bereits in seiner Vorlesung, welche ich in der A. (Einleitung) angeführt habe, gebraucht.

Ist Δ_0 die Determinante eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \ldots, y_m$ und [379 Δ_α diejenige Determinante, welche aus Δ_0 entsteht, wenn man die α^{te} Vertikalreihe durch $\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \ldots, \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt, so ist (§ 4 Gl. (7.) der A.)

$$p_\alpha = -\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_0}. \tag{2.}$$

Da nun die Integrale der Differentialgleichung (1.) in der Umgebung eines ausserwesentlich singulären Punktes a eindeutig, continuirlich und endlich sind, so gilt dasselbe für ihre sämmtlichen Ableitungen, folglich auch für die Determinanten Δ_0 und Δ_α. Nun aber sollen für gewisse Werthe von $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ Coefficienten p_α für $x = a$ unendlich werden, folglich zeigt die Gleichung (2.), dass Δ_0 für $x = a$ verschwindet. Da aber (A. § 4 Gl. (8.)) Δ_0 bis auf einen nicht verschwindenden constanten Factor von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig ist, so folgt:

I. Für einen ausserwesentlich singulären Punkt muss die Determinante jedes Fundamentalsystems verschwinden.

Es seien $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ willkürliche Grössen und x_0 ein nicht singulärer Punkt, so kann man ein Integral η der Differentialgleichung (1.) bestimmen, von der Beschaffenheit, dass $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ resp. die Werthe von

$$\eta, \quad \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{d^2\eta}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$$

für $x = x_0$ sind. — Denn man hat das System von Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\eta & = & c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m, \\
\frac{d\eta}{dx} & = & c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + c_m \frac{dy_m}{dx}, \\
\frac{d^2\eta}{dx^2} & = & c_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \cdots + c_m \frac{d^2 y_m}{dx^2}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}} & = & c_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + c_2 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \cdots + c_m \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}},
\end{array}\right. \tag{3.}$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Constanten sind. Setzt man rechterhand $x = x_0$ und linkerhand statt $\eta, \frac{d\eta}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ resp. $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$, so hat man zur Bestimmung der Grössen c ein System linearer Gleichungen, dessen Determinante nicht verschwindet.

Ist dagegen x_0 ein ausserwesentlich singulärer Punkt, so würde diese Determinante verschwinden, es müssten also die Grössen b eine lineare homogene Relation erfüllen, um resp. als Werthe eines Integrals und dessen $m-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ angesehen werden zu können.
380] Das Verschwinden der Determinante eines Fundamentalsystems in den ausserwesentlich singulären Punkten macht also den characteristischen Unterschied zwischen solchen Punkten und den nicht singulären aus.

Da in der Umgebung des ausserwesentlich singulären Punktes a die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) eindeutig, die Integrale derselben aber eindeutig, endlich und continuirlich sind, so folgt aus dem Satze in § 3, dass in der Umgebung von a die Coefficienten die Gestalt:

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha(x)}{(x-a)^\alpha}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{4.}$$

haben, wo $P_\alpha(x)$ in derselben Umgebung eindeutig, endlich und continuirlich ist. Aus der Gleichung:

$$\Delta_0 = C.e^{-\int p_1 dx}, \quad \text{(A. § 2 Gl. (3.))}, \tag{5.}$$

wo C eine nicht verschwindende Constante bedeutet, und aus Gleichung (4.) folgt:

$$\Delta_0 = (x-a)^{-P_1(a)}.G(x), \tag{6.}$$

wo $G(x)$ in der Umgebung von a eindeutig, endlich und continuirlich und in a von Null verschieden ist. Da nun Δ_0 in der Umgebung von a eindeutig, endlich und continuirlich und in a gleich Null ist, so ergiebt sich, dass $P_1(a)$ eine negative ganze Zahl ist, wenn a einen ausserwesentlich singulären Punkt bedeutet. — Die zum Punkte a gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.), deren Coefficienten durch die Gleichungen (4.) bestimmt werden, ist:

$$\sum_0^{m-1}{}_\alpha r(r-1)\ldots(r-m+\alpha+1)\,P_\alpha(a) + P_m(a) = 0, \quad P_0(a) = 1. \tag{7.}$$

Jeder Wurzel r dieser Gleichung entspricht (nach A. § 6) ein wie F beschaffenes Integral y derart, dass $(x-a)^{-r}y$ für $x = a$ nicht verschwindet, da aber in der Umgebung eines ausserwesentlich singulären Punktes die Integrale eindeutig, endlich und continuirlich sind, so müssen die Wurzeln der Glei-

chung (7.) positive ganze Zahlen oder Null sein, daher auch $P_1(a), P_2(a), \ldots, P_m(a)$ ganze Zahlen, oder, mit Ausnahme von $P_1(a)$, Null. Aus Satz XI. § 4 folgt ferner, dass die Wurzeln derselben Gleichung von einander verschieden sind, es kann daher auch nur eine derselben, folglich nicht gleichzeitig $P_m(a)$ und $\sum_0^{m-1} 1.2.3\ldots(m-\mathfrak{a}-1)P_{\mathfrak{a}}(a)$ verschwinden.

Die Wurzeln der Gleichung (7.) bilden in diesem Falle eine einzige Gruppe. Sind dieselben $r_1, r_2, \ldots, r_m$ so geordnet, dass jede folgende kleiner ist, als die vorhergehende, und setzt man $r_{m-\mathfrak{a}} = r_m + k_{\mathfrak{a}}$, und bildet mit [381 r_m statt r_λ die Determinanten $D(\mathfrak{b}, \alpha)$ der vorigen No., so hat man den Satz:

II. Damit a ein ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (1.) sei, ist erforderlich und hinreichend:

1) dass die Differentialgleichung in der Umgebung dieses Punktes die Gestalt:

$$(8.) \qquad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m(x) y = 0$$

habe, wo die Functionen $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich sind;

2) dass $P_1(a)$ eine negative ganze Zahl ist;

3) dass die Wurzeln der Gleichung (7.) von einander verschieden und, bis auf eine etwa verschwindende, positive ganze Zahlen sind;

4) dass für keinen Werth von $\alpha = 1, 2, \ldots, m-1$ irgend eine der Determinanten $D(0, \alpha), D(1, \alpha), \ldots, D(\alpha-1, \alpha)$ von Null verschieden ist.

Ist $d = r_1 - r_m$, so kann man nach dem Satze II. des vor. § bei der Beurtheilung der Art der Singularität des Punktes a in den nach Potenzen von $x-a$ fortschreitenden Reihen $P_{\mathfrak{a}}(x)$ die Glieder mit höheren Potenzen als die d^{te} unterdrücken, so dass der Punkt a ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (8.) ist, je nachdem er ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$(9.) \qquad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} F_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + F_m y = 0$$

ist, wo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ die durch die Abkürzung von $P_1, P_2, \ldots, P_m$ erhaltenen ganzen Functionen sind.

9.

Wenn die Coefficienten der Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m(x) y = 0$$

die in Satz II. unter No. 1)—3) (vor. §) angegebenen Bedingungen erfüllen, so können die Ausdrücke der Integrale in der Umgebung des Punktes a (nach § 4) noch mit Logarithmen behaftet sein. Ob dieses stattfindet oder nicht, lässt sich nach § 7 beurtheilen, wie dieses in der That im Satze II. vor. § unter No. 4) geschehen ist. Diese Frage lässt sich noch auf eine andere Weise entscheiden, wie wir jetzt zeigen wollen.

382] Die Integrale der Differentialgleichung (1.) sind unter den gemachten Voraussetzungen wie F beschaffene Functionen, welche zu ganzzahligen positiven Exponenten gehören, nämlich den Wurzeln der Gleichung:

$$(2.) \qquad \sum_0^{m-1}{}_a r(r-1)\ldots(r-m+a+1) P_a(a) + P_m(a) = 0, \quad P_0(a) = 1.$$

Ist r_1 wieder die grösste Wurzel dieser Gleichung, so sind die Ableitungen eines mit Logarithmen behafteten Integrals spätestens der r_1+1ten Ordnung wie F beschaffene Functionen, welche zu negativen Exponenten gehören. Dieses ergiebt sich aus der Form des Fundamentalsystems § 4, Satz IV. Dagegen sind die Exponenten, zu welchen die Ableitungen beliebiger Ordnung eines von Logarithmen freien Integrals gehören, stets positiv.

Bildet man aber eine lineare Differentialgleichung für die abhängige Variable s von der Art, dass ihr die s^{ten} Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (1.) und nur diese genügen, so hat dieselbe nach dem Satze in § 3 die Gestalt:

$$(3.) \qquad (x-a)^n \frac{d^n s}{dx^n} + (x-a)^{n-1} Q_1(x) \frac{d^{n-1} s}{dx^{n-1}} + \cdots + Q_n(x) s = 0,$$

wo $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich sind.

Wählt man $s = r_1+1$, und ist die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (3.)

$$(4.) \qquad \sum_0^{n-1}{}_a r(r-1)\ldots(r-n+a+1) Q_a(a) + Q_n(a) = 0, \quad Q_0(a) = 1,$$

I. so ist a ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt, je nachdem diese Gleichung negative Wurzeln enthält oder nicht.

Es ist daher noch eine Methode anzugeben, wonach eine lineare homogene Differentialgleichung für die abhängige Variabln z hergestellt wird, der die s^{ten} Ableitungen sämmtlicher Integrale einer gegebenen Differentialgleichung:

$$p_0 \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{5.}$$

und nur diese genügen. Eine solche wollen wir nunmehr aufsuchen.

Eliminirt man aus dem Systeme von Gleichungen, welches man erhält, wenn man die Differentialgleichung (5.) mit den durch s aufeinanderfolgende Differentiationen derselben entstandenen verbindet, die Grössen

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \cdots, \quad \frac{d^{s-1} y}{dx^{s-1}},$$

so ist das Resultat der Elimination allerdings eine lineare homogene Diffe- [383
rentialgleichung m^{ter} Ordnung für $\frac{d^s y}{dx^s} = z$, und es genügen derselben die s^{ten} Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.). Allein die Ordnung derjenigen Differentialgleichung für z, der nur die s^{ten} Ableitungen der Integrale der Differentialgleichung (5.) genügen, kann niedriger als die m^{te} sein. In der That hat jedes Integral z derselben die Gestalt:

$$z = c_1 \frac{d^s y_1}{dx^s} + c_2 \frac{d^s y_2}{dx^s} + \cdots + c_m \frac{d^s y_m}{dx^s}, \tag{6.}$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Constanten, und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.) ist. Genügt nun der Differentialgleichung (5.) eine ganze rationale Function $f(x)$, von niedrigerem als dem s^{ten} Grade, so ist

$$f(x) = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_m y_m,$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_m$ bestimmte Constanten sind. Aus dieser Gleichung folgt:

$$k_1 \frac{d^s y_1}{dx^s} + k_2 \frac{d^s y_2}{dx^s} + \cdots + k_m \frac{d^s y_m}{dx^s} = 0. \tag{7.}$$

Genügen der Differentialgleichung (5.) noch mehrere andere ganze rationale Functionen von niedrigerem Grade als dem s^{ten}, so bestehen noch mehrere der Gleichung (7.) analoge Gleichungen. Es lassen sich alsdann nicht m In-

tegrale z der Form (6.) angeben, zwischen denen keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten bestände.

Man muss daher einen anderen Weg einschlagen, um diejenige Differentialgleichung herzustellen, welcher die s^{ten} Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.) und nur diese genügen.

Es sei $p_{m-\lambda}$ in der Reihe der Coefficienten der Differentialgleichung (5.) $p_m, p_{m-1}, \ldots, p_0$ der erste, welcher nicht verschwindet, und setzt man $\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} = u$ und $m-\lambda = \beta$, so geht (5.) über in

$$p_0 \frac{d^\beta u}{dx^\beta} + p_1 \frac{d^{\beta-1} u}{dx^{\beta-1}} + p_2 \frac{d^{\beta-2} u}{dx^{\beta-2}} + \cdots + p_\beta u = 0. \tag{8.}$$

Ist $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.), $u_1, u_2, \ldots, u_\beta$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (8.), und bezeichnet man das Resultat einer auf eine Function $f(x)$ α mal wiederholt angewandten Integration in üblicher Weise mit $\int^{(\alpha)} f(x)\,dx$, so sind

$$\int^{(\lambda)} u_1\,dx, \quad \int^{(\lambda)} u_2\,dx, \quad \ldots, \quad \int^{(\lambda)} u_\beta\,dx$$

Integrale der Differentialgleichung (5.). Es lassen sich daher diese Grössen linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch $y_1, y_2, \ldots, y_m$ darstellen. Differentiirt man die β Gleichungen, welche diese Darstellungen 384] liefern, λ mal, so folgt, dass $u_1, u_2, \ldots, u_\beta$ sich linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch die λ^{ten} Ableitungen von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ darstellen lassen.

II. Der Differentialgleichung (8.) genügen daher die λ^{ten} Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.) und nur diese.

Dividirt man Gleichung (8.) durch p_β und differentiirt, so erhält man eine Gleichung der Form

$$q_0 \frac{d^\beta v}{dx^\beta} + q_1 \frac{d^{\beta-1} v}{dx^{\beta-1}} + \cdots + q_\beta v = 0, \tag{9.}$$

wenn man $\frac{du}{dx} = v$ setzt. Sie wird befriedigt durch $v_1 = \frac{du_1}{dx}$, $v_2 = \frac{du_2}{dx}, \ldots, v_\beta = \frac{du_\beta}{dx}$, wo $u_1, u_2, \ldots, u_\beta$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (8.) ist. Nun aber ist eine Gleichung der Form $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_\beta v_\beta = 0$, wo $c_1, c_2, \ldots, c_\beta$ Constanten sind, unmöglich. Denn aus dieser würde sich ergeben

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_\beta u_\beta = C,$$

wo C eine Constante, und zwar eine von Null verschiedene, weil $u_1, u_2, \ldots, u_\beta$ ein Fundamentalsystem von (8.) ist. Es müsste demnach die Differentialgleichung (8.) eine nicht verschwindende Constante zum Integral haben, was unmöglich ist, weil p_β von Null verschieden ist. Man hat daher den Satz:

III. Der Differentialgleichung (9.) genügen die ersten Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (8.), und nur diese.

Der Differentialgleichung (9.) genügen also die $\lambda+1^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.) und nur diese. Daher ergiebt sich folgendes Verfahren, um eine lineare homogene Differentialgleichung herzustellen, welcher die s^{ten} Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.) und nur diese genügen:

Man dividire die Differentialgleichung (5.) durch den Coefficienten der niedrigsten der wirklich darin enthaltenen Ableitungen, abgesehen von einem constanten Factor, und differentiire die so erhaltene Gleichung. Auf die alsdann entstandene Differentialgleichung wende man dasselbe Verfahren an, auf die nunmehr entstandene wiederum dasselbe Verfahren, und fahre nur so lange fort, bis man zum ersten Male eine Differentialgleichung erhält, in welcher der niedrigste der wirklich darin enthaltenen Differentialquotienten gleicher oder höherer Ordnung als $\frac{d^s y}{dx^s}$ ist, so ist diese Differentialgleichung die gesuchte. —

Es ist noch zu bemerken, dass in dem Systeme von Differentialgleichungen, welches man erhält, wenn man $s = r_1 + 1$ annimmt und dieses Verfahren auf die Differentialgleichung (1.) anwendet, jede Differentialgleichung als Diffe- [385
rentialgleichung für die niedrigste der wirklich darin enthaltenen Ableitungen aufgefasst, die Gestalt der Differentialgleichung (3.) hat, wenn man in dieser statt z diese niedrigste Ableitung setzt. Die derselben zugehörige determinirende Fundamentalgleichung (4.) darf keine negativen Wurzeln enthalten, wenn a ein ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (1.) ist. Zieht man es daher vor, successive die einzelnen den verschiedenen Differentialgleichungen des Systems angehörigen Fundamentalgleichungen zu untersuchen, so wird man häufig nicht erst bis zur Differentialgleichung für $\frac{d^{r_1+1} y}{dx^{r_1+1}}$ vorzuschreiten brauchen, um zu entscheiden, ob a ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (1.) ist, nämlich dann, wenn eine der erwähnten Fundamentalgleichungen negative Wurzeln enthält. —

Berlin, im Januar 1868.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 207, Zeile 9 v. u. $x-a$ statt $x-a$,
„ 211, „ 2 Productform statt Productenform,
„ 211, „ 5 v. u. im Exponenten auf der rechten Seite der Gleichung a statt a,
„ 212, „ 12 A. statt Abh.,
„ 216, „ 7 v. u. ω_1 statt ω,
„ 217, „ 4 v. u. ist ferner statt sind ferner,
„ 219, „ 6 v. u. (A. § 6 I.) statt (A. § 6 No. 2),
„ 220, „ 8 die mit $2\pi i$ multiplicirten statt das $2\pi i$-fache der,
„ 221, „ 7 Constanten statt Constante,
„ 226, „ 20 (E) statt R,
„ 228, „ 8 v. u. eindeutige, continuirliche statt eindeutig, continuirlich,
„ 229, „ 7 v. u. $\varphi(a,0)c_0$ statt $\varphi(a,0)$,
„ 237, „ 11 v. u. s derselben statt derselben s,
„ 238, „ 12, 13 wiederholt angewandten statt wiederholte,
„ 239, „ 17 der statt die,
„ 239, „ 10 v. u. s statt y.

Es wurde eingefügt:

S. 210, Zeile 11 »sind«,
„ 216, „ 7 »Gl.«,
„ 239, „ 2 »ein«.

2) Auf S. 207, Zeile 2 bis Gl. (4.) einschliesslich müssen (vergl. HEFFTER, zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Habilitationsschrift etc., Leipzig, 1888, S. 14) die daselbst auftretenden Grössen φ_{ab} durch $(x-a)^{k_a}\varphi_{ab}$ ersetzt werden. Ebenso ist die S. 217, Zeile 5 vorkommende Gleichung durch

$$(x-a)^{r_a}\varphi_{aa} = \text{Const.}\,(x-a)^{r_1}\varphi_{11}$$

zu ersetzen.

Zur No. 2 vergl. die Anmerkung 2) zu der vorhergehenden Abhandlung VI, S. 208.

Am Schlusse der Abhandlung S. 239, Zeile 2 u. 6 v. u. muss an Stelle von Fundamentalgleichung gesetzt werden determinirende Fundamentalgleichung.

SCH.

VIII.

DIE PERIODICITÄTSMODULN DER HYPERELLIPTISCHEN INTEGRALE ALS FUNCTIONEN EINES PARAMETERS AUFGEFASST.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 71, 1870, S. 91—127.)

Man wird in der Analysis häufig zur Darstellung einer Function durch [91 ein bestimmtes Integral geführt, welches das Argument derselben als Parameter enthält. Besonders häufig werden Integrale linearer Differentialgleichungen unter diese Form gebracht. Diese Darstellung einer Function hat vor der durch unendliche Reihen im Allgemeinen die Gültigkeit in der ganzen Ebene voraus. Aber es ist bisher nur in wenigen Fällen gelungen, die Eigenschaften der Functionen aus der Integralform herzuleiten. Ich hoffe daher, es werde nicht überflüssig erscheinen, wenn ich im Folgenden die bestimmten Integrale, welche in der Theorie der hyperelliptischen Functionen unter dem Namen der Periodicitätsmoduln auftreten, als Functionen eines Parameters aufgefasst, untersuche. Es werden die Haupteigenschaften dieser Functionen hergeleitet und lineare Differentialgleichungen, denen sie genügen, entwickelt. — Es wird ersichtlich sein, dass die hier befolgte Methode sich auf die Periodicitätsmoduln der allgemeinen ABELschen Integrale anwenden lässt, und im Wesentlichen für diese zu ganz identischen Ergebnissen führt. Ich behalte mir vor, bei anderer Gelegenheit dieses weiter nachzuweisen. — Die hier auftretenden Differentialgleichungen gehören zur Klasse derjenigen, welche ich in den Abhandlungen (dieses Journal Bd. 66, No. 4 Gl. (12.)[1]) und Bd. 68[2])) betrachtet;

---

[1]) S. 186 dieses Bandes. Sch.

[2]) Abh. VII, S. 205 ff. dieses Bandes. Sch.

und in so fern steht die gegenwärtige Arbeit mit jenen im engsten Zusammenhange. In der That ist sie in ihren Grundzügen schon vor mehr als zwei Jahren entworfen, und nur ihre Endredaction durch verschiedene Hindernisse verschoben worden. — Die eben angeführten Abhandlungen werde ich der Kürze halber im Folgenden unter dem Zeichen A. B. 66 und A. B. 68 citiren.

1.

Es sei

$$s^2 = \varphi(x, u), \tag{1.}$$

wo $\varphi(x, u)$ eine ganze rationale Function von x und u ist, und zwar in Be-92] zug auf x vom Grade n, von der Beschaffenheit, dass nicht zwei der Wurzeln der Gleichung für x

$$\varphi(x, u) = 0, \tag{2.}$$

die wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnen wollen, für jeden Werth von u einander gleich sind. Stellen wir die Function s nach RIEMANN durch eine zweiblättrige Fläche T dar, so sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Verzweigungspunkte derselben. Ebenso stellen wir die durch die Gleichung (2.) definirte algebraische Function x von u durch eine n-blättrige Fläche S dar, und bezeichnen deren Verzweigungspunkte (auch solche Punkte eingerechnet, in welchen Wurzeln einander gleich sind, ohne dass Verzweigung stattfindet) mit $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$. Durch die n Blätter dieser Fläche wird also der Verlauf der Verzweigungspunkte der Fläche T bestimmt.

Es sei $u^{(0)}$ ein von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedener Punkt und $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ die ihm entsprechenden Wurzeln der Gleichung (2.), so werde die Form $T^{(0)}$ der zugehörigen Fläche T folgendermassen bestimmt. Es werde ein die beiden die x-Ebene bedeckenden Blätter durchdringender Schnitt, Hauptschnitt, längs einer durch alle Verzweigungspunkte $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ hindurchgehenden, sich selbst nicht durchschneidenden Linie geführt, und alsdann das obere und untere Blatt eindeutig mit den Werthen von s belegt. Nennt man einen zwischen zwei auf einander folgenden Verzweigungspunkten enthaltenen Abschnitt des Hauptschnittes einen Theil desselben, so werden beide Blätter in diesen Theilen abwechselnd in einander übergehen oder getrennt verlaufen. Die ersteren mögen Verzweigungstheile des Hauptschnittes heissen.

Geht u von $u^{(0)}$ continuirlich zu einem anderen Werthe u auf einem Wege über, der durch keinen der Verzweigungspunkte der Fläche S führt, so gehen die Wurzeln der Gleichung (2.) in der x-Ebene continuirlich von den Werthen $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ resp. zu den Werthen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ längs bestimmter Curven über, die resp. mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bezeichnet werden mögen. Zu gleicher Zeit gehen in jedem Punkte der x-Ebene, der nicht auf einer der letzteren Curven sich befindet, die zugehörigen Werthe von s in vollkommen bestimmte andere über.

Nunmehr denke man sich eine neue zweiblättrige Fläche über die x-Ebene ausgebreitet und verpflanze in jedem Punkte der x-Ehene die durch continuirliche Änderung von u umgewandelten Werthe von s des oberen und unteren Blattes von $T^{(0)}$ resp. in die über demselben Punkte der x-Ebene befind- [93 lichen Punkte des oberen und unteren Blattes der neuen Fläche. Diese letztere Fläche soll die dem Werthe u entsprechende Fläche T sein. In continuirlich auf einander folgenden Punkten derselben folgen alsdann in demselben Blatte die Werthe von s continuirlich auf einander, wenn nicht der Übergang durch einen Verzweigungstheil der Fläche $T^{(0)}$ oder durch eine der Curven A führt. Bei dem Übergange durch eine dieser Linien gelangt man zu entgegengesetzten Werthen von s. In der That sind die an verschiedenen Seiten der Verzweigungstheile in demselben Blatte von $T^{(0)}$ befindlichen Werthe von s entgegengesetzt gleich, folglich auch ihre durch continuirliche Änderung von u umgewandelten Werthe in dem entsprechenden Blatte der Fläche T. Ferner führt jeder noch so kleine Umlauf um einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ den Werth s continuirlich zum entgegengesetzten über, was nur möglich ist, wenn resp. an den Curven $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein plötzliches Übergehen zum entgegengesetzten Werth stattfindet. — Die beiden Blätter der Fläche T, deren Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, werden demnach längs einer Linie durchschnitten, welche aus dem Hauptschnitte der Fläche $T^{(0)}$ durch Einschalten der beiden Seiten der Curven A oder auch derselben Seite in zwei entgegengesetzten Richtungen genommen entsteht, und es werde dieser Schnitt der Hauptschnitt der Fläche T genannt.

Zwei Verzweigungspunkte der Flächen T und $T^{(0)}$, die durch continuirliche Änderung von u aus einander hervorgegangen sind, mögen entsprechende Verzweigungspunkte, und solche Theile ihrer bezüglichen Hauptschnitte, die

zwischen entsprechenden Verzweigungspunkten enthalten sind, entsprechende Theile genannt werden. Es folgt alsdann, dass die den Verzweigungstheilen der Fläche $T^{(0)}$ entsprechenden Theile des Hauptschnittes der Fläche T im Allgemeinen in ihrem ganzen Verlaufe Verzweigungstheile sind.

2.

Wenn zwei Curven A_λ und A_μ sich in einem Punkte m der x-Ebene schneiden, so muss einer der Verzweigungspunkte a_λ und a_μ, welche resp. diese Curven beschreiben, früher in m angelangt sein als der andere, da ihre Wege nicht durch einen der Verzweigungspunkte der Fläche S führen. Wenn a_λ früher anlangt als a_μ, so wollen wir sagen, die Curve A_λ geht der Curve A_μ in Bezug auf m voran. Ebenso befindet sich jeder dem Hauptschnitte der Fläche $T^{(0)}$ angehörige Punkt an seiner Stelle, ehe eine der Curven A sich dorthin erstreckt. Wir sagen daher analog, wenn ein Theil des Haupt-
94] schnitts der Fläche $T^{(0)}$ von einer der Curven A geschnitten wird, der erstere gehe der letzteren in Bezug auf den Durchschnittspunkt voran. — In beiden Fällen heisst der Theil der Curve A, welcher nach dem Durchschneiden mit der vorangehenden Curve entstanden, der nachfolgende Theil.

Die beiden Verzweigungspunkte, welche einen Theil des Hauptschnittes einer Fläche T abgrenzen, wollen wir in willkürlicher Weise als Anfangs- und Endpunkt desselben von einander unterscheiden, jedoch so, dass in allen Flächen T sowohl die Anfangspunkte als auch die Endpunkte entsprechender Theile entsprechende Verzweigungspunkte sind.

Bewegt man sich auf der x-Ebene längs eines Theiles des Hauptschnittes vom Anfangspunkte desselben zum Endpunkte hin, so sollen die linke und die rechte Seite dieser Bewegung auch die linke und die rechte Seite dieses Theiles genannt werden. —

Es sei nunmehr

$$y = \frac{f(x)}{s},$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Function von x und u bedeutet, so ist das Integral

$$s = \int y\,dx$$

in jeder Fläche T bestimmt, wenn der Integrationsweg vorgezeichnet wird. — Längs eines jeden im Endlichen verlaufenden Theils des Hauptschnitts einer

Fläche T wird das Integral z vom Anfangspunkte bis zum Endpunkte dieses Theils auf der linken Seite desselben erstreckt, und zwar wird das Blatt, von welchem die Integration ihren Ausgang nimmt, so gewählt, dass der an einem dem Hauptschnitte der Fläche $T^{(0)}$ angehörigen Abschnitte des Theiles befindliche Integrationsweg im oberen Blatte verläuft. Überschreitet der Integrationsweg eine Curve A längs einer Linie, welche dieser Curve vorangeht, so ist ein Integrationsweg einzuschalten, welcher den nachfolgenden Theil der letzteren umgiebt. Die so gebildeten $n-1$ Integrale heissen die Periodicitätsmoduln des Integrals z in der Fläche T.*)

Für die Fläche $T^{(0)}$ sind demnach die Periodicitätsmoduln die an den Theilen des Hauptschnitts dieser Fläche auf der linken Seite derselben vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt im oberen Blatte sich erstreckenden Integrale.

Ein Periodicitätsmodul der Fläche $T^{(0)}$ repräsentirt in Verbindung mit der Schaar der in den verschiedenen Flächen T auf den entsprechenden [95 Theil der Haupschnitte derselben bezogenen Periodicitätsmoduln eine bestimmte Function von u.

3.

Die Periodicitätsmoduln sind in der Umgebung eines von den Verzweigungswerthen der Fläche S verschiedenen Werthes von u continuirlich und eindeutig. In der That sei u ein von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedener Punkt und $u' = u + \delta$ ein beliebig wenig davon verschiedener, T und T' resp. die zugehörigen Formen der Fläche T. Ferner mögen ein Paar dem Werthe u entsprechende Verzweigungspunkte a_λ und a_μ während des Überganges von u nach u' resp. auf den Curven A_λ und A_μ in a'_λ und a'_μ übergehen. Ist l der Theil des Hauptschnittes von T zwischen a_λ und a_μ, so ist die Curve, welche der Reihe nach aus A_λ, l, A_μ zusammengesetzt ist, der entsprechende Theil des Hauptschnitts der Fläche T'. Der Theil des Periodicitätsmoduls längs l in T' ist mit abnehmendem δ beliebig wenig von dem Periodicitätsmodul längs l in T verschieden, während die Integrale längs A_λ und A_μ, weil diese Curven mit δ beliebig klein werden, und weil u kein Verzweigungspunkt der Fläche S ist, selber mit δ beliebig klein werden. Hieraus folgt aber die Stetigkeit des Periodicitätsmoduls zwischen a_λ und a_μ.

*) Diesen Namen führen zwar gewöhnlich die doppelten Werthe unserer Integrale, allein dieser Unterschied ist für das Folgende gleichgültig.

Macht u um einen von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedenen Punkt einen in der Umgebung desselben befindlichen Umlauf, so kann die Fläche dieses Umlaufes so klein gewählt werden, dass die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebig kleine, ganz aus einander liegende vollständige Umläufe vollziehen. Ist l ein Theil des Hauptschnittes der Fläche T zwischen a_λ und a_μ, so besteht in der nach dem Umlauf resultirenden Fläche T' der entsprechende Theil des Hauptschnitts der Reihe nach aus der kleinen von a_λ beschriebenen Peripherie, aus l, und aus der kleinen von a_μ beschriebenen Peripherie. Da aber in der Fläche T' ausserhalb der von den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beschriebenen Umläufe s im oberen und unteren Blatte denselben Werth hat wie resp. in den über demselben Punkte der x-Ebene befindlichen Punkten des oberen und unteren Blattes von T, so folgt, dass der Theil des Periodicitätsmoduls längs l in beiden Flächen denselben Werth hat. Die Theile des Periodicitätsmoduls in T' längs den beiden Peripherieen sind aber, 96] weil der Umlauf von u um einen von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedenen Punkt geschieht, mit diesen Peripherieen verschwindend klein. Demnach sind die Periodicitätsmoduln an den entsprechenden Theilen der Hauptschnitte in T und T' einander gleich. Hieraus ergiebt sich, dass der Periodicitätsmodul in der Umgebung eines von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedenen Punktes u eindeutig ist.

4.

Es sei η ein Periodicitätsmodul zwischen a_λ und a_μ für irgend einen von den Verzweigungswerthen von S verschiedenen Werth, das heisst das Integral $z = \int y\,dx$ erstreckt über eine in No. 2 angegebene von a_λ nach a_μ führende Linie in der zu diesem Werthe von u gehörigen Fläche T. Man erstrecke das Integral z in T über eine geschlossene Curve q, welche den Integrationsweg von η derart umgiebt, dass sie durch keinen der Verzweigungspunkte hindurchführt und dass innerhalb derselben keine Verzweigungspunkte sich befinden, durch welche der Integrationsweg von η nicht hindurchführt, und bezeichne dieses Integral mit $\int' y\,dx$, so ist

$$\eta = \tfrac{1}{2}\int' y\,dx. \tag{1.}$$

Da u von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschieden ist, so können

die Dimensionen dieser Curve q bei hinlänglich kleinem δ so gewählt werden, dass sie mit einer geschlossenen Curve, welche den Integrationsweg des Periodicitätsmoduls η' an dem entsprechenden Theile des Hauptschnittes einer zum Werthe $u+\delta$ gehörigen Fläche T'' in ähnlicher Weise wie q den Weg von η umgiebt, in der x-Ebene sich deckt. Bezeichnet man alsdann das Integral, welches über die Curve q in T'' erstreckt ist, mit $\int'' y'dx$, wo y' und y demselben x zugehörige Werthe in den entsprechenden Blättern von T und T'' sind, und setzt man $y' = y + \Delta y$, so ist

$$\eta' = \tfrac{1}{2}\int'' y'dx, \tag{2.}$$

$$\int'' y'dx = \int' y\,dx + \int' \Delta y\,dx. \tag{3.}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, da y in keinem Punkte von q unendlich wird,

$$\lim \frac{\eta' - \eta}{\delta} \quad (\text{für } \delta = 0) \quad = \frac{d\eta}{du} = \frac{1}{2}\int' \frac{\partial y}{\partial u}dx. \tag{4.}$$

Da ebenso $\frac{\partial y}{\partial u}$, so wie alle folgenden Ableitungen von y nach u in keinem Punkte von q unendlich werden, so ergiebt sich auf dieselbe Weise für [97 jede Ordnung λ

$$\frac{d^\lambda \eta}{du^\lambda} = \frac{1}{2}\int' \frac{\partial^\lambda y}{\partial u^\lambda}dx. \tag{5.}$$

5.

Es sei b einer der Verzweigungspunkte der Fläche S, und möge u in dessen Umgebung von einer Anfangslage $u^{(0)}$ aus einen Umlauf vollziehen, so werden die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ im Allgemeinen in Gruppen zerfallen, derart, dass die Glieder einer Gruppe nach dem Umlaufe von u cyclisch in einander übergehen. Es können auch alle Grössen a eine einzige Gruppe bilden, und einzelne Gruppen nur ein einziges Glied enthalten. Der Anfangslage $u^{(0)}$ entspreche die Fläche $T^{(0)}$, und diese wandle sich nach dem Umlauf von u in T'' um. Die Curven, welche in der x-Ebene von einer Gruppe G der Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beschrieben werden, bilden die Begrenzung eines geschlossenen Raumes, welcher denjenigen Punkt α umschliesst, mit welchem die Glieder der Gruppe G für $u = b$ zusammenfallen. Diese geschlossenen Räume können theilweise zusammenfallen. In den über dem-

selben Punkte der x-Ebene befindlichen Punkten der Flächen $T^{(\infty)}$ und T' sind die Werthe von s im oberen und unteren Blatte der einen resp. denen im oberen und unteren Blatte der anderen entweder gleich oder entgegengesetzt, da $\varphi(x,u)$ eine symmetrische Function der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. Ersteres findet allemal statt für einen Punkt x ausserhalb der von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gebildeten Räume, dagegen wird letzteres innerhalb dieser Räume erfolgen, wenn in dem Werthe $e^{2k\pi i}\varphi(x,u)$, in welchen $\varphi(x,u)$ nach einem Umlaufe von u um b übergeht, k eine ungerade Zahl ist. — Ein Periodicitätsmodul des Integrals z in der Fläche T' kann demnach als ein Integral angesehen werden, welches in der Fläche $T^{(\infty)}$ zwischen zwei Verzweigungspunkten sich erstreckt, d. h. als eine Summe von positiven oder negativen ganzen Vielfachen der Periodicitätsmoduln in der Fläche $T^{(\infty)}$.

Die Periodicitätsmoduln als Functionen von u haben daher die Eigenschaft, nach einem Umlauf von u um einen Verzweigungspunkt der Fläche S in lineare homogene Functionen mit ganzzahligen Coefficienten ihrer ursprünglichen Werthe überzugehen.

Im Allgemeinen bleiben die Periodicitätsmoduln auch nicht unverändert, wenn u einen Umlauf um ∞ macht, selbst wenn letzterer Punkt nicht zu den Verzweigungspunkten der Fläche S gehört. Man zeigt ebenso wie für diese Verzweigungspunkte, dass jeder Periodicitätsmodul in eine lineare homogene Function mit ganzzahligen Coefficienten der ursprünglichen Periodicitätsmoduln übergeht.

98] 6.

Es muss nunmehr die Art der Unstetigkeit der Periodicitätsmoduln in den Verzweigungspunkten der Fläche S und für $u=\infty$ näher untersucht werden. — Es bedeute Π das Product der Differenzen der Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,u)=0$,*) und man setze an die Stelle jeder Differenz $a_\lambda - a_\mu$ den gleichwerthigen Ausdruck $a_\lambda - x - (a_\mu - x)$, so lässt sich Π auf die Gestalt

*) Ist $\psi(u)$ der Coefficient von x^n in $\varphi(x,u)$, so führt die Substitution $x=\frac{x'}{\psi(u)}$ das Integral $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x,u)}}$ über in ein anderes der Form $\psi(u)^\mu \int \frac{f_1(x')\,dx'}{\sqrt{\varphi_1(x',u)}}$, wo μ so gewählt werden kann, dass $f_1(x')$ und $\varphi_1(x',u)$ wieder ganze rationale Functionen von x' und u sind, und in letzterer der Coefficient von x'^n gleich Eins. Da die Eigenschaften des Factors $\psi(u)^\mu$ bekannt sind, so kann der Einfachheit wegen überall vorausgesetzt werden, dass der Coefficient von x^n in $\varphi(x,u)$ gleich Eins ist.

bringen:

$$\Pi = \sum k_\lambda (a_1 - x)^{\lambda_1} (a_2 - x)^{\lambda_2} \dots (a_n - x)^{\lambda_n}, \tag{1.}$$

eine Summe, in welcher der Coefficient k_λ jedes Gliedes eine positive oder negative ganze Zahl und die Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von einander verschiedene positive Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \dots, n-1$ sind, deren Summe gleich $\frac{1}{2} n(n-1)$.

Der Quotient irgend eines Gliedes der Summe (1.) durch $\sqrt{\varphi(x, u)}$ hat die Gestalt:

$$(-1)^{\frac{1}{2}n} k_\lambda (a_1 - x)^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} (a_2 - x)^{\lambda_2 - \frac{1}{2}} \dots (a_n - x)^{\lambda_n - \frac{1}{2}}. \tag{2.}$$

Ist keiner der Exponenten λ gleich Null, so wird der Ausdruck (2.) für keinen der Werthe $a_1, a_2, \dots, a_n$ unendlich. Ist einer davon, λ_1, gleich Null, so sind die übrigen von Null verschieden, der Ausdruck (2.) ist endlich für $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ und unendlich wie $(x - a_1)^{-\frac{1}{2}}$ für a_1. — Wenn mehrere der Grössen a gleich a_1 werden, so würde der Ausdruck (2.) auch für a_1 nicht unendlich werden.

Ist η ein Periodicitätsmodul, so hat man

$$\Pi . \eta = (-1)^{\frac{1}{2}n} \sum k_\lambda \int (a_1 - x)^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} (a_2 - x)^{\lambda_2 - \frac{1}{2}} \dots (a_n - x)^{\lambda_n - \frac{1}{2}} f(x)\, dx, \tag{3.}$$

die Integrale bezogen auf ein und dieselbe in No. 2 festgesetzte Linie zwischen zwei Verzweigungspunkten. Demnach ist $\Pi . \eta$ auch in den Verzweigungspunkten der Fläche S nicht unendlich. Ist b einer dieser Verzweigungspunkte, so ist Π in der Umgebung desselben von der Gestalt $(u-b)^\beta . \Pi'$, wo β eine positive Zahl und Π' eine in der Umgebung von b eindeutige, endliche und con- [99 tinuirliche Function bedeutet, die für $u = b$ von Null verschieden ist. Daher werden die Periodicitätsmoduln in den Verzweigungspunkten b der Fläche S so unstetig, dass sie mit einer bestimmten Potenz $(u-b)^\beta$ multiplicirt für $u = b$ nicht mehr unendlich sind.

Ist u^m die höchste Potenz von u in $f(x)$, so wird für jeden Periodicitätsmodul η, als ein im Endlichen verlaufendes Integral, jedenfalls $u^{-m} . \eta$ für $u = \infty$ nicht mehr unendlich.

7.

Theils zur Erläuterung des Vorhergehenden, theils für den späteren Gebrauch betrachten wir den besonderen Fall, dass

$$\varphi(x,u) = (x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_{n-1})(x-u),$$

wo $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ von u unabhängige und von einander verschiedene Grössen sind. — Die Fläche S besteht aus n über einander liegenden Blättern, in deren $n-1$ resp. die Werthe $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$, in einem aber der Werth u sich befindet. In den Punkten $u = k_1$, $u = k_2$, $\dots$, $u = k_{n-1}$ sind also zwei der Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,u) = 0$ einander gleich, eine Verzweigung der Fläche S findet jedoch in ihnen nicht statt.

In jeder Fläche T werde der Hauptschnitt der Reihe nach durch u, $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ oder $u, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, \infty$ geführt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Als Anfangspunkt des ersten Theiles werde ferner u, und als Anfangspunkt irgend eines zwischen k_λ und $k_{\lambda+1}$ enthaltenen Theils k_λ betrachtet. Die Hauptschnitte verschiedener Flächen T unterscheiden sich daher nur in ihrem ersten Theile.

Es sei $u^{(0)}$ ein Punkt in der Umgebung eines Verzweigungspunktes k_λ, und es mache u von $u^{(0)}$ ausgehend um diesen Verzweigungspunkt einen in dessen Umgebung befindlichen vollständigen Umlauf U, wodurch die Fläche $T^{(0)}$, welche der Anfangslage von u in $u^{(0)}$ entspricht, in die Fläche T' verwandelt wird, so besteht der erste Theil des Hauptschnitts der letzteren Fläche aus der geschlossenen Curve U, in der ihrer Erzeugung entgegengesetzten Richtung genommen, und aus dem ersten Theile des Hauptschnittes der Fläche $T^{(0)}$. — Wir können der Einfachheit wegen annehmen, dass der Hauptschnitt der Fläche $T^{(0)}$ sich nicht selbst durchschneide.

Für einen Werth x innerhalb U geht $x-u$ in $e^{2\pi i}(x-u)$ über, wenn u seinen Umlauf macht, während die übrigen Factoren von $\varphi(x,u)$ unverändert bleiben, demnach geht s in $-s$ über. Für einen Werth x ausserhalb U bleibt
100] s unverändert. Es stimmen daher die Werthe von s der oberen und unteren Blätter resp. von $T^{(0)}$ und T' über demselben Punkte der x-Ebene mit einander überein oder sind entgegengesetzt, je nachdem der Punkt x ausserhalb oder innerhalb U sich befindet.

Ist nunmehr

$$y = \frac{f(x)}{s},$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Function von x und u bedeutet, so befinden sich die Curven, über welche die Periodicitätsmoduln des Integrals $s = \int y\,dx$ in der Fläche $T^{(0)}$ erstreckt sind, alle im oberen Blatte. Bezeichnen wir die Periodicitätsmoduln in $T^{(0)}$ resp. zwischen $u^{(0)}$ und k_1, k_1 und $k_2, \ldots, k_{n-2}$ und k_{n-1} mit $(u^{(0)}, k_1)$, $(k_1, k_2), \ldots, (k_{n-2}, k_{n-1})$, ebenso ein im oberen Blatte von einem Verzweigungspunkte a nach einem Verzweigungspunkte b, die noch nicht durch den Hauptschnitt mit einander verbunden sind, erstrecktes Integral mit (a, b), und die Werthe, in welche alle diese Grössen nach einem Umlaufe von u um k_λ übergehen, d. h. die entsprechenden Periodicitätsmoduln und Integrale in T', indem wir diese Zeichen mit Accenten versehen, so ist für $\lambda = 2, 3, \ldots, n-2$

$$(1.) \qquad (u^0, k_1)' = -2(u^0, k_\lambda) + (u^0, k_1),$$

$$(1a.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = (k_\mu, k_{\mu+1})$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, \lambda-2, \lambda+1, \ldots, n-2$,

$$(1b.) \qquad (k_{\lambda-1}, k_\lambda)' = 3(u^0, k_\lambda) - (u^0, k_{\lambda-1}),$$

$$(1c.) \qquad (k_\lambda, k_{\lambda+1})' = (u^0, k_\lambda) + (u^0, k_{\lambda+1}).$$

Nun ist

$$(2.) \qquad (u^0, k_\mu) = (u^0, k_1) + (k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\mu-1}, k_\mu)$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$, daher erhält man aus (1.) bis (1c.)

$$(3.) \qquad (u^0, k_1)' = -(u^0, k_1) - 2\{(k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\lambda-1}, k_\lambda)\},$$

$$(3a.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = (k_\mu, k_{\mu+1})$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, \lambda-2, \lambda+1, \ldots, n-2$,

$$(3b.) \quad (k_{\lambda-1}, k_\lambda)' = 2\{(u^0, k_1) + (k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\lambda-2}, k_{\lambda-1})\} + 3(k_{\lambda-1}, k_\lambda),$$

$$(3c.) \quad (k_\lambda, k_{\lambda+1})' = 2\{(u^0, k_1) + (k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\lambda-1}, k_\lambda)\} + (k_\lambda, k_{\lambda+1}).$$

Für $\lambda = 1$ ist

$$(4.) \qquad (u^0, k_1)' = (u^0, k_1),$$

$$(4a.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = (k_\mu, k_{\mu+1})$$

für $\mu = 2, 3, \ldots, n-2$,

$$(4b.) \qquad (k_1, k_2)' = 2(u_1^0, k_1) + (k_1, k_2).$$

101] Für $\lambda = n-1$ gelten die Formeln (3.) bis (3b.), während die Formel (3c.) nicht in Betracht kommt.

Macht u einen Umlauf V um ∞, so bildet die Aussenseite desselben einen Umlauf um die Punkte $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Die über demselben Punkte der x-Ebene befindlichen Werthe von s in den oberen und unteren Blättern resp. der ursprünglichen Fläche $T^{(0)}$ und der nach dem Umlaufe von u entstandenen Fläche T' sind übereinstimmend oder entgegengesetzt, je nachdem x innerhalb oder ausserhalb V sich befindet. Wir können wieder der Einfachheit wegen annehmen, der Hauptschnitt der Fläche $T^{(0)}$ durchschneide sich selbst nicht. Wendet man hier dieselben Bezeichnungen an, wie oben, so ist,

wenn n gerade

$$(5.) \qquad (u^0, k_1)' = (u^0, k_1) + 2\{(k_2, k_3) + (k_4, k_5) + \cdots + (k_{n-2}, k_{n-1})\},$$

wenn n ungerade

$$(5a.) \qquad (u^0, k_1)' = 2\{(k_1, k_2) + (k_3, k_4) + \cdots + (k_{n-2}, k_{n-1})\} - (u^0, k_1)$$

und in beiden Fällen

$$(6.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = -(k_\mu, k_{\mu+1})$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, n-2$.

8.

Es seien in irgend einer Fläche T der Reihe nach $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ die Anfangspunkte und $a_2, a_3, \ldots, a_n$ die Endpunkte resp. des $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, (n-1)^{\text{ten}}$ Theils des Hauptschnitts, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ resp. die auf diese Theile bezogenen Periodicitätsmoduln. Wir umgeben den Integrationsweg eines jeden derselben in der in No. 4 angegebenen Weise mit geschlossenen Curven $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$. Je nachdem n gerade oder ungerade, wird durch $q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}$ oder durch $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ die Fläche T in eine einfach zusammenhangende T' zerlegt. Es ist ferner, wenn man das nach No. 4 über q_λ erstreckte Integral mit $\int_{(\lambda)}$ bezeichnet,

$$(1.)\qquad \begin{cases} \eta_{\lambda} = \frac{1}{2}\int_{(\lambda)} y\,dx, \\ \frac{d^{\mu}\eta_{\lambda}}{du^{\mu}} = \frac{1}{2}\int_{(\lambda)} \frac{\partial^{\mu} y}{\partial u^{\mu}}\,dx. \end{cases}$$

Es sei nunmehr von den Periodicitätsmoduln $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ eine Anzahl p nämlich $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ linearunabhängig, d. h. so beschaffen, dass eine [102 Gleichung

$$(2.)\qquad c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_p\eta_p = 0$$

mit von u unabhängigen Coefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ für einen endlichen Theil der u-Ebene nicht identisch stattfinden kann, während die übrigen η sich als lineare homogene Functionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ mit von u unabhängigen Coefficienten ausdrücken lassen. Man bilde eine lineare homogene Differentialgleichung

$$(3.)\qquad \beta_p\frac{d^p\eta}{du^p} + \beta_{p-1}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0\eta = 0,$$

welcher die p Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, folglich sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, und setze

$$Y = \beta_p\frac{\partial^p y}{\partial u^p} + \beta_{p-1}\frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} + \cdots + \beta_0 y,$$

so repräsentirt die Gleichung (3.) nach No. 4 und den Gleichungen (1.) dieser Nummer folgendes System von $n-1$ Gleichungen:

$$(4.)\qquad \int_{(\lambda)} Y\,dx = 0$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$.

Für ein gerades n ergeben die $n-2$ ersten derselben, dass $\int Y\,dx$ in der Fläche T' beim Überschreiten eines der Querschnitte, welche die Fläche T in die einfach zusammenhangende Fläche T' verwandeln, ungeändert bleibt; die letzte Gleichung (4.) enthält die Bedingung dafür, dass das Integral $\int Y\,dx$ für $x = \infty$ nicht logarithmisch unendlich werde.

Für ein ungerades n enthalten die $n-1$ Gleichungen (4.) die Bedingung, dass $\int Y\,dx$ beim Überschreiten der Querschnitte ungeändert bleibt. Das Integral $\int Y\,dx$ kann überhaupt für $x = \infty$ nicht logarithmisch unendlich werden.

In beiden Fällen also drückt das System der Gleichungen (4.) aus, dass $\int Y dx$ eine in der Fläche T überall eindeutige Function ist, die nur eine endliche Anzahl mal unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h. es ist $\int Y dx$ eine rationale Function von x und s, also

$$\int Y dx = P + Rs, \tag{5.}$$

wo P und R rationale Functionen von x sind. Da aber Y selbst, wie leicht zu sehen, von der Form Zs ist, wo Z eine rationale Function von x ist, 103] so ergiebt die Differentiation der Gleichung (5.)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Die Differentialgleichung (3.) ist daher gleichbedeutend mit dieser Gleichung:

$$\beta_p \frac{\partial^p y}{\partial u^p} + \beta_{p-1} \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} + \cdots + \beta_0 y = \frac{\partial}{\partial x}(Rs), \tag{6.}$$

wo R eine rationale Function von x bedeutet. Sind die Grössen β so bestimmt, dass die Differentialgleichung (3.) durch sämmtliche Periodicitätsmoduln befriedigt wird, so bewirken dieselben auch, dass die linke Seite der Gleichung (6.) der Differentialquotient einer mit s multiplicirten rationalen Function von x werde, und umgekehrt.

Um daher die Anzahl p der linear unabhängigen Periodicitätsmoduln und damit die Ordnung der Differentialgleichung (1.) zu bestimmen, wird die niedrigste Ordnungszahl p aufgesucht, für welche die Gleichung (6.) bestehen kann. Zu diesem Ende ist eine Reduction der Integrale $\int \frac{f(x)}{s} dx$ auf eine gewisse endliche Anzahl einfacher Integrale erforderlich.

9.

Zur Reduction der Integrale algebraischer Functionen der Form $\int \frac{f(x)}{s} dx$, worin $f(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, bedienen wir uns eines Verfahrens, welches mit demjenigen übereinstimmt, welches Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen zur Reduction der elliptischen Integrale anwendet. — Dasselbe beruht auf der Formel, aus welcher Jacobi den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei den Integralen dritter Gattung hergeleitet hat (Bd. 32, pag. 185 dieses Journals[1]).

[1] Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 121 ff. Sch.

Es werde der Kürze wegen $\varphi(x)$ statt $\varphi(x, u)$ geschrieben, und man setze:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{x-t}\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\varphi(x)}}, \qquad \psi(t,x) = \frac{1}{t-x}\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{\varphi(t)}},$$

so ist

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} = \frac{B}{\sqrt{\varphi(t)\,\varphi(x)}}, \tag{1.}$$

wo

$$B = \frac{1}{(x-t)^3}\Big[\varphi(t) - \varphi(x) - \varphi'(x)(t-x) - \frac{1}{2}(t-x)(\varphi'(t)-\varphi'(x))\Big],$$

indem

$$\varphi'(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$$

ist, eine ganze rationale Function von x und t und zwar in Bezug auf beide vom Grade $n-2$ wird. Man setze daher [104

$$B = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-2}x^{n-2},$$

wo die Coefficienten A rational aus den Coefficienten von $\varphi(x)$ gebildet werden. Integrirt man die Gleichung (1.) nach t, so dass die Integrale für einen Werth x_1 verschwinden, so erhält man

$$\frac{1}{x-t}\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\varphi(x)}} - \frac{1}{x-x_1}\frac{\sqrt{\varphi(x_1)}}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{t}\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}dt + \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_0^{n-2} x^a \int_{x_1}^{t}\frac{A_a\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}. \tag{2.}$$

Ist $\psi(x)$ irgend eine Function von x, so bedeuten

$$[\psi(x)]_{(x-a)^n} \quad \text{und} \quad [\psi(x)]_{\frac{1}{x^n}}$$

resp. die Coefficienten von $(x-a)^n$ und x^{-n} in den Entwicklungen von $\psi(x)$ nach steigenden Potenzen von $x-a$ und nach fallenden Potenzen von x.

Dividirt man die Gleichung (2.) durch $\sqrt{\varphi(t)}$, multiplicirt sie mit einer rationalen Function $g(t)$, die für $t = x_1$ unendlich wird, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\Big[\frac{g(t)}{x-t}\Big]_{(t-x_1)^{-1}} \\ &= \frac{\sqrt{\varphi(x_1)}}{(x-x_1)\sqrt{\varphi(x)}}\Big[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\Big]_{(t-x_1)^{-1}} + \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{x_1}^{t}\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\Big]_{(t-x_1)^{-1}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_0^{n-2} x^a\Big[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{x_1}^{t}\frac{A_a\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\Big]_{(t-x_1)^{-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.}$$

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung (1.) nach fallenden Potenzen von t und integrirt derart, dass man den Integralen keine Constante hinzufügt, so erhält man

$$(4.)\qquad \frac{1}{x-t}\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{t-x}\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{\varphi(t)}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_{0}^{n-2} x^{\alpha}\int \frac{A_\alpha}{\sqrt{\varphi(t)}}\,dt.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $g(t)$ und dividirt durch $\sqrt{\varphi(t)}$, so folgt

$$(5.)\qquad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\left[\dfrac{g(t)}{t-x}\right]_{\frac{1}{t}} \\ = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\displaystyle\int \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\,dt\right]_{\frac{1}{t}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_{0}^{n-2} x^{\alpha}\left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int \frac{A_\alpha\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}. \end{array}\right.$$

105] Sind überhaupt $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die Werthe, für welche $g(t)$ unendlich wird, so ist

$$(6.)\qquad g(x) = \left[\frac{g(t)}{t-x}\right]_{\frac{1}{t}} + \sum_{1}^{m}{}_{\beta}\left[\frac{g(t)}{x-t}\right]_{(t-x_\beta)^{-1}}.$$

Bildet man daher die der Gleichung (3.) ähnlichen Gleichungen für $x_2, x_3, \ldots, x_m$, und addirt die m Gleichungen zur Gleichung (5.), so folgt

$$(7.)\qquad \frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} = \sum_{0}^{m}{}_{\beta} C_\beta \frac{\sqrt{\varphi(x_\beta)}}{(x-x_\beta)\sqrt{\varphi(x)}} + \sum_{0}^{n-2}{}_{\alpha}\frac{\mathfrak{R}_\alpha x^\alpha}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(X(x)\sqrt{\varphi(x)}\right),$$

wo

$$(8.)\qquad \left\{\begin{array}{c} C_\beta = \left[\dfrac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_\beta)^{-1}}, \\ \mathfrak{R}_\alpha = \displaystyle\sum_{1}^{m}{}_{\beta}\left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{x_\beta}^{t}\frac{A_\alpha\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_\beta)^{-1}} - \left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int \frac{A_\alpha\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}, \\ X(x) = \displaystyle\sum_{1}^{m}{}_{\beta}\left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{x_\beta}^{t}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_\beta)^{-1}} - \left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}. \end{array}\right.$$

Ist x_β eine der Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$, so ist $C_\beta = 0$. Betrachten wir daher nur solche rationale Functionen $g(x)$, die nur für die Wurzeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dieser Gleichung unendlich werden, so verwandelt sich die Gleichung (7.) in:

$$(9.) \qquad \frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} = \sum_0^{n-3} \frac{\mathfrak{R}_a x^a}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{\partial}{\partial x}(X(x)\sqrt{\varphi(x)}),$$

wo in (8.) statt $x_1, x_2, \ldots, x_m$ Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$ zu setzen sind. Es ist zu ersehen, dass die Grössen C_b, $\mathfrak{R}_a$ und die Coefficienten von $X(x)$ in Gleichung (8.) sich rational aus den Coefficienten von $\varphi(x)$ und den Constanten in $g(x)$ zusammensetzen.

10.

Zu dieser Reduction ist für unseren Gebrauch noch der Nachweis hinzuzufügen, dass in der Gleichung (7.) voriger Nummer die Coefficienten C_b und $\mathfrak{R}_a$ einzeln verschwinden müssen, wenn $\frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$ der Differentialquotient einer rationalen Function von x und $\sqrt{\varphi(x)}$ sein soll.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_i$ die von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verschiedenen Werthe, für [106 welche $g(x)$ unendlich wird, und setzt man

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i) = \Pi(x)$$

und

$$\sum_1^i b \frac{C_b\sqrt{\varphi(x_b)}}{(x-x_b)} = \frac{Z(x)}{\Pi(x)}, \qquad \sum_0^{n-3} a \mathfrak{R}_a x^a = G(x),$$

so müsste, wenn $\frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$ der Differentialquotient einer rationalen Function von x und $\sqrt{\varphi(x)}$ sein soll,

$$\left[\frac{Z(x)}{\Pi(x)} + G(x)\right]\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial}{\partial x}[Q(x)\sqrt{\varphi(x)}]$$

sein, was sich ähnlich wie in No. 8 ergiebt; hieraus aber folgt:

$$(1.) \qquad \frac{Z(x) + \Pi(x)G(x)}{\Pi(x)} = Q'(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}Q(x)\varphi'(x),$$

wenn die Ableitungen durch Accente bezeichnet werden. — Da nun $Z(x)$ und $G(x)$ ganze rationale Functionen sind, so kann die linke Seite, folglich auch die rechte Seite der Gleichung (1.) für keinen endlichen Werth von x mehr als von der ersten Ordnung unendlich werden. Hieraus ergiebt sich aber, dass $Q(x)$ nur für die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unendlich werden kann, dass demnach $Z(x) + \Pi(x)G(x)$, folglich $Z(x)$ durch $\Pi(x)$ theil-

bar ist; dieses erfordert aber, dass $Z(x)$ identisch verschwindet, d. h.

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_i = 0.$$

Die Gleichung (1.) geht daher über in:

$$G(x) = Q'(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}Q(x)\varphi'(x). \tag{2.}$$

Es ergiebt sich leicht, dass $Q(x)$ für keinen endlichen Werth unendlich werden kann, ohne dass auch für denselben Werth die rechte Seite der Gleichung (2.) unendlich wird, dass also $Q(x)$ eine ganze rationale Function ist. Bezeichnet man den Grad derselben mit μ, so ist der Grad der rechten Seite der Gleichung (2.) gleich $\mu+n-1$, da die Summe der Coefficienten der höchsten Potenzen in den beiden Summanden derselben nicht Null sein kann. Nun ist aber der Grad von $G(x)$ der Voraussetzung nach der $(n-2)^{\text{te}}$, daher erfordert die Gleichung (2.), dass $Q(x)$, also auch $G(x)$ identisch verschwinde, d. h.

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \cdots = \mathfrak{R}_{n-2} = 0.$$

107] 11.

Es sei wieder, wie in No. 2—8,

$$y = \frac{f(x)}{\sqrt{\varphi(x,u)}},$$

wo $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Function von x und u bedeutet, so ist auf y und jede partielle Ableitung von y nach u die Gleichung (9.) in No. 9 anwendbar. Man hat demnach für jeden Werth von a

$$\frac{\partial^a y}{\partial u^a} = \sum_0^{n-2}{}_b \frac{\mathfrak{R}_{ab}x^b}{\sqrt{\varphi(x,u)}} + \frac{\partial}{\partial x}[X_a(x)\sqrt{\varphi(x,u)}], \tag{1.}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}_{ab} &= \sum_1^n{}_c\left[\frac{\partial^a y}{\partial u^a}\int_{a_c}^t \frac{A_b\,dt}{\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{(t-a_c)^{-1}} - \left[\frac{\partial^a y}{\partial u^a}\int \frac{A_b\,dt}{\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{\frac{1}{t}}, \\ X_a(x) &= \sum_1^n{}_c\left[\frac{\partial^a y}{\partial u^a}\int_{a_c}^t \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{(t-a_c)^{-1}} - \left[\frac{\partial^a y}{\partial u^a}\int \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{\frac{1}{t}}, \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

unter y die Function $\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t,u)}}$ verstanden. Die Grössen $\mathfrak{R}_{ab}$ und die Coefficienten von $X_a(x)$ sind rational aus den Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x,u)$ zusammengesetzt, also rationale Functionen von u.

. . .

Es seien $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots, \beta_1, \beta_0$ unbestimmte Grössen, und bilden wir die Function

$$Y = \beta_{n-1}\frac{\partial^{n-1}y}{\partial u^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{\partial^{n-2}y}{\partial u^{n-2}} + \cdots + \beta_1\frac{\partial y}{\partial u} + \beta_0 y,$$

so ergiebt die Gleichung (1.)

$$(3.) \qquad Y = \sum_0^{n-2}{}_b \frac{\mathfrak{R}_b^{(0)}x^b}{\sqrt{\varphi(x,u)}} + \frac{\partial}{\partial x}[X^{(0)}(x)\sqrt{\varphi(x,u)}],$$

wo

$$(4.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_b^{(0)} = \beta_{n-1}\mathfrak{R}_{n-1,b} + \beta_{n-2}\mathfrak{R}_{n-2,b} + \cdots + \beta_0\mathfrak{R}_{0,b}, \\ X^{(0)}(x) = \beta_{n-1}X_{n-1}(x) + \beta_{n-2}X_{n-2}(x) + \cdots + \beta_0 X_0(x). \end{cases}$$

Soll Y der Differentialquotient einer rationalen Function von x und s sein, so hat man nach voriger Nummer $n-1$ Gleichungen zu erfüllen, nämlich

$$(5.) \qquad \mathfrak{R}_0^{(0)} = 0, \quad \mathfrak{R}_1^{(0)} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_{n-2}^{(0)} = 0.$$

Im Allgemeinen, wenn nicht die Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x,u)$ besonderen Bedingungen unterworfen sind, werden sich aus diesem Systeme von Gleichungen bestimmte Werthe der Verhältnisse der Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots, \beta_1, \beta_0$ [108 ergeben. Hieraus ergiebt sich nicht nur, dass die Ordnung p der Differentialgleichung (3.) in No. 8, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, im Allgemeinen gleich $n-1$ ist, diese Differentialgleichung also im Allgemeinen die Form:

$$(6.) \qquad \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}\eta}{du^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{d^{n-2}\eta}{du^{n-2}} + \cdots + \beta_0\eta = 0$$

hat, sondern die Gleichungen (5.) können auch zur Bestimmung der Coefficienten derselben dienen. Im Allgemeinen sind also alle $n-1$ Periodicitätsmoduln linear unabhängig, d. h. im Allgemeinen findet keine Gleichung der Gestalt:

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_{n-1}\eta_{n-1} = 0$$

mit von u unabhängigen Coefficienten c in einem endlichen Theile der u-Ebene statt.

Für einen geradzahligen Werth von n ist bekanntlich

$$(7.) \qquad \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4 + \cdots + \eta_{n-1} = 2\pi i\varepsilon,$$

wo ε den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von y nach fallenden

Potenzen von x bedeutet (siehe PUISEUX in LIOUVILLE's Journal de Mathématiques t. XV und XVI, § 47 und 51). Die Differentialgleichung (6.) hat also in diesem Falle ein Integral ε, welches eine algebraische Function von u ist. — Ist ε von u unabhängig, so muss $\beta_0 = 0$ sich ergeben. — Ist $\varepsilon = 0$, so muss sich die Ordnung der Differentialgleichung (6.) um eine Einheit erniedrigen; setzt man in diesem Falle in den Gleichungen (5.) $\beta_{n-1} = 0$, so müssen die $n-1$ Gleichungen zwischen den $n-1$ Unbekannten $\beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \ldots, \beta_0$ mit einander verträglich bleiben.

Wenn überhaupt zwischen den Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x,u)$ derartige besondere Relationen stattfinden, dass man $\beta_{n-1} = \beta_{n-2} = \cdots = \beta_{p-1} = 0$ in den Gleichungen (5.) annehmen darf, ohne dass die $n-1$ Gleichungen mit einander unverträglich werden, sondern vielmehr alsdann p von ihnen die Verhältnisse der Grössen $\beta_p, \beta_{p-1}, \ldots, \beta_0$ bestimmen, so dass β_p von Null verschieden, und die übrigen $n-p-1$ Gleichungen eine Folge dieser p werden, so wird die Differentialgleichung, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, genau der p^{ten} Ordnung, nämlich:

$$\beta_p \frac{d^p\eta}{du^p} + \beta_{p-1}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0\eta = 0. \tag{8.}$$

109] Es sind alsdann p der Periodicitätsmoduln linear unabhängig, während die übrigen sich als lineare homogene Functionen derselben mit von u unabhängigen Coefficienten darstellen lassen.

12.

Es sei die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen,

$$\beta_p \frac{d^p\eta}{du^p} + \beta_{p-1}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0\eta = 0, \tag{1.}$$

so sind die Grössen $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}, \frac{\beta_{p-2}}{\beta_p}, \ldots, \frac{\beta_0}{\beta_p}$ rationale Functionen von u, da die Coefficienten der Gleichungen (5.) in No. 11 sich rational aus den Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x,u)$ zusammensetzen.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) oder diejenigen Punkte, für welche eine oder mehrere der Grössen $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}, \frac{\beta_{p-2}}{\beta_p}, \ldots, \frac{\beta_0}{\beta_p}$ unendlich werden, zerfallen in wesentliche und ausserwesentliche (A. B. 68, No. 8). Die ersteren

sind die Verzweigungspunkte der Fläche S, die letzteren hangen von der Beschaffenheit der Function $f(x)$ ab. Dieses ergiebt sich daraus, dass die Integrale der Differentialgleichung (1.) überall ausser in den Verzweigungspunkten der Fläche S eindeutig, endlich und continuirlich sind (nach No. 3).

Da aber nach No. 6 die Integrale in einem Verzweigungspunkte b der Fläche S und im Unendlichen nur so unstetig werden, dass sie resp. mit bestimmten Potenzen von $u-b$ und von u multiplicirt nicht mehr unendlich sind, so ergiebt sich (A. B. 66, No. 4 und B. 68, No. 3), wenn man die sämmtlichen singulären Punkte mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ bezeichnet und

$$\psi = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_\varrho)$$

setzt:

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\beta_{p-i}}{\beta_p} = \frac{F_{i(\varrho-1)}(u)}{\psi^i},$$

wo mit $F_a(u)$ eine ganze rationale Function von u, höchstens vom Grade a bezeichnet wird.

13.

Nach der vorigen Nummer hat die Differentialgleichung, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, wenn sie von der Ordnung p ist, die Gestalt:

$$\text{(1.)} \qquad \frac{d^p\eta}{du^p} + \frac{F_{\varrho-1}(u)}{\psi}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \frac{F_{2(\varrho-1)}(u)}{\psi^2}\frac{d^{p-2}\eta}{du^{p-2}} + \cdots + \frac{F_{p(\varrho-1)}(u)}{\psi^p}\eta = 0.$$

Die determinirende Fundamentalgleichung derselben (A. B. 68, No. 4) in [110 Bezug auf einen der wesentlich singulären Punkte α ist, wenn man

$$F_{a(\varrho-1)}(u)\frac{(u-\alpha)^a}{\psi^a} = P_a(u)$$

setzt:

$$\text{(2.)} \quad \begin{cases} r(r-1)(r-2)\ldots(r-p+1) \\ + P_1(\alpha)r(r-1)\ldots(r-p+2) + P_2(\alpha)r(r-1)\ldots(r-p+3) + \cdots + P_p(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Theilt man die Wurzeln dieser Gleichung in Gruppen, derart dass in jeder Gruppe (R) nur solche sich befinden, deren Differenz eine ganze Zahl oder Null ist, und ist r diejenige Wurzel einer solchen Gruppe, deren reeller Theil nicht von dem reellen Theile einer anderen Wurzel derselben Gruppe

übertroffen wird, so giebt es ein Integral der Differentialgleichung (1.) der Form

$$v = (u-\alpha)^r \chi(u), \tag{3.}$$

wo $\chi(u)$ in der Umgebung von α eindeutig, endlich und continuirlich und in α von Null verschieden ist (A. B. 66, No. 4 und 5, B. 68, No. 4 Satz IV.).

Es seien $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ die linear unabhängigen Periodicitätsmoduln, so bilden sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1.); man kann also p Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ so bestimmen, dass

$$v = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_p\eta_p. \tag{4.}$$

Nach einer gewissen Anzahl s von Umläufen von u um α kehren die sämmtlichen Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in sich selbst zurück. Bezeichnen wir die zur Darstellung von $\sqrt{\varphi(x,u)}$ dienende Fläche für einen bestimmten Werth von u in der Umgebung von α mit $T^{(0)}$, so wird jedenfalls die Form der nach $t = 2s$ Umdrehungen entstandenen Fläche (nach No. 1 und 5) mit $T^{(0)}$ identisch sein. Der Definition der Periodicitätsmoduln als Functionen von u (in No. 2) gemäss werden alsdann $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ nach $2t$ Umdrehungen von u um α um das Doppelte des Zuwachses derselben nach t Umdrehungen vermehrt. Es möge η_a nach t Umdrehungen in η'_a übergehen, so geht η_a nach $2t$ Umdrehungen in $\eta_a + 2(\eta'_a - \eta_a) = 2\eta'_a - \eta_a$ über. Bezeichnet man $e^{2r\pi i}$ mit ξ, so ist nach (3.) und (4.)

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_1^p{}_a c_a \eta'_a = \xi^t \sum_1^p{}_a c_a \eta_a, \\ 2\sum_1^p{}_a c_a \eta'_a - \sum_1^p{}_a c_a \eta_a = \xi^{2t} \sum_1^p{}_a c_a \eta_a. \end{array}\right. \tag{5.}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\xi^{2t} - 2\xi^t + 1 = 0,$$

d. h. $\xi^t = 1$, oder rt eine reale ganze Zahl.

III] Hieraus ergiebt sich, dass die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (2.) rationale Zahlen sind.

Die determinirende Fundamentalgleichung in Bezug auf den singulären Punkt α ist der in (A. B. 66, No. 3 Gl. (6.)) definirten Fundamentalgleichung vom p^{ten} Grade zugeordnet, derart, dass die mit $2\pi i$ multiplicirten Wurzeln

der ersteren die Logarithmen der Wurzeln der letzteren bilden (A. B. 68, No. 4). Hieraus ergiebt sich, dass die Wurzeln der zum singulären Punkt α gehörigen Fundamentalgleichung (A. B. 66, No. 3 Gl. (6.)) sämmtlich Wurzeln der Einheit sind.

14.

Die Form der Integrale der Differentialgleichung (1.) in voriger Nummer, in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes α haben wir (vergl. A. B. 66, No. 3, B. 68, No. 4 Satz IV.) folgendermassen festgestellt. Ist r diejenige Wurzel der Gleichung (2.) der vorigen Nummer, deren reeller Theil nicht von dem reellen Theile einer anderen Wurzel, die sich mit ihr in ein und derselben Gruppe (R) befindet, übertroffen wird, und nimmt man an, dass diese Gruppe überhaupt λ Wurzeln enthält, so giebt es eine zugeordnete Gruppe von λ Integralen, von der Beschaffenheit:

$$(1.) \qquad v_a = (u-\alpha)^r \sum_1^a{}_b \varphi_{ab} [\log (u-\alpha)]^{b-1},$$

$a = 1, 2, \ldots, \lambda$, wo $\varphi_{a1}, \varphi_{a2}, \ldots, \varphi_{aa}$ in der Umgebung von α eindeutige, endliche und continuirliche Functionen von u sind, die nicht sämmtlich für $u = \alpha$ verschwinden.

Zwischen diesen Integralen findet die Beziehung statt:

$$(2.) \qquad v'_a = w_{a1} v_1 + w_{a2} v_2 + \cdots + w_{a,a-1} v_{a-1} + e^{2r\pi i} v_a,$$

wo $w_{a1}, w_{a2}, \ldots, w_{a,a-1}$ Constanten, und $f(u)'$ den Werth der Function $f(u)$ nach einem Umlaufe von u um α darstellt.

Die Gesammtheit der den verschiedenen Wurzelgruppen (R) zugehörigen Integralgruppen v bildet ein Fundamentalsystem.

Bezeichnet man dieses Fundamentalsystem mit $v_1, v_2, \ldots, v_p$, so lässt sich jeder Periodicitätsmodul η_a auf die Gestalt bringen:

$$(3.) \qquad \eta_a = c_{a1} v_1 + c_{a2} v_2 + \cdots + c_{ap} v_p,$$

wo die Grössen c von u unabhängig sind.

Nach einem Umlaufe von u um α verwandelt sich die Gleichung (3.) in

$$(4.) \qquad \eta'_a = c_{a1} v'_1 + c_{a2} v'_2 + \cdots + c_{ap} v'_p.$$

112] An die Stelle von η'_α lässt sich (vergl. No. 5 und 11) eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ und folglich auch der Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ setzen. Andererseits lassen sich $v'_1, v'_2, \ldots, v'_p$ mit Hülfe der Gleichung (2.) ebenfalls als lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten der Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ darstellen. Die Vergleichung der Coefficienten resp. von $v_1, v_2, \ldots, v_p$ auf beiden Seiten der so umgewandelten Gleichungen (4.) liefert p^2 lineare homogene Gleichungen für die p^2 unbekannten Grössen $c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha p}$.

Sind daher die Integrale v bestimmt, wodurch die Grössen $w_{\alpha\beta}$ ebenfalls bestimmt sind, so ist im Allgemeinen die Darstellung jedes Periodicitätsmoduls durch $v_1, v_2, \ldots, v_p$ durch die Gleichung (3.) bis auf eine Constante gegeben. Die letztere wird mit Hülfe des Werthes, den η_α oder η_α mit einer bestimmten Potenz von $u-\alpha$ multiplicirt für $u = \alpha$ annimmt, bestimmt.

Ein ähnliches Verfahren gilt für die Bestimmung der Form der Periodicitätsmoduln in der Umgebung von $u = \infty$. Man hat zu dem Ende (vergl. A. B. 66, No. 3) in der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer $u = \frac{1}{t}$ zu setzen und die Integrale in der Umgebung von $t = 0$ in Betracht zu ziehen.

15.

Die wirkliche Bestimmung der Coefficienten der Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen, mit Hülfe der Gleichungen (5.) in No. 11 wird jedoch meistentheils umständlicher sein als ein directes Verfahren, welches sich unmittelbar an die Gleichung (6.) in No. 8 anschliesst.

Es werden nämlich n Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots, \beta_0$ bestimmt, derart dass die Gleichung

$$(1.) \qquad \beta_{n-1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial u^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial u^{n-2}} + \cdots + \beta_0 y = \frac{\partial}{\partial x}[F(x)\sqrt{\varphi(x,u)}],$$

wo $F(x)$ eine ebenfalls noch unbekannte rationale Function von x bedeutet, befriedigt wird. Es sei β_p die erste der Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots, \beta_0$, von β_{n-1} an gerechnet, welche dieser Bestimmung gemäss nicht Null sein darf, so ist die Ordnung der Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen, genau gleich p, und diese Differentialgleichung lautet:

$$(2.) \qquad \beta_p\frac{d^p \eta}{du^p} + \beta_{p-1}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0 \eta = 0.$$

Zur wirklichen Bestimmung der Grössen β werden die Differentiationen von y nach u in Gleichung (1.) ausgeführt, dadurch nimmt die linke Seite [113 derselben die Gestalt

$$G(x).\varphi(x,u)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

an, wo $G(x)$ eine ganze rationale Function von x im Allgemeinen vom Grade $m+(n-1)n$ bedeutet, in welcher die Grössen $\beta_{p-1}, \beta_{p-2}, \ldots, \beta_0$ linear enthalten sind und m der Grad von $f(x)$ ist. — Die rationale Function $F(x)$ kann nur für die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,u)=0$ unendlich werden. Es sei daher

$$F(x) = \frac{r(x)}{\varphi(x,u)^{n-1}},$$

so ergiebt sich:

$$G(x) = \frac{\partial r(x)}{\partial x}\varphi(x,u) - \frac{2n-3}{2}\frac{\partial \varphi(x,u)}{\partial x}r(x). \tag{3.}$$

Es ist $r(x)$ eine ganze rationale Function, im Allgemeinen vom Grade $m+(n-1)^2$; dieses ergiebt sich ähnlich wie in No. 10. — Die Vergleichung gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung (3.) liefert $m+n(n-1)+1$ lineare homogene Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der Verhältnisse der n Grössen β und der $m+(n-1)^2+1$ Coefficienten von $r(x)$.

16.

Es werde jetzt der besondere Fall betrachtet, dass $f(x)$ von u unabhängig und

$$\varphi(x,u) = A_0(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_{n-1})(x-u) = \psi(x)(x-u),$$

wo A_0 und $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ von u unabhängig sind.

Es ist alsdann

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial u^\alpha} = \sigma_\alpha (x-u)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}\psi(x)^{-\frac{1}{2}}f(x), \tag{1.}$$

wo

$$\sigma_\alpha = \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1)}{2^\alpha}.$$

Setzt man daher

$$\beta_{n-1}\frac{\partial^{n-1}y}{\partial u^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{\partial^{n-2}y}{\partial u^{n-2}} + \cdots + \beta_0 y = G(x)(x-u)^{-\frac{2n-1}{2}}\psi(x)^{-\frac{1}{2}}f(x), \tag{2.}$$

so ist

$$(3.)\quad G(x) = \beta_{n-1}\sigma_{n-1} + \beta_{n-2}\sigma_{n-2}(x-u) + \beta_{n-3}\sigma_{n-3}(x-u)^2 + \cdots + \beta_0(x-u)^{n-1}.$$

Nun soll (siehe Gl. (1.) vor. No.)

$$(4.)\qquad G(x)(x-u)^{-\frac{2n-1}{2}}\psi(x)^{-\frac{1}{2}}f(x) = \frac{\partial}{\partial x}[F(x)\sqrt{\varphi(x,u)}]$$

114] sein. Setzt man

$$F(x) = r(x)(x-u)^{-(n-1)},$$

so geht die rechte Seite über in:

$$(x-u)^{-\frac{2n-1}{2}}\psi(x)^{-\frac{1}{2}}\{r'(x)\varphi(x,u) + \tfrac{1}{2}r(x)[(x-u)\psi'(x) - (2n-3)\psi(x)]\},$$

wo

$$r'(x) = \frac{\partial r(x)}{\partial x}, \qquad \psi'(x) = \frac{d\psi(x)}{dx},$$

daher ist

$$(5.)\qquad G(x)f(x) = r'(x)\varphi(x,u) + \tfrac{1}{2}r(x)[(x-u)\psi'(x) - (2n-3)\psi(x)].$$

Der Grad μ der ganzen rationalen Function $r(x)$ wird folgendermassen ermittelt. Wir setzen:

$$\begin{aligned} r(x) &= R_0 x^\mu + R_1 x^{\mu-1} + \cdots + R_\mu, \\ \varphi(x,u) &= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n, \\ (x-u)\psi'(x) - (2n-3)\psi(x) &= B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \cdots + B_{n-1}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$G(x)f(x) = \sum_1^{n+\mu} C_\alpha x^{n+\mu-\alpha},$$

wo für $\alpha < \mu$ und $\alpha < n$

$$(6.)\qquad C_\alpha = \sum_0^{\alpha-1}\{(\mu-\beta)R_\beta A_{\alpha-\beta-1} + \tfrac{1}{2}B_{\alpha-\beta-1}R_\beta\}.$$

Da

$$B_0 = -(n-2)A_0,$$

so ist

$$(7.)\qquad C_1 = R_0 A_0\left[\mu - \frac{n-2}{2}\right]$$

und der Coefficient von $R_{\alpha-1}$ in C_α gleich

$$(8.)\qquad \left[\mu - \frac{n-2}{2} - \alpha + 1\right]A_0.$$

Ist n ungerade, so ist C_1 stets von Null verschieden; man darf also μ nicht grösser als m wählen. Da aber zur Bestimmung der Grössen β und der Coefficienten von $r(x)$ die durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung (5.) herzustellenden $m+n$ Gleichungen zu erfüllen sind, so darf auch im Allgemeinen μ nicht kleiner als m gewählt werden.

Ist n gerade, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $m > \frac{n-2}{2}$, so muss im Allgemeinen $\mu = m$ angenommen werden.

2) $m = \frac{n-2}{2}$. Es ist wieder $\mu = m$ zu nehmen. Allein aus Glei- [115
chung (7.) folgt alsdann, dass die rechte Seite der Gleichung (5.) vom Grade $m+n-2$, dass also nach Gleichung (3.) $\beta_0 = 0$. Es bleiben alsdann noch $m+n-1$ Gleichungen für die $n-1$ Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots, \beta_1$ und die $m+1$ Coefficienten $R_0, R_1, \ldots, R_m$.

3) $m < \frac{n-2}{2}$. Man nehme $\mu = \frac{n-2}{2}$. Es ist alsdann $C_1 = 0$ (Gl. (7.)). Bezeichnet man $\mu - m$ mit δ, so sind in den Gleichungen

$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \ldots, \quad C_\delta = 0 \tag{9.}$$

nach (8.) die Coefficienten von $R_1, R_2, \ldots, R_{\delta-1}$ resp. $-A_0, -2A_0, \ldots, -(\delta-1)A_0$ von Null verschieden, daher geben die Gleichungen (9.) die Grössen $R_1, R_2, \ldots, R_{\delta-1}$ durch R_0 ausgedrückt. Es bleibt auf der rechten Seite der Gleichung (5.) noch ein Ausdruck des $(n+m-1)^{\text{ten}}$ Grades, und es sind noch $m+n$ Gleichungen zwischen den n Grössen β und den $m+2$ Grössen $R_0, R_\delta, R_{\delta+1}, \ldots, R_\mu$ zu erfüllen. Man kann daher noch eine Gleichung hinzufügen, welche ausdrückt, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5.) durch $x-u$ theilbar ist, nämlich

$$r(u) = 0, \tag{10.}$$

woraus sich ergiebt:

$\beta_{n-1} = 0$, d. h. in diesem Falle ist die Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen, nicht höherer als $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die wirkliche Bestimmung der Grössen β aus der Gleichung (5.) wird am zweckmässigsten folgendermassen ausgeführt. Die Coefficienten von $r(x)$ werden so bestimmt, dass die rechte Seite der Gleichung (5.) durch $f(x)$, und im Falle eines geradzahligen n, und zugleich $m < \frac{n-2}{2}$, ausserdem durch $x-u$

theilbar sei. — Setzt man alsdann die ganze rationale Function von x

$$(11.) \qquad \frac{r'(x)\varphi(x,u)+\frac{1}{2}r(x)[(x-u)\psi'(x)-(2n-3)\psi(x)]}{f(x)} = \Pi(x),$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (3.) und (5.)

$$(12.) \qquad 1.2.3\ldots(i-1).\sigma_{n-i}\beta_{n-i} = \Pi^{(i-1)}(u)$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$, wo $\Pi^{(i-1)}(x)$ die $(i-1)^{te}$ Ableitung von $\Pi(x)$ nach x und $\Pi^{(0)}(x)$ die Function $\Pi(x)$ selber bezeichnet.

116] 17.

Es sei k eine der Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ der vorigen Nummer und $f(x)$ durch $(x-k)^2$ theilbar, so folgt aus Gleichung (5.) voriger Nummer, dass

$$(1.) \qquad \begin{cases} R(x) = r'(x)\varphi(x,u)+\frac{1}{2}r(x)[(x-u)\psi'(x)-(2n-3)\psi(x)] \\ \qquad = r'(x)\varphi(x,u)+r(x)[\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)] \end{cases}$$

den Factor $(x-k)^2$ enthält, dass also die Gleichungen

$$(2.) \qquad R(k) = 0, \quad R'(k) = 0, \quad \ldots, \quad R^{(2-1)}(k) = 0,$$

wo die Ableitungen nach x durch obere Accente bezeichnet sind, erfüllt werden müssen. Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt aber successive:

$$(3.) \qquad r(k) = 0, \quad r'(k) = 0, \quad \ldots, \quad r^{(2-1)}(k) = 0.$$

Es ist also $r(x)$ gleichzeitig mit $f(x)$ durch $(x-k)^2$ theilbar.

Es sei nunmehr

$$(4.) \qquad f(x) = f_1(x)\chi(x),$$

wo $\chi(x)$ nur aus Potenzen von Factoren von $\psi(x)$ zusammengesetzt ist, $f_1(x)$ aber keinen solchen Factor enthält, so ist $r(x)$ durch $\chi(x)$ theilbar. Setzt man aber

$$(5.) \qquad r(x) = \varrho(x)\chi(x),$$

so verwandelt sich die Function $\Pi(x)$ der vorigen Nummer in

$$(6.) \quad \Pi(x) = \frac{\varrho'(x)\varphi(x,u)+\varrho(x)\left[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)\right]}{f_1(x)},$$

wobei zu bemerken, dass $\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)$ eine ganze rationale Function von x ist.

18.

Ist insbesondere $f_1(x)=1$, so erhält man aus Gleichung (6.) voriger Nummer

$$(1.)\quad \Pi(x)=\varrho'(x)\varphi(x,u)+\varrho(x)\Big[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)\Big].$$

(A.) Ist n eine ungerade Zahl, so folgt aus No. 16, dass $\varrho(x)$ von x unabhängig ist. Ist n gerade und m (der Grad von $\chi(x)$) $\geqq\frac{n-2}{2}$, so ist $\varrho(x)$ wiederum von x unabhängig. In beiden Fällen also verwandelt sich die Gleichung (1.) in

$$(1a.)\qquad \Pi(x)=\varrho_0\Big[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)\Big],$$

wo ϱ_0 von x unabhängig.

(B.) Ist n gerade und $m<\frac{n-2}{2}$, so setze man nach No. 16 [117

$$(2.)\qquad \begin{cases}\varrho(x)=(x-u)\,\varrho_1(x) & \text{und}\\ \Pi(x)=(x-u)\,\Pi_1(x),\end{cases}$$

wo

$$(3.)\quad \Pi_1(x)=\varrho_1'(x)\varphi(x,u)+\varrho_1(x)\Big[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-2)\psi(x)\Big].$$

Es sei

$$(4.)\qquad \begin{cases}\varrho_1(x)=\varepsilon_0x^\nu+\varepsilon_1x^{\nu-1}+\cdots+\varepsilon_\nu,\\ \dfrac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\dfrac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-2)\psi(x)=\gamma_0x^{n-1}+\gamma_1x^{n-2}+\cdots+\gamma_{n-1},\\ \Pi_1(x)=\sum_1^{\nu+n}C_\alpha x^{n+\nu-\alpha},\end{cases}$$

so ist für $\alpha<n$ und $\alpha<\nu$

$$(5.)\qquad C_\alpha=\sum_0^{\alpha-1}{}_\beta\,[\gamma_\beta+(\nu-\alpha+\beta+1)A_\beta]\,\varepsilon_{\alpha-\beta-1}.$$

Insbesondere ist $\gamma_0=\Big[m-\frac{n-4}{2}\Big]A_0$, also

$$(6.)\qquad C_1=(\gamma_0+\nu A_0)\varepsilon_0=\Big[\nu+m-\frac{n-4}{2}\Big]A_0\varepsilon_0.$$

In unserem Falle geht die Gleichung (5.) in No. 16, wenn man

$$G(x) = (x-u)G_1(x) \tag{7.}$$

setzt, in

$$G_1(x) = \Pi_1(x) \tag{8.}$$

über. Da aber $G_1(x)$ vom Grade $n-2$, so darf der Grad von $\Pi_1(x)$ nicht höher als $n-2$ sein, demnach muss sein

$$\nu + m - \frac{n-4}{2} = 0,$$

oder wenn man $\frac{n-2}{2} - m$ gleich δ setzt,

$$\nu = \delta - 1. \tag{9.}$$

Nun bestimme man die Coefficienten ε durch folgende Gleichungen

$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \ldots, \quad C_\delta = 0. \tag{10.}$$

Da in diesen Gleichungen die Coefficienten von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\delta-1}$ resp.

$$-A_0, -2A_0, \ldots, -(\delta-1)A_0$$

sind, so werden durch dieselben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\delta-1}$ homogen durch ε_0 ausgedrückt. 118] Es wird hierdurch $\Pi_1(x)$ vom Grade $n-2$, wie es sein muss. Die Gleichung (8.) ergiebt alsdann

$$1.2.3\ldots(i-2).\sigma_{n-i}\beta_{n-i} = \Pi_1^{(i-2)}(u) \tag{11.}$$

für $i = 2, 3, \ldots, n$, (siehe Gl. (12.) No. 16), da β_{n-1} verschwindet.

19.

Ist z. B. n ungerade und $\chi(x) = 1$, so geht die Gleichung (1a.) voriger Nummer über in:

$$\Pi(x) = \varrho_0[\tfrac{1}{2}\varphi'(x,u) - (n-1)\psi(x)]. \tag{1.}$$

Nun ist

$$\varphi^{(\alpha)}(x,u) = \frac{\partial^\alpha \varphi(x,u)}{\partial x^\alpha} = (x-u)\frac{d^\alpha\psi(x)}{dx^\alpha} + \alpha\frac{d^{\alpha-1}\psi(x)}{dx^{\alpha-1}} = (x-u)\psi^{(\alpha)}(x) + \alpha\psi^{(\alpha-1)}(x),$$

demnach

$$\Pi^{(i-2)}(u) = \frac{i-2n+2}{2}\psi^{(i-2)}(u)\varrho_0, \tag{2.}$$

also, wenn man setzt:

$$\frac{i-2n+2}{2\sigma_{n-i}.1.2\ldots(i-1)} = \tau_{n-i}, \tag{3.}$$

nach Gleichung (12.) No. 16

$$\beta_{n-i} = \tau_{n-i}\psi^{(i-1)}(u)\varrho_0. \tag{4.}$$

Für das elliptische Integral ist n gleich 3 zu setzen und

$$\psi(x) = x(x-1). \tag{5.}$$

Aus Gleichung (4.) folgt

$$\beta_2 = -2u(u-1)\varrho_0, \quad \beta_1 = -2(2u-1)\varrho_0, \quad \beta_0 = -\tfrac{1}{2}\varrho_0. \tag{6.}$$

Daher ist die Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen:

$$2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta = 0. \tag{7.}$$

Setzt man $u = \frac{1}{x^2}$ und $\eta = x\zeta$, so verwandelt sich die Gleichung (7.) in die von LEGENDRE gefundene Differentialgleichung:

$$x(1-x^2)\frac{d^2\zeta}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{d\zeta}{dx} - x\zeta = 0. \tag{7a.}$$

Für die hyperelliptischen Integrale erster Gattung ist $n = 5$, und

$$\psi(x) = x(1-x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x). \tag{8.}$$

Aus Gleichung (4.) ergiebt sich

$$\left\{\begin{array}{c} \beta_4 = -\frac{8}{15}\psi(u)\varrho_0, \quad \beta_3 = -\frac{8}{5}\psi'(u)\varrho_0, \quad \beta_2 = -\frac{5}{8}\psi^{(2)}(u)\varrho_0, \\ \beta_1 = -\frac{2}{3}\psi^{(3)}(u)\varrho_0, \quad \beta_0 = -\frac{1}{16}\psi^{(4)}(u). \end{array}\right. \tag{9.}$$

Daher ist die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln: [119

$$\psi(u)\frac{d^4\eta}{du^4} + 3\psi'(u)\frac{d^3\eta}{du^3} + \frac{25}{8}\psi^{(2)}(u)\frac{d^2\eta}{du^2} + \frac{5}{4}\psi^{(3)}(u)\frac{d\eta}{du} + \frac{15}{128}\psi^{(4)}(u)\eta = 0. \tag{10.}$$

Transformirt man diese Differentialgleichung durch die Substitution $u = \frac{1}{x^2}$, $\eta = x\zeta$, so erhält man eine Differentialgleichung für ζ, die mit derjenigen übereinstimmt, die sich als Resultat der Elimination ergeben würde eines Systems von vier gleichzeitigen Differentialgleichungen, welches mein Freund KOENIGSBERGER in den Mathematischen Annalen von CLEBSCH und NEUMANN Bd. 1, Heft 2 veröffentlicht hat.

20.

Es werden jetzt die allgemeineren Voraussetzungen der No. 16 wieder aufgenommen. Die Ordnung der Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln wird niedriger als die $(n-1)^{te}$, wenn $\Pi(x)$ durch eine Potenz von $x-u$ theilbar ist. — Es sei daher

$$\Pi(x) = (x-u)^\lambda \Pi_1(x), \tag{1.}$$

wo $\Pi_1(x)$ für $x = u$ nicht mehr verschwindet, so ist auch

$$r(x) = (x-u)^\lambda \varrho_1(x), \tag{2.}$$

wo $\varrho_1(x)$ für $x = u$ nicht mehr verschwindet. Dieses ergiebt sich ähnlich wie in No. 17 für eine Potenz von $x-k$. Es ist alsdann nach No. 16 Gl. (11.) und No. 17 Gl. (1.)

$$\Pi_1(x) = \frac{\varrho_1'(x)\varphi(x,u) + \varrho_1(x)[\frac{1}{2}\varphi'(x,u) - (n-\lambda-1)\psi(x)]}{f(x)}. \tag{3.}$$

Nach Gl. (12.) in No. 16 ist daher

$$\beta_{n-1} = \beta_{n-2} = \cdots = \beta_{n-\lambda} = 0, \tag{4.}$$

während $\beta_{n-\lambda-1}$ von Null verschieden ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$n-\lambda-1 = p,$$

so ist die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln:

$$\beta_p \frac{d^p \eta}{du^p} + \beta_{p-1} \frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0 \eta = 0, \tag{5.}$$

wo nach Gleichung (12.) in No. 16

$$1.2.3\ldots(i+\lambda).\sigma_{p-i}\beta_{p-i} = \Pi^{(i+\lambda)}(u) = \frac{(i+\lambda)(i+\lambda-1)\ldots(i+1)}{1.2.3\ldots\lambda}\Pi_1^{(i)}(u).1.2.3\ldots$$

120] also

$$1.2.3\ldots i.\sigma_{p-i}\beta_{p-i} = \Pi_1^{(i)}(u) \qquad (i = 1,2,\ldots,p) \tag{6.}$$

und

$$\beta_p \sigma_p = \Pi_1(u). \tag{6a.}$$

Die Grössen β sind, abgesehen von einem gemeinsamen Factor, ganze rationale Functionen von u, demnach sind die Quotienten $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}, \frac{\beta_{p-2}}{\beta_p}, \ldots, \frac{\beta_0}{\beta_p}$

nur für diejenigen Werthe von u unendlich, für welche β_p verschwindet, d. h. die singulären Punkte der Differentialgleichung (5.) sind sämmtlich Wurzeln der Gleichung $\Pi_2(u) = 0$. Die unter ihnen befindlichen wesentlich singulären Punkte sind $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Aus Gleichung (6a.) und (3.) folgt:

$$\sigma_p \beta_p = -\frac{2n-2\lambda-3}{2} \frac{\psi(u)\varrho_2(u)}{f(u)}. \tag{7.}$$

Ist k eine der Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ und $f(x)$ genau durch $(x-k)^\tau$ theilbar, so ist (nach No. 17) $r(x)$, folglich auch $\varrho_2(x)$ genau durch $(x-k)^\tau$ theilbar. Im Allgemeinen wird alsdann $\frac{\varrho_2(u)}{f(u)}$ für $u = k$ nicht mehr verschwinden, und, so lange dieses stattfindet, jeder der Ausdrücke $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}(u-k)$ für $u = k$ nicht unendlich sein.

Nun ist:

$$\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}} \frac{\Pi_2'(u)}{\Pi_2(u)} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}} \left[\frac{2n-2\lambda-5}{2n-2\lambda-3} \frac{\varrho_2'(u)}{\varrho_2(u)} + \frac{2n-2\lambda-4}{2n-2\lambda-3} \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} - \frac{f'(u)}{f(u)} \right]. \tag{8.}$$

Es ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{f'(u)}{f(u)}(u-k) = \tau \quad \text{für} \quad u = k, \\ \text{und, so lange } \frac{\varrho_2(u)}{f(u)} \text{ für } u = k \text{ nicht verschwindet,} \\ \lim \frac{\varrho_2'(u)}{\varrho_2(u)}(u-k) = \tau \quad \text{für} \quad u = k, \\ \text{endlich} \\ \lim \frac{\psi'(u)}{\psi(u)}(u-k) = 1 \quad \text{für} \quad u = k, \end{array} \right. \tag{9.}$$

folglich nach Gleichung (8.)

$$\lim \frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}(u-k) = \frac{2p-2\tau-2}{2p-1} \frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}} = \frac{2p-2\tau-2}{2} = p-\tau-1. \tag{10.}$$

Da ferner

$$\lim \frac{\beta_{p-i}}{\beta_p}(u-k)^i = 0 \quad \text{für} \quad u = k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

so ist die zum singulären Punkte k zugehörige determinirende Fundamental- [121
gleichung (siehe No. 13 Gl. (2.))

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-p+1) + (p-\tau-1)r(r-1)\ldots(r-p+2) = 0$$

oder

$$r(r-1)(r-2)\dots(r-p+2)(r-\tau) = 0. \tag{11.}$$

Die Wurzeln derselben sind $0, 1, 2, \dots, p-2, \tau$, und bilden demnach eine einzige Gruppe.

Die zu derselben (A. B. 68, No. 4 und No. 7) gehörige Integralgruppe, welche mit $v_1, v_2, \dots, v_p$ bezeichnet werden möge, bildet ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.). In No. 14 ist gezeigt worden, wie man die Periodicitätsmoduln durch dasselbe in der Umgebung von $u = k$ darstellen kann. Ebenso haben wir dort angeführt, wie die Darstellung der Periodicitätsmoduln in der Umgebung von $u = \infty$ vorzunehmen ist.

21.

Zum Schluss wollen wir für den Fall des elliptischen Integrals

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}$$

die Integralgruppen, welche den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen entsprechen, und die Darstellung der Periodicitätsmoduln durch dieselben geben.

Die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln ist (Gl. (7.) No. 19)

$$2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta = 0. \tag{1.}$$

Die beiden singulären Punkte derselben, die zugleich wesentlich sind, sind $u = 0$ und $u = 1$.

Für beide ist die determinirende Fundamentalgleichung (Gl. (11.) No. 20, wo $p = n-1 = 2$ und $\tau = 0$ zu setzen ist)

$$r^2 = 0. \tag{2.}$$

1) Die Darstellung für den singulären Punkt $u = 0$.

Setzt man in die Differentialgleichung (1.)

$$\eta = \sum_0^\infty c_a u^a,$$

so ergiebt sich die Relation:

$$(a+1)^2 c_{a+1} = (a+\tfrac{1}{2})^2 c_a \tag{3.}$$

und hieraus (nach A. B. 66, No. 5 oder B. 68, No. 4 und 7) das Integral [122

$$(4.) \qquad v_{01} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\mathfrak{b}} \left(\frac{1.3.5 \ldots (2\mathfrak{b}-1)}{2.4.6 \ldots 2\mathfrak{b}} \right)^2 u^{\mathfrak{b}}.$$

Substituirt man in die Differentialgleichung (1.)

$$(5.) \qquad \eta = v_{01} \int \zeta_0 \, du,$$

so ergiebt sich

$$(6.) \qquad \zeta_0 = \frac{C}{u(u-1)v_{01}^2} = -\frac{C}{u} + C G_0(u),$$

wo

$$G_0(u) = \frac{1 + v_{01}^2 (u-1)}{v_{01}^2 u(u-1)}$$

in der Umgebung von $u = 0$ eindeutig, endlich und continuirlich, also in eine Reihe mit ganzen positiven Potenzen von u entwickelbar ist.

Aus Gleichung (5.) und (6.) ergiebt sich das particuläre Integral der Differentialgleichung (1.)

$$(7.) \qquad v_{02} = H_0(u) v_{01} - v_{01} \log u,$$

wo

$$H_0(u) = 4 \log 2 + \int_0^u G_0(u) \, du$$

gesetzt ist, also eine in der Umgebung von $u = 0$ eindeutige, endliche und continuirliche Function darstellt. Nach A. B. 66, No. 2 bilden v_{01} und v_{02} ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1.). —

Sind unter Beibehaltung der Bezeichnungen der No. 7 die beiden Periodicitätsmoduln

$$(8.) \qquad \eta_1 = (u, 0), \quad \eta_2 = (0, 1),$$

so setze man also (vergl. No. 14)

$$(9.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = c_{11} v_{01} + c_{12} v_{02}, \\ \eta_2 = c_{21} v_{01} + c_{22} v_{02}. \end{cases}$$

Es ist alsdann nach Gleichung (4.) und (7.)

$$(10.) \qquad \begin{cases} \eta_1' = (u, 0)' = (c_{11} - 2\pi i c_{12}) v_{01} + c_{12} v_{02}, \\ \eta_2' = (0, 1)' = (c_{21} - 2\pi i c_{22}) v_{01} + c_{22} v_{02}. \end{cases}$$

Es ist aber nach Gleichung (4.) und (4b.) in No. 7

$$(11.)\qquad \begin{cases} (u,0)' = (u,0) = c_{11}v_{01} + c_{12}v_{02}, \\ (0,1)' = 2(u,0) + (0,1) = (2c_{11} + c_{21})v_{01} + (2c_{12} + c_{22})v_{02}. \end{cases}$$

123] Aus den Gleichungen (10.) und (11.) ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von v_{01} und v_{02}

$$c_{12} = 0, \quad c_{22} = -\frac{1}{\pi i}c_{11}.$$

Demnach ist

$$(12.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = c_{11}v_{01}, \\ \eta_2 = c_{21}v_{01} - \frac{1}{\pi i}c_{11}v_{02}. \end{cases}$$

Um c_{11} und c_{21} zu bestimmen, erwäge man, dass

$$(13.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}, \\ \eta_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}. \end{cases}$$

Durch die Substitution $x = u\omega$ erhält man

$$\eta_1 = \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(u\omega-1)}},$$

also für $u = 0$,

$$\eta_1 = \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)}} = -\pi.$$

Da nun v_{01} für $u = 0$ gleich Eins wird, so ergiebt die erste Gleichung (12.)

$$(14.)\qquad c_{11} = -\pi.$$

Ferner ist

$$\eta_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} = A_0 + B_0,$$

wo

$$A_0 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}dx, \qquad B_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(u-x)}}.$$

Es ist aber

$$B_0 = \frac{2}{i}\log\left[\sqrt{u-1} + i\right] + i\log u$$

und für $u = 0$

$$A_0 = \frac{2}{i}\log 2.$$

Es ist demnach $\eta_2 - i\log u$ für $u = 0$ endlich und gleich $\frac{4}{i}\log 2 + \pi$. Setzt man für η_2 den Werth aus der ersten Gleichung (12.) mit Rücksicht auf Gleichung (7.) und (14.), so folgt

$$\eta_2 - i\log u = c_{21}v_{01} - iv_{02} - i\log u = c_{21}v_{01} - iH_0(u)v_{01} + iv_{01}\log u - i\log u.$$

Letzterer Ausdruck wird für $u = 0$ gleich $c_{21} - iH_0(0) = c_{21} - 4i\log 2$. Hier- [124
aus folgt, dass $c_{21} = \pi$, so dass die Gleichungen (12.) übergehen in:

$$(15.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = -\pi v_{01}, \\ \eta_2 = \pi v_{01} - iv_{02}. \end{cases}$$

2) Die Darstellung für den singulären Punkte $u = 1$.

Man findet auf ähnliche Weise wie im vorigen Falle ein Fundamentalsystem v_{11}, v_{12}:

$$(16.) \qquad \begin{cases} v_{11} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^\mathfrak{b}\left(\frac{1.3.5\ldots(2\mathfrak{b}-1)}{2.4.6\ldots 2\mathfrak{b}}\right)^2 (u-1)^\mathfrak{b}, \\ v_{12} = H_1(u)v_{11} + v_{11}\log(u-1), \end{cases}$$

wo

$$H_1(u) = -4\log 2 + \int_1^u \frac{1 - v_{11}^2 u}{u(u-1)v_{11}^2}\,du$$

eine in der Umgebung von $u = 1$ eindeutige, endliche und continuirliche Function ist. Setzt man

$$(17.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = d_{11}v_{11} + d_{12}v_{12}, \\ \eta_2 = d_{21}v_{11} + d_{22}v_{12}, \end{cases}$$

so folgt aus den Gleichungen (16.), dass nach einem Umlaufe um $u = 1$

$$(18.) \qquad \begin{cases} \eta_1' = (u,0)' = (d_{11} + 2\pi i d_{12})v_{11} + d_{12}v_{12}, \\ \eta_2' = (0,1)' = (d_{21} + 2\pi i d_{22})v_{11} + d_{22}v_{12}. \end{cases}$$

Andererseits ist nach No. 7 Gleichung (3.) und (3b.)

$$(19.) \qquad \begin{cases} (u,0)' = -(u,0) - 2(0,1) = -(d_{11} + 2d_{21})v_{11} - (d_{12} + 2d_{22})v_{12}, \\ (0,1)' = 2(u,0) + 3(0,1) = (2d_{11} + 3d_{21})v_{11} + (2d_{12} + 3d_{22})v_{22}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (18.) und (19.) folgt:

$$(20.) \qquad \begin{cases} d_{22} = -d_{12}, \\ d_{21} = -d_{11} - \pi i d_{12}. \end{cases}$$

Es ist ferner

$$\eta_1 = \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} = A_1 + B_1,$$

wo

$$A_1 = \int_u^0 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} dx, \qquad B_1 = \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-u)}}.$$

Man findet aber

$$B_1 = \pi i - 2\log(\sqrt{u}+1) + \log(u-1)$$

125] und für $u = 1$

$$A_1 = -2\log 2.$$

Demnach ist $\eta_1 - \log(u-1)$ für $u = 1$ gleich $\pi i - 4\log 2$. Andererseits ist

$$\eta_1 - \log(u-1) = d_{11} v_{11} + d_{12} H_1(u) v_{11} + d_{12} v_{11} \log(u-1) - \log(u-1);$$

es folgt mithin, da v_{11} für $u = 1$ gleich Eins wird,

$$(21.) \qquad d_{12} = 1,$$

$d_{11} + H_1(1) = d_{11} - 4\log 2 = \pi i - 4\log 2$, also

$$(22.) \qquad d_{11} = \pi i.$$

Es ist also nach den Gleichungen (17.), (20.), (21.), (22.)

$$(23.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \pi i v_{11} + v_{12}, \\ \eta_2 = -2\pi i v_{11} - v_{12}. \end{cases}$$

3) Die Darstellung in der Umgebung von $u = \infty$.

Man substituire in die Differentialgleichung (1.)

$$u = \frac{1}{t},$$

so erhält man

$$(24.) \qquad 2t^2(1-t)\frac{d^2\eta}{dt^2} - 2t^2\frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2}\eta = 0.$$

Die zu $t = 0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung ist:

$$r(r-1) + \tfrac{1}{4} = 0$$

oder

$$(r-\tfrac{1}{2})^2 = 0. \tag{25.}$$

Setzt man in die Differentialgleichung

$$\eta = t^{\frac{1}{2}} \sum_0^\infty{}_\alpha e_\alpha t^\alpha,$$

so ergiebt sich

$$e_{\alpha+1} = \left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\right)^2 e_\alpha. \tag{26.}$$

Hieraus ergiebt sich (A. B. 66, No. 5) das Integral $v_{\omega 1}$ der Differentialgleichung (1.)

$$v_{\omega 1} = \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_1^\infty{}_\alpha\left(\frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1)}{2.4.6\ldots 2\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{u}\right)^\alpha\right]. \tag{27.}$$

Substituirt man in die Differentialgleichung (24.)

$$\eta = v_{\omega 1}\int \zeta\, dt,$$

wo in $v_{\omega 1}$ in Gleichung (27.) $\frac{1}{u}$ durch t ersetzt ist, so findet sich

$$\zeta = \frac{C}{v_{\omega 1}^2(1-t)}, \tag{28.}$$

wo C von t unabhängig ist. — Setzt man [126

$$H_\infty(u) = -4\log 2 + \int_0^t \frac{t+v_{\omega 1}^2(t-1)}{v_{\omega 1}^2(1-t)\,t}\,dt,$$

so ist $H_\infty(u)$ eine in der Umgebung von $t=0$, d. h. von $u=\infty$ eindeutige, continuirliche und endliche Function, und es ergiebt sich als ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (1.)

$$v_{\omega 2} = v_{\omega 1} H_\infty(u) - v_{\bar{\omega}1}\log u. \tag{29.}$$

Da $v_{\omega 1}$ und $v_{\omega 2}$ ein Fundamentalsystem bilden, so setze man

$$\begin{cases} \eta_1 = e_{11}v_{\omega 1} + e_{12}v_{\omega 2}, \\ \eta_2 = e_{21}v_{\omega 1} + e_{22}v_{\omega 2}. \end{cases} \tag{30.}$$

Aus den Gleichungen (27.) und (29.) folgt, dass nach einem Umlaufe von u um ∞

$$\begin{cases} \eta_1' = -(e_{11}+2\pi i\, e_{12})v_{\omega 1} - e_{12}v_{\omega 2}, \\ \eta_2' = -(e_{21}+2\pi i\, e_{22})v_{\omega 1} - e_{22}v_{\omega 2}. \end{cases} \tag{31.}$$

Andererseits folgt aus No. 7 Gl. (5a.) und (6.)

$$(32.)\qquad \begin{cases} \eta_1' = 2\eta_2 - \eta_1 = (-e_{11}+2e_{21})v_{\omega 1} + (-e_{12}+2e_{22})v_{\omega 2}, \\ \eta_2' = \quad -\eta_2 = -e_{21}v_{\omega 1} - e_{22}v_{\omega 2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (31.) und (32.) ergiebt sich

$$(33.)\qquad \begin{cases} e_{22} = 0, \\ e_{21} = -\pi i e_{12}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\eta_1 = \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} = t^{\frac{1}{2}} \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-t)}},$$

wie sich aus den Substitutionen $x = \omega u$ und $u = \frac{1}{t}$ ergiebt.

Setzt man

$$\int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-t)}} = A_\omega + B_\omega,$$

wo

$$A_\omega = \int_1^0 \frac{1-\sqrt{1-\omega}}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-t)}}\,d\omega, \qquad B_\omega = \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(t-\omega)}},$$

so ergiebt sich

$$B_\omega = 2i\log[\sqrt{t-1}+i] - i\log t,$$

und für $t = 0$

$$A_\omega = 2i\log 2.$$

Es ist demnach $\eta_1 t^{-\frac{1}{2}} + i\log t$ für $t = 0$ gleich $-\pi + 4i\log 2$.

127] Andererseits ist nach den Gleichungen (29.) und (30.)

$$\eta_1 t^{-\frac{1}{2}} + i\log t = [e_{11} + e_{12}H_\omega(u)]v_{\omega 1} t^{-\frac{1}{2}} - e_{12}t^{-\frac{1}{2}} v_{\omega 1}\log u + i\log t,$$

also ist

$$(34.)\qquad e_{12} = -i,$$

und für $t = 0$

$$\eta_1 t^{-\frac{1}{2}} + i\log t = e_{11} - iH_\omega(\infty) = e_{11} + 4i\log 2,$$

also

$$(35.)\qquad e_{11} = -\pi.$$

Aus den Gleichungen (30.), (33.), (34.), (35.) folgt:

$$(36.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = -\pi v_{\omega 1} - iv_{\omega 2}, \\ \eta_2 = -\pi v_{\omega 1}. \end{cases}$$

Wir bemerken noch, da die Substitutionen

$$u = \frac{1}{k^2}, \quad x = s^2$$

das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} \text{ in } 2k \int \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

überführen, so ist, wenn

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}, \qquad K'i = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

gesetzt wird,

(37.)
$$K = -\frac{1}{2k}\eta_2 = \frac{\pi}{2k}v_{\omega 1},$$

$$K'i = \frac{1}{2k}(\eta_1 - \eta_2) = -\frac{i}{2k}v_{\omega 2},$$

also

(38.)
$$K' = -\frac{1}{2k}v_{\omega 2}.$$

Die beiden Formeln (37.), (38.) enthalten die bekannten Reihenentwickelungen für K und K'.

Greifswald, den 10. Juli 1869.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 244, Zeile 4 Verzweigungstheile statt Verzweigungsstellen,
„ 245, „ 5 v. u. abnehmendem statt abnehmenden,
„ 250, „ 7 einem statt einer,
„ 253, „ 2 $\frac{d^\mu \eta_\lambda}{du^\mu}$ statt $\frac{d^\mu \eta}{du^\mu}$,
„ 258, „ 2 v. u. $X_a(x)$ statt $X(x)$,
„ 260, „ 1 bedeutet statt ist,
„ 262, letzte Zeile die mit $2\pi i$ multiplicirten statt das $2\pi i$-fache der,
„ 266, Zeile 12 v. u. $\varphi(x, u)$ statt $\varphi(x)$,
„ 268, „ 11 v. u. den Gleichungen statt den beiden Gleichungen,
„ 272, Gl. (3.) im Zähler der rechten Seite $\varphi'(x, u)$ statt $\varphi'(u, x)$,
„ 276, Zeile 1 (4b.) statt (4a.),
„ 277, die Gleichungsnummer (16.) für beide Gleichungen $v_{11} = \cdots$, $v_{12} = \cdots$ statt nur für die Gleichung $v_{11} = \cdots$,
„ 278, Zeile 12 v. u. $H_1(1)$ statt $H_1(0)$,
„ 281, „ 5 überführen statt überführt,
„ 281, „ 3 v. u. Formeln (37.), (38.) statt letzteren Formeln.

Es wurde eingefügt:

S. 246, Zeile 4 v. u. »der Integrationsweg von«,
„ 264, „ 13 », bestimmt«,
„ 267, „ 11 v. u. »zu erfüllen«,
„ 275, „ 12 v. u. »von«,
„ 276, „ 8 v. u. »erste«,
„ 277, „ 4 »der ersten«.

SCH.

2) S. 244, Zeilen 8, 9 muss es statt »da ihre Wege nicht . . . führen« correcter heissen »da der Weg von u nicht . . . führt«.

Den Formeln (1b.), (1c.) S. 251 liegt die Vorstellung zu Grunde, dass, wenn z. B. der Theil $k_\lambda, k_{\lambda+1}$ des Hauptschnittes ein Verzweigungstheil ist, der Umlauf von u um den Punkt k_λ so vollzogen wird, dass u zuerst den Theil $k_{\lambda-1}, k_\lambda$ und dann den Theil $k_\lambda, k_{\lambda+1}$ überschreitet (vergl. etwa H. BROECKER, die Periodicitätsmoduln der ABELschen Integrale erster Gattung als Functionen eines Parameters aufgefasst für den Fall einer RIEMANNschen Fläche, deren Gleichung in Bezug auf die eine Variable binomisch ist, Inaugural-Dissertation, Berlin, 1893, S. 15 ff. und Fig. 5–8).

HEFFTER. SCH.

IX.

ÜBER EINE RATIONALE VERBINDUNG DER PERIODICITÄTSMODULN DER HYPERELLIPTISCHEN INTEGRALE.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 71, 1870, S. 128—136.)

Die von LEGENDRE entdeckte Relation zwischen den Periodicitäts- [128
moduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung (Traité des fonct. ell. t. I, ch. XII) besagt, dass eine gewisse rationale Verbindung derselben den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat. Von diesem Werthe abgesehen, lehrt die LEGENDRESche Relation, dass diese Verbindung von dem Modul unabhängig ist. — Stellt man sich nun allgemein die Aufgabe, solche rationale Verbindungen der Periodicitätsmoduln der zur Gleichung $s^2 = \varphi(x)$ gehörigen hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung zu bestimmen, die von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unabhängig sind, so lässt die LEGENDRESche Relation Verallgemeinerungen verschiedener Art zu. Es giebt aber unter diesen nur eine, welche den besonderen Zweck erfüllt, für die Darstellung der hyperelliptischen Functionen genau dieselbe Anwendung zu erlauben, wie die LEGENDRESche bei den elliptischen Functionen, nämlich das von Herrn WEIERSTRASS für die Integrale n^{ter} Ordnung aufgestellte System von $2n^2-n$ Relationen (Programm des Braunsberger Gymnasiums, Jahr 1848—49[1]), und Bd. 47, pag. 302 dieses Journals[2]). Sieht man aber von diesem Zwecke ab, so ist auch die von HAEDENKAMP (Bd. 22, p. 184 ff. dieses Journals) nach Andeutungen JACOBIS entwickelte Relation bemerkenswerth, besonders wenn man die dabei auf-

---

1) Weierstrass' Werke, Bd. I (1894), S. 111 ff. Sch.

2) Ebenda, S. 133 ff. Sch.

tretende Verbindung der Periodicitätsmoduln in Form einer Determinante darstellt. Allein die Entwickelung von HAEDENKAMP leidet, abgesehen von einigen darin enthaltenen Irrthümern, an dem Mangel, dass sie nicht für complexe Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und für complexe Integrationswege gültig bleibt. — Bei meinen Untersuchungen über die Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der ABELschen Integrale genügen, bin ich naturgemäss zur Aufsuchung solcher Verbindungen der Periodicitätsmoduln geführt worden, deren Werth von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unabhängig ist, und habe dabei unter anderem einen Determinantenausdruck erhalten, welchen ich im Wesentlichen mit dem in der HAEDENKAMPschen Abhandlung pag. 187 129] Gleichung (10.) befindlichen vielfachen Integral übereinstimmend fand. Ich glaube, dass die betreffenden Entwickelungen nicht bloss deshalb von Interesse sind, weil sie zu der angegebenen Relation ohne jede Beschränkung führen und eine bemerkenswerthe Anwendung dieser Differentialgleichungen enthalten, sondern auch weil dadurch diese sonst vereinzelt dastehende Relation mit der Theorie der Periodicitätsmoduln in Verbindung gebracht und der obige Gesichtspunkt für die Verallgemeinerung der LEGENDREschen Relation erläutert wird.

1.

Es sei

$$\varphi(x) = (x-u)(x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_{n-1}),$$

wo $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ von u unabhängige und von einander verschiedene Grössen sind, und es werde

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x-u}$$

und

$$y = \frac{\psi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

gesetzt. Die Periodicitätsmoduln des Integrals $\int y\,dx$ seien wie in No. 2 der vorangehenden Abhandlung definirt, und zwar werden die zwischen den Grenzen u und k_1, k_1 und k_2, k_2 und k_3, $\dots$, k_{n-2} und k_{n-1} genommenen Integrale resp. mit $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ bezeichnet.

Die Differentialgleichung, welcher dieselben als Functionen von u genügen, sei

$$(1.)\qquad \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}\eta}{du^{n-1}}+\beta_{n-2}\frac{d^{n-2}\eta}{du^{n-2}}+\cdots+\beta_0\eta=0,$$

so ist, wenn man setzt:

$$(2.)\qquad \Pi(x)=\tfrac{1}{2}\varrho[3(x-u)\psi'(x)-(2n-3)\psi(x)],$$

wo mit ϱ eine von x unabhängige Grösse und mit $\psi'(x)$ die Ableitung von $\psi(x)$ nach x bezeichnet ist, und

$$(3.)\qquad \sigma_\lambda=\frac{1.3.5\ldots(2\lambda-1)}{2^\lambda},$$

nach No. 18 Gl. (1a.) und No. 16 Gl. (12.) der vorangehenden Abhandlung

$$(4.)\qquad \begin{cases} \sigma_{n-1}\beta_{n-1}=\Pi(u), \\ 1.2.3\ldots(i-1)\,\sigma_{n-i}\beta_{n-i}=\Pi^{(i-1)}(u) \quad \text{für} \quad i=2,3,\ldots,n, \end{cases}$$

wo $\Pi^{(i-1)}(x)$ die $(i-1)^{te}$ Ableitung von $\Pi(x)$ nach x ist. Diese Gleichungen geben:

[130

$$(5.)\qquad \begin{cases} \sigma_{n-1}\beta_{n-1}=-\dfrac{2n-3}{2}\psi(u).\varrho, \\ \sigma_{n-2}\beta_{n-2}=-\dfrac{2n-6}{2}\psi'(u).\varrho, \\ 1.2.\sigma_{n-3}\beta_{n-3}=-\dfrac{2n-9}{2}\psi''(u).\varrho, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1.2\ldots(n-1)\,\sigma_0\beta_0=-\dfrac{2n-3n}{2}\psi^{(n-1)}(u).\varrho, \end{cases}$$

wo die Ableitungen von $\psi(x)$ durch obere Indices angedeutet sind.

Setzt man

$$\frac{d^\lambda\eta_\alpha}{du^\lambda}=\eta_\alpha^{(\lambda)}$$

und die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{(n-2)} & \eta_1^{(n-3)} & \cdots & \eta_1 \\ \eta_2^{(n-2)} & \eta_2^{(n-3)} & \cdots & \eta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{n-1}^{(n-2)} & \eta_{n-1}^{(n-3)} & \cdots & \eta_{n-1} \end{vmatrix}=\Delta,$$

so ist, da die Differentialgleichung für die Perioden in unserem Falle nicht niedrigerer Ordnung als der $(n-1)^{ten}$ sein kann (s. d. vor. Abh. No. 15 u. 18),

Δ von Null verschieden, daher führt die Gleichung

$$\frac{d\log\Delta}{du} = -\frac{\beta_{n-2}}{\beta_{n-1}}$$

nach den Gleichungen (5.) zu der folgenden:

$$\Delta = \frac{C}{\psi(u)^{n-3}}, \tag{6.}$$

wo C eine von Null verschiedene von u unabhängige Grösse ist. —

2.

Es ist

$$\frac{\partial^\lambda y}{\partial u^\lambda} = \sigma_\lambda (x-u)^{-\frac{2\lambda+1}{2}} \psi(x)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.}$$

Setzt man andererseits

$$\frac{\partial^\lambda y}{\partial u^\lambda} = f_\lambda(x)\varphi(x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x}\left[r_\lambda(x)(x-u)^{-\frac{2\lambda-1}{2}}\psi(x)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{2.}$$

so lässt sich (s. d. vorangehende Abh. No. 11) $r_\lambda(x)$ als ganze rationale Function von x derart bestimmen, dass $f_\lambda(x)$ eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $n-2$ wird. Aus Gleichung (1.) und (2.) folgt:

$$\sigma_\lambda\psi(x) = f_\lambda(x)(x-u)^\lambda + r'_\lambda(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}r_\lambda(x)\left[-(2\lambda-1)\psi(x) + (x-u)\psi'(x)\right], \tag{3.}$$

[131] wo

$$r'_\lambda(x) = \frac{\partial r_\lambda(x)}{\partial x}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich leicht, dass $r_\lambda(x)$ höchstens vom Grade $\lambda-1$ ist. Es sei daher

$$r_\lambda(x) = \sum_0^{\lambda-1}{}_\alpha \gamma_{\lambda\alpha}(x-u)^\alpha, \tag{4.}$$

so lassen sich die Coefficienten $\gamma_{\lambda\alpha}$ ohne Kenntniss der Function $f_\lambda(x)$ bestimmen, wenn man in die Gleichung (3.) und ihre $\lambda-1$ ersten Ableitungen $x=u$ substituirt. Insbesondere ist

$$\gamma_{\lambda 0} = -\frac{2\sigma_\lambda}{2\lambda-1}. \tag{5.}$$

Ferner ergiebt die Vergleichung der Coefficienten der höchsten Potenz von x

in der aus

(1a.) $$y = f_0(x)\varphi(x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x}[r_0(x)\varphi(x)^{\frac{1}{2}}]$$

folgenden Gleichung

(3a.) $$\psi(x) = f_0(x) + r_0'(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2} r_0(x)\varphi'(x):$$

(5a.) $$r_0(x) = \frac{2}{n}.$$

Ist $r_\lambda(x)$ bestimmt, alsdann ergiebt sich aus den Gleichungen (3.) und (3a.

(6.) $$\frac{f_\lambda(k_\alpha)}{\psi'(k_\alpha)} = -\frac{1}{2}\frac{r_\lambda(k_\alpha)}{(k_\alpha - u)^{\lambda-1}}$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, wodurch $f_\lambda(x)$ ebenfalls bekannt ist. Für unseren Zweck ist jedoch die vollständige Bestimmung nicht nöthig.

3.

Bezeichnet man die zu den Integrationsgrenzen u und k_1, k_1 und k_2, k_2 und k_3, …, k_{n-2} und k_{n-1} gehörigen Periodicitätsmoduln des Integrals $\int \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ resp. mit $\eta_{\alpha 1}, \eta_{\alpha 2}, \eta_{\alpha 3}, \ldots, \eta_{\alpha,n-1}$ und setzt

(1.) $$f_\lambda(x) = \sum_0^{n-2} f_{\lambda\beta} x^\beta,$$

so folgt aus den Gleichungen (1.) und (1a.) voriger Nummer nach der vorangehenden Abh. No. 4 und 8, dass für jedes λ:

(2.) $$\frac{d^\lambda \eta_{1\beta}}{du^\lambda} = \sum_0^{n-2} f_{\lambda\alpha}\eta_{\alpha\beta}$$

für $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$.

Setzt man daher die Determinante [132

$$\begin{vmatrix} f_{n-2,0} & f_{n-2,1} & \cdots & f_{n-2,n-2} \\ f_{n-3,0} & f_{n-3,1} & \cdots & f_{n-3,n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0,n-2} \end{vmatrix} = F$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_{01} & \eta_{02} & \cdots & \eta_{0,n-1} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{n-2,1} & \eta_{n-2,2} & \cdots & \eta_{n-2,n-1} \end{vmatrix} = H,$$

so folgt aus Gleichung (2.):

(3.) $$\Delta = FH.$$

Setzt man

(4.) $$\frac{\psi(x)}{x-k_a} = \psi_a(x) = \sum_0^{n-2} {}_b \psi_{ab} x^b,$$

so folgt aus der Gleichung:

$$f_\lambda(x) = \sum_1^{n-1} {}_a \frac{f_\lambda(k_a)}{\psi'(k_a)} \psi_a(x),$$

$$f_{\lambda b} = \sum_1^{n-1} {}_a \frac{f_\lambda(k_a)}{\psi'(k_a)} \psi_{ab}$$

oder nach Gleichung (6.) in voriger Nummer

(5.) $$f_{\lambda b} = -\frac{1}{2} \sum_1^{n-1} {}_a \frac{r_\lambda(k_a)}{(k_a-u)^{\lambda-1}} \psi_{ab}.$$

Bezeichnet man

$$\frac{r_\lambda(k_a)}{(k_a-u)^{\lambda-1}} \text{ mit } r_{\lambda a}$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{n-2,1} & r_{n-2,2} & \cdots & r_{n-2,n-1} \\ r_{n-3,1} & r_{n-3,2} & \cdots & r_{n-3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0,n-1} \end{vmatrix} \text{ mit } R,$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} \psi_{10} & \psi_{11} & \cdots & \psi_{1,n-2} \\ \psi_{20} & \psi_{21} & \cdots & \psi_{2,n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n-1,0} & \psi_{n-1,1} & \cdots & \psi_{n-1,n-2} \end{vmatrix} \text{ mit } \Psi,$$

133] so ergiebt die Gleichung (5.):

(6.) $$F = (-\tfrac{1}{2})^{n-1} R\Psi.$$

Setzt man

$$\frac{\gamma_{\lambda 0}}{(k_a-u)^{\lambda-1}} = \gamma_\lambda^{(a)},$$

so liefert eine einfache Transformation die Gleichung

$$R = \begin{vmatrix} \gamma_{n-2}^{(1)} & \gamma_{n-2}^{(2)} & \cdots & \gamma_{n-2}^{(n-1)} \\ \gamma_{n-3}^{(1)} & \gamma_{n-3}^{(2)} & \cdots & \gamma_{n-3}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{0}^{(1)} & \gamma_{0}^{(2)} & \cdots & \gamma_{0}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Es ist nun sofort zu sehen, dass $R\psi(u)^{n-2}$ gleich $\gamma_{n-2,0}\gamma_{n-3,0}\cdots\gamma_{00}$ mal dem Producte der Differenzen der Grössen $k_1-u, k_2-u, \ldots, k_{n-1}-u$, oder der Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Das Quadrat des letzteren Productes ist aber

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\psi'(k_1)\psi'(k_2)\ldots\psi'(k_{n-1}).$$

Es ist demnach

$$(7.)\quad \psi(u)^{n-2}R = \gamma_{n-2,0}\gamma_{n-3,0}\cdots\gamma_{00}\sqrt{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\psi'(k_1)\psi'(k_2)\ldots\psi'(k_{n-1})},$$

folglich nach den Gleichungen (5.) und (5a.) voriger Nummer $\psi(u)^{n-2}R$ von u unabhängig. Aus der Gleichung (6.) in No. 1 folgt, dass auch

$\frac{\Delta}{R}$, und weil Ψ von u unabhängig ist, ebenfalls

$\frac{\Delta}{F}$, d. h. H von u unabhängig.

Da aber H^2 in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ symmetrisch ist, so ergiebt sich, dass H überhaupt von den Wurzeln dieser Gleichung unabhängig ist.

Die Determinante H ist diejenige, in welche sich das vielfache Integral in der Abhandlung von HAEDENKAMP Gleichung (10.) S. 187 umformen lässt.

4.

Da die Determinante H die Eigenschaft besitzt, von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unabhängig zu sein, so können wir zur Bestimmung derselben für $\varphi(x)$ eine beliebige ganze rationale Function n^{ten} Grades mit ungleichen Linearfactoren wählen.

Am zweckmässsigsten scheint es zu sein,

$$(1.)\qquad \varphi(x) = x^n - 1$$

zu nehmen. Ist α eine primitive Wurzel der Gleichung [134

$$(2.)\qquad x^n = 1,$$

so kann man setzen

$$\eta_{ab} = \int_{\alpha^{b-1}}^{\alpha^b} \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}} \tag{3.}$$

für $b = 1, 2, \ldots, n-1$.

Nun ist

$$\int_{\alpha^{b-1}}^{\alpha^b} \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}} = \alpha^{(b-1)(a+1)} \int_1^{\alpha} \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}}, \tag{4.}$$

wie sich durch die Substitution von $\alpha^{b-1}x$ für x ergiebt. Ferner ist

$$\int_1^{\alpha} \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}} = \int_0^{\alpha} \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}} - \int_0^1 \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}} = (\alpha^{a+1}-1) \int_0^1 \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}}, \tag{5.}$$

wie aus der Substitution von αx für x folgt.

Demnach ist

$$H = \delta . \prod_a (\alpha^{a+1}-1) \int_0^1 \frac{x^a dx}{\sqrt{x^n-1}}, \tag{6.}$$

wo

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{(n-2)\cdot 1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \ldots & \alpha^{(n-2)\cdot 2} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \ldots & \alpha^{(n-2)\cdot 3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{n-1} & \alpha^{2(n-1)} & \ldots & \alpha^{(n-2)\cdot(n-1)} \end{vmatrix}$$

und das Product $\prod_a$ sich auf alle Werthe von a von 0 bis $n-2$ bezieht. — Es ergiebt sich leicht daraus, dass δ gleich dem Product der Differenzen der Wurzeln der Gleichung $\frac{x^n-1}{x-1} = 0$ ist, dass

für ein ungerades n

$$\delta = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n^{n-2}}, \tag{7.}$$

für ein gerades n

$$\delta = \sqrt{(-1)^{\frac{n-2}{2}} n^{n-2}}. \tag{7a.}$$

Ferner ist bekanntlich

$$\prod_a (\alpha^{a+1}-1) = (-1)^{n-1} n, \tag{8.}$$

135] endlich (siehe LEGENDRE, Traité des fonct. ell. T. II, Ch. II, éq. (*s*))

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1} dx}{\sqrt{x^n-1}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-b-1} dx}{\sqrt{x^n-1}} = -\frac{2\pi}{n} \frac{\operatorname{cotg} \frac{b\pi}{n}}{n-2b}, \tag{9.}$$

und wenn n gerade und $\mathfrak{b} = \frac{n}{2}$, so ist

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{x^n - 1}} = -\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}. \tag{9a.}$$

Demnach ist

für ein ungerades n

$$\prod_{\mathfrak{a}} \int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}} dx}{\sqrt{x^n - 1}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n} \cdots \operatorname{cotg}\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}}{(n-2)(n-4)\ldots 3.1},$$

für ein gerades n

$$\prod_{\mathfrak{a}} \int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}} dx}{\sqrt{x^n - 1}} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n} \cdots \operatorname{cotg}\frac{n-2}{2}\frac{\pi}{n}}{(n-2)(n-4)\ldots 2} \frac{\pi}{n},$$

oder

für ein ungerades n

$$\prod_{\mathfrak{a}} \int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}} dx}{\sqrt{x^n - 1}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}}{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}, \tag{10.}$$

für ein gerades n

$$\prod_{\mathfrak{a}} \int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}} dx}{\sqrt{x^n - 1}} = \frac{-\sqrt{-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\pi}{n}}{(n-2)(n-4)\ldots 2}. \tag{10a.}$$

Aus den Gleichungen (6.), (7.), (8.), (10.), (10a.) folgt

für ein ungerades n

$$H = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{4}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}, \tag{11.}$$

für ein gerades n

$$H = \frac{(-1)^{\frac{n}{4}} (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} \pi}{(n-2)(n-4)\ldots 2} \text{ *}). \tag{11a.}$$

*) In der mehrfach angeführten Gleichung (10.) Seite 187 der HAEDENKAMPschen Arbeit ist in dem vielfachen Integrale der durch die Transformation eingeführte Factor $\frac{1}{2^{n-1}}$ weggelassen, und auf die imaginären Werthe, welche die Einzelintegrale innerhalb der angegebenen Grenzen, selbst wenn diese reell sind, annehmen können, nicht Rücksicht genommen worden. Daher ist auch der daraus gefolgerte auf

136] Für $n = 3$ ergiebt sich

$$(l.) \qquad H = 2\pi\sqrt{-1}.$$

Diese Gleichung stimmt mit der LEGENDRE'schen überein. Denn nimmt man

$$\varphi(x) = x(x-1)(x-u),$$

so ist die Gleichung ($l.$) gleichbedeutend mit:

$$(l'.) \qquad \begin{vmatrix} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} & \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \\ \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} & \int_1^u \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \end{vmatrix} = 2\pi i.$$

Setzt man

$$x = y^2, \quad u = \frac{1}{k^2},$$

$$\Delta y = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\Delta y} = K, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta y} = K'i,$$

$$\int_0^1 \frac{k^2y^2\,dy}{\Delta y} = J, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2y^2\,dy}{\Delta y} = J'i,$$

so geht die Gleichung ($l'.$) über in

$$(l''.) \qquad KJ' - K'J = \frac{\pi}{2},$$

welches die LEGENDRE'sche Relation ist.

---

derselben Seite befindliche Werth des Doppelintegrals, für $n = 3$, nicht richtig, derselbe ist vielmehr, wie im Texte oben angegeben, gleich $2\pi\sqrt{-1}$.

Greifswald, den 12. August 1869.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 283, Zeile 2 v. u. p. 184 statt p. 148,

„ 287, Gl. (2.) $\frac{d^\lambda \eta_b}{du^\lambda}$ statt $\frac{d^\lambda \eta_{ab}}{du^\lambda}$.

2) Das am Schlusse der No. 3, S. 289 erwähnte HAEDENKAMPsche Integral (Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 22, 1841, S. 187, Gleichung (10.)) lautet:

$$\int \frac{\Pi(y_1 - y_\varkappa)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{\sqrt{X_1 X_2 \ldots X_{n-1}}},$$

wo das Product Π auf die Werthe

$$\lambda, \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \lambda < \varkappa$$

auszudehnen,

$$X_\varkappa = (a_1 - y_\varkappa)(a_2 - y_\varkappa)\ldots(a_n - y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$$

zu setzen und in Beziehung auf jedes $y_\varkappa$ zwischen den Grenzen $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ zu integriren ist.

SCH.

X.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Tomo IV, 1870—1871, p. 36—49.)

Le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puis- [36
sances de la variable indépendante est incontestablement en général la manière la plus simple, soit de les évaluer pour une valeur donnée de la variable, soit de les examiner par rapport à leur caractère dans le voisinage d'un point de discontinuité. Mais de plusieurs raisons ce développement est assujetti à des inconvénients considérables. L'un de ces inconvénients consiste en ce que, sous cette forme de représentation, certaines propriétés des fonctions restent cachées. C'est pourquoi en diverses recherches l'on s'est procuré différentes autres espèces de représentation qui font ressortir les propriétés que l'on a en vue; par exemple la représentation par la série de FOURIER pour faire voir la périodicité immédiatement par la forme. Un autre plus grave inconvénient des séries à puissances, qui est aussi la cause essentielle du premier, consiste en ce que l'on ne peut pas leur conserver la même forme dans tout le plan infini qui sert à la représentation de la variable indépendante; mais il faut au contraire la changer tant dans le voisinage des divers points de discontinuité que dans l'infini. Une représentation qui évite cet inconvénient, soit entièrement, soit en partie, est donc digne de quelque attention, lors même qu'elle est moins propre au calcul numérique. Pour cette raison il ne sera pas tout-à-fait superflu de donner dans ce mémoire une classe de développements des intégrales des équations différentielles linéaires qui conservent

leur forme, du moins pour toute valeur finie de la variable qui ne coïncide pas avec un des points de discontinuité. Les termes de ces séries sont formés 37] par des quadratures réitérées, ils sont donc naturellement compliqués quant au calcul, mais ils jouissent d'une loi de formation très claire. Dans le Journal de LIOUVILLE (année 1864[1]) Mr. CAQUÉ, en se plaçant à un point de vue tout différent du nôtre, a donné un développement en série des intégrales des équations différentielles linéaires qu'il trouve par le passage d'une équation à différences finies. En essayant de remplacer cette voie naturellement épineuse par une autre plus commode et plus courte, nous reconnûmes bientôt que la série de Mr. CAQUÉ peut être conçue comme cas spécial de la classe indiquée de représentations; et par là elle nous servira dans ce qui va suivre comme un simple exemple.

1.

Avant d'entrer dans la matière particulière de ce mémoire, nous allons préciser la forme d'une intégrale de l'équation différentielle:

$$y^{(m)} = p_{m-1}y^{(m-1)} + p_{m-2}y^{(m-2)} + \cdots + p_0 y + p \tag{1.}$$

de sorte que $y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ prennent pour $x = x_0$ respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$, en signifiant les dérivées prises par rapport à x par des accents supérieurs, et supposant que les fonctions de x arbitrairement données $p_{m-1}, p_{m-2}, \ldots, p_0, p$ ne deviennent pas infinies pour $x = x_0$, ou, ce qui veut dire le même, que x_0 n'est pas un point singulier de l'équation différentielle (voir à l'égard de cette dénomination le no. 1 de mon mémoire dans le Journal de CRELLE-BORCHARDT, t. 66[2]).

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales (dans le sens de mon mémoire déjà cité, no. 2) de l'équation différentielle

$$y^{(m)} = p_{m-1}y^{(m-1)} + p_{m-2}y^{(m-2)} + \cdots + p_0 y, \tag{2.}$$

on sait que l'on trouve d'après LAGRANGE les intégrales de l'équation (1.) en considérant dans l'expression:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

les coëfficients $c_1, c_2, \ldots, c_m$ comme dépendants de x et en les déterminant

1) Journal de Mathématiques p. et a. 2. Série, t. 9, p. 185—222. Sch.

2) Mém. VI, p. 159—202 de ce volume. Sch.

de façon que

$$(3.) \qquad y^{(i)} = c_1 y_1^{(i)} + c_2 y_2^{(i)} + \cdots + c_m y_m^{(i)} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

A cet effet les fonctions c doivent satisfaire aux équations: [38

$$(4.) \qquad c_1' y_1^{(i)} + c_2' y_2^{(i)} + \cdots + c_m' y_m^{(i)} = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, m-2.$$

A ces équations on doit adjoindre encore une équation qui exprime que y est une intégrale de l'équation (1.).

En posant le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1^{(m-1)} & y_1^{(m-2)} & \cdots & y_1 \\ y_2^{(m-1)} & y_2^{(m-2)} & \cdots & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_m^{(m-1)} & y_m^{(m-2)} & \cdots & y_m \end{vmatrix} = \Delta$$

et en signifiant le coëfficient de $y_i^{(m-1)}$ dans Δ par Δ_i, on a (comme il suit des mémoires de MALMSTÈN et de JOACHIMSTHAL dans le Journal de CRELLE-BORCHARDT t. 39 et 40)

$$(5.) \qquad c_i = \int \frac{p\Delta_i}{\Delta} dx \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, m.$$

L'on peut poser

$$(6.) \qquad c_i = \int_{x_0}^{x} \frac{p\Delta_i}{\Delta} dx + \gamma_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, m,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ sont des constantes arbitraires. D'après les équations (3.) on a

$$(7.) \qquad y^{(k)} = \sum_1^m {}_i y_i^{(k)} \int_{x_0}^{x} \frac{p\Delta_i}{\Delta} dx + \sum_1^m {}_i \gamma_i y_i^{(k)} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Pour que $y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ aient pour $x = x_0$ respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$, les constantes γ se déterminent par le système suivant d'équations:

$$(8.) \qquad \gamma_1 \eta_{1i} + \gamma_2 \eta_{2i} + \cdots + \gamma_m \eta_{mi} = \eta_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

en signifiant par η_{ki} la valeur de $y_k^{(i)}$ pour $x = x_0$.

Ces équations sont toujours résolubles, parce que leur déterminant est égal à la valeur de Δ pour $x = x_0$, qui ne s'évanouit pas (v. mon mém. cité

no. 2). L'intégrale cherchée a donc la forme:

39] (9.) $$y = \sum_1^m{}_i y_i \int_{x_0}^x \frac{p\Delta_i}{\Delta} dx + \sum_1^m{}_i \gamma_i y_i,$$

où les γ sont déterminées par les équations (8.).

Si en particulier $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$ sont toutes nulles, le déterminant des équations (8.) ne s'évanouissant pas, il suit que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ sont toutes nulles, donc l'intégrale (9.) devient:

(9a.) $$y = \sum_1^m{}_i y_i \int_{x_0}^x \frac{p\Delta_i}{\Delta} dx.$$

Dans ce mémoire nous appellerons l'intégrale (9a.) l'intégrale principale appartenant à x_0. De l'équation (9a.) il suit que, si l'équation différentielle est homogène, l'intégrale principale est identiquement nulle, puisque $p = 0$.

Il est essentiel de remarquer que la première somme dans l'équation (9.) ne varie pas quand on y remplace le système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par un autre.

En effet, en remplaçant y_i par $c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{im}y_m$, où les quantités c_{ik} sont des constantes arbitraires ainsi choisies que le déterminant:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

ne devienne pas nul, Δ se change en $C\Delta$ et Δ_i en

$$\sum_1^m{}_k \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_k^{(m-1)}} = \sum_1^m{}_k \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \Delta_k.$$

Par là la première somme de l'équation (9.) se change par la substitution indiquée en

$$\sum_1^m{}_i (c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{im}y_m) \sum_1^m{}_k \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \int_{x_0}^x \frac{p\Delta_k}{\Delta C} dx.$$

40] Puisque $\sum_1^m{}_i c_{il} \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} = C$ ou $= 0$ selon que $l = k$ ou $l \gtrless k$, cette expression

se transforme en

$$\sum_1^m {}_k C y_k \int_{x_0}^x \frac{p\Delta_k}{C\Delta} dx = \sum_1^m {}_k y_k \int_{x_0}^x \frac{p\Delta_k}{\Delta} dx; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2.

Reprenons l'équation différentielle:

$$(1.) \qquad D(y) - p = y^{(m)} - p_{m-1} y^{(m-1)} - p_{m-2} y^{(m-2)} - \cdots - p_0 y - p = 0$$

et transformons d'une manière arbitraire $D(y)$ en une différence

$$(2.) \qquad D(y) = D_1(y) - D_2(y)$$

de manière que $D_1(y)$ et $D_2(y)$ soient des fonctions linéaires et homogènes de y et de ses dérivées, et que $D_1(y)$ contienne le terme $y^{(m)}$ et dans les autres termes des dérivées d'ordre inférieur, de sorte que $D_2(y)$ contiendra seulement les dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, l'équation (1.) est alors

$$(3.) \qquad D_1(y) = D_2(y) + p.$$

Soit maintenant u_0 une intégrale de l'équation différentielle

$$(3a.) \qquad D_1(y) = 0$$

telle que $u_0, u_0', u_0'', \ldots, u_0^{(m-1)}$ prennent pour $x = x_0$ respectivement les valeurs arbitrairement données $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$, et posons dans l'équation (3.)

$$y = u_0 + u,$$

il s'ensuit que u est l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation différentielle

$$(4.) \qquad D_1(u) = D_2(u) + F_0(x),$$

où

$$F_0(x) = D_2(u_0) + p.$$

Soit u_1 l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation

$$(4a.) \qquad D_1(u) = F_0(x),$$

et posons dans l'équation (4.) [41

$$u = u_1 + v,$$

il s'ensuit que v est l'intégrale principale de l'équation:

$$D_1(v) = D_2(v) + F_1(x), \tag{5.}$$

où

$$F_1(x) = D_2^*(u_1).$$

Soit u_2 l'intégrale principale de l'équation

$$D_1(v) = F_1(x), \tag{5a.}$$

et posons dans l'équation (5.)

$$v = u_2 + v_1,$$

il s'ensuit que v_1 est l'intégrale principale de l'équation

$$D_1(v_1) = D_2(v_1) + F_2(x), \tag{6.}$$

où

$$F_2(x) = D_2(u_2).$$

Soit de nouveau u_2 l'intégrale principale de l'équation:

$$D_1(v_1) = F_2(x) \tag{6a.}$$

et posons dans l'équation (6.)

$$v_1 = u_2 + v_2,$$

il s'ensuit que v_2 est l'intégrale principale de l'équation:

$$D_1(v_2) = D_2(v_2) + F_2(x), \tag{7.}$$

où

$$F_2(x) = D_2(u_2), \quad \text{etc.}$$

En continuant ces opérations on trouve que

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_r + v_{r-1} \tag{8.}$$

est une intégrale de l'équation (1.) telle que pour $x = x_0$ les fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ prennent respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$, en supposant que u_ϱ est l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1(y) = F_{\varrho-1}(x) \quad \text{pour} \quad \varrho > 0 \tag{9.}$$

42] et u_0 l'intégrale de l'équation:

$$D_1(y) = 0 \tag{9a.}$$

telle que pour $x = x_0$ les fonctions $u_0, u_0', u_0'', \ldots, u_0^{(m-1)}$ prennent respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$, et que les fonctions F soient données par les relations:

$$(10.) \qquad \begin{cases} F_\varrho(x) = D_2(u_\varrho) \quad \text{pour} \quad \varrho > 0, \\ F_0(x) = D_2(u_0) + p \end{cases}$$

et enfin que v_{r-1} est l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation

$$(11.) \qquad D_1(y) = D_2(y) + F_r(x).$$

Par les équations (9.)—(11.) on obtient successivement $u_0, F_0(x)$; $u_1, F_1(x)$; $u_2, F_2(x)$, etc. Mais il faut qu'à ces relations on en substitue d'autres, au moyen desquelles on puisse calculer directement ces fonctions sans recourir chaque fois aux équations différentielles; voilà le but du numéro suivant.

3.

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales de l'équation:

$$(1.) \qquad D_1(y) = 0,$$

on a, en conservant les notations Δ et Δ_i du no. 1,

$$(2.) \qquad u_\varrho = \sum_1^m{}_i c_{\varrho i} y_i \quad \text{pour} \quad \varrho > 0,$$

où

$$c_{\varrho i} = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(x)\,\Delta_i}{\Delta}\,dx.$$

Puisque, d'après l'équation (3.) du no. 1,

$$u_\varrho^{(k)} = \sum_1^m{}_i c_{\varrho i} y_i^{(k)} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

il suit [43

$$(3.) \qquad D_2(u_\varrho) = \sum_1^m{}_i c_{\varrho i} D_2(y_i) \quad \text{pour} \quad \varrho > 0,$$

la dérivée la plus élevée contenue dans $D_2(y)$ étant la $(m-1)^{\text{ième}}$.

En remplaçant dans $c_{\varrho i}$ sous le signe d'intégration la variable x par t, et en désignant par $v_1, v_2, \ldots, v_m$ respectivement les mêmes fonctions de t que $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de x, en désignant enfin par $\Delta(t, x)$ le déterminant que l'on

obtient en remplaçant dans $\Delta(t)$ les dérivées

$$\frac{d^{m-1}v_1}{dt^{m-1}}, \frac{d^{m-1}v_2}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{d^{m-1}v_m}{dt^{m-1}} \text{ resp. par } D_x(y_1), D_x(y_2), \ldots, D_x(y_m)$$

quantités dans lesquelles la variable est x, il s'ensuit de l'équation (3.) de ce no. et de l'équation (10.) du no. précédent

$$\text{(A.)} \qquad F_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(t)\,\Delta(t,x)}{\Delta(t)}\,dt \quad \text{pour} \quad \varrho > 0.$$

En remplaçant dans le déterminant $\Delta(t)$ les dérivées

$$\frac{d^{m-1}v_1}{dt^{m-1}}, \frac{d^{m-1}v_2}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{d^{m-1}v_m}{dt^{m-1}} \text{ resp. par } y_1, y_2, \ldots, y_m$$

fonctions de x et désignant le déterminant résultant par $\Delta_1(t,x)$, il suit de l'équation (2.)

$$\text{(B.)} \qquad u_\varrho = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(t)\,\Delta_1(t,x)}{\Delta(t)}\,dt \quad \text{pour} \quad \varrho > 0.$$

Par l'équation (A.) on peut trouver successivement $F_1(x)$, $F_2(x)$, etc., et alors l'équation (B.) donne u_1, u_2, etc. Enfin il suit également de l'équation (11.) du no. précédent et de l'équation (9a.) du no. 1:

$$\text{(C.)} \qquad v_{r-1} = \int_{x_0}^{x} \frac{F_r(t)\,\Delta_1(t,x)}{\Delta(t)}\,dt.$$

Que l'on remarque que la $i^{\text{ième}}$ dérivée de $\Delta_1(t,x)$ prise par rapport à x se forme si l'on remplace dans $\Delta_1(t,x)$ les fonctions $y, y_2, \ldots, y_m$ respectivement par $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$, et les dérivées $\frac{d^{m-2}v_1}{dt^{m-2}}, \frac{d^{m-2}v_2}{dt^{m-2}}, \ldots, \frac{d^{m-2}v_m}{dt^{m-2}}$ respectivement par $\frac{d^{m-1}v_1}{dt^{m-1}}, \frac{d^{m-1}v_2}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{d^{m-1}v_m}{dt^{m-1}}$.

44] En posant donc

$$D_x(y) = q_{m-1}y^{(m-1)} + q_{m-2}y^{(m-2)} + \cdots + q_0 y,$$

l'on dérive de la première remarque

$$\text{(D.)} \quad \Delta(t,x) = q_0\Delta_1(t,x) + q_1\frac{\partial\Delta_1(t,x)}{\partial x} + q_2\frac{\partial^2\Delta_1(t,x)}{\partial x^2} + \cdots + q_{m-1}\frac{\partial^{m-1}\Delta_1(t,x)}{\partial x^{m-1}}.$$

4.

Les intégrales du no. précédent sont prises toutes le long d'une même ligne d'intégration qui ne traverse aucun point singulier de l'équation différentielle (1.) du no. 2. Par là $\frac{\Delta(t,x)}{\Delta(t)}$ et $F_0(t)$ sont toujours finies le long de cette ligne, $\Delta(t)$ ne s'évanouissant et $\Delta(t,x)$ et $F_0(t)$ ne devenant infinies que pour les points singuliers (v. mon mém. cité no. 2). C'est pourquoi l'on peut assigner deux quantités positives M et N telles que le module de $\frac{\Delta(t,x)}{\Delta(t)}$ ne surpasse pas M et le module de $F_0(t)$ ne surpasse pas N le long de la ligne indiquée. Soit de plus s l'arc de cette ligne pris de x_0 jusqu'à x, ds étant le module de dx, nous avons, en employant itérativement l'équation (A.) du no. précédent,

$$(1.)\qquad \begin{cases} \operatorname{mod} F_1(x) < NMs, \\ \operatorname{mod} F_2(x) < \frac{N(Ms)^2}{1.2}, \\ \operatorname{mod} F_3(x) < \frac{N(Ms)^3}{1.2.3}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \operatorname{mod} F_\varrho(x) < \frac{N(Ms)^\varrho}{1.2.3\ldots\varrho}. \end{cases}$$

Puisque, comme l'on sait, la série

$$(2.)\qquad \frac{N(Ms)}{1} + \frac{N(Ms)^2}{1.2} + \frac{N(Ms)^3}{1.2.3} + \text{etc. in inf.}$$

est convergente, la série [45

$$(3.)\qquad F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + \text{etc. in inf.}$$

est aussi convergente.

D'une manière semblable Mr. Caqué a démontré la convergence de sa série particulière.

Mais il faut ajouter une remarque à cette démonstration. En effet l'arc de la ligne d'intégration peut être infini, quand même x est finie, l'intégration s'approchant du point x par des tortillements en nombre infini. Alors la démonstration précédente serait en défaut. Mais, x n'étant pas un point singulier, on sait que la valeur d'une telle intégrale égale la valeur d'une autre

prise de x_0 à x sur une ligne de longueur finie et qui constitue avec la première un contour ne contenant aucun point singulier dans son intérieur.

De l'équation (B.) du no. précédent et des inégalités (1.) de ce no. il suit

$$\text{mod}\, u_\varrho < \frac{N(Ms)^\varrho}{1.2.3\ldots\varrho} \tag{4.}$$

et de là on tire que la série

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ in inf.} \tag{5.}$$

est aussi convergente.

Il nous reste encore à démontrer que la série (5.) satisfait à l'équation différentielle (1.) du no. 2. A cet effet il faut et il suffit que le module de la fonction v_{r-1} de l'équation (8.) du no. 2 décroisse indéfiniment avec r. C'est ce que l'on déduit immédiatement de l'équation (C.) du no. précédent et des inégalités (1.) de ce no., parce que l'on a

$$\text{mod}\, v_{r-1} < \frac{N(Ms)^{r+1}}{1.2.3\ldots(r+1)}$$

quantité décroissant indéfiniment avec r à cause de la convergence de la série (2.).

5.

Supposons que l'on connaît dans toute l'étendue du plan des x le système fondamental d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de l'équation différentielle (1.) du 46] no. 3, alors la série

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ in inf.}$$

représente pour toute valeur finie de x, excepté les points singuliers, une intégrale de l'équation (1.) du no. 2, telle que pour $x = x_0$ les fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ prennent respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$. On obtient les termes de la série par des intégrations réitérées, comme l'indiquent les équations (A.) et (B.) du no. 3.

En choisissant convenablement $D_1(y)$ et partant $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on peut obtenir que les termes de la série reçoivent des formes prescrites, telles qu'une recherche particulière les demande. En tout cas, il est clair qu'il y a une infinité de représentations différentes du genre indiqué des intégrales d'une équation différentielle linéaire.

6.

Nous allons maintenant déduire, comme simple exemple des formules exposées dans les nos. précédents, la série que Mr. CAQUÉ a trouvée dans son mémoire cité antérieurement.

En effet, en choisissant

$$D_1(y) = y^{(m)},$$

l'équation (1.) du no. 3 devient

$$y^{(m)} = 0. \tag{1.}$$

L'intégrale u_0 de cette équation est:

$$u_0 = \eta_0 + \eta_1 \frac{x-x_0}{1} + \eta_2 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \eta_3 \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3} + \cdots + \eta_{m-1} \frac{(x-x_0)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}. \tag{2.}$$

En prenant les intégrales

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \quad \ldots, \quad y_m = x^{m-1}$$

pour système fondamental, on a

$$\Delta = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} 1!\,2!\,3!\ldots(m-1)!$$

en désignant le produit $1.2.3\ldots k$ par $k!$

En formant, d'après la remarque faite à la fin du no. 3, les dérivées [47 de $\Delta_1(t,x)$ par rapport à x et t, il résulte dans le cas présent immédiatement:

$$\frac{\partial \Delta_1(t,x)}{\partial x} = -\frac{\partial \Delta_1(t,x)}{\partial t}. \tag{4.}$$

En outre il est clair que

$$\frac{\partial^m \Delta_1(t,x)}{\partial x^m} = 0. \tag{5.}$$

De l'équation (4.) on déduit que la fonction $\Delta_1(t,x)$ est une fonction entière de $x-t$ seul, et de l'équation (5.) que cette fonction est du degré $m-1$ au plus. Puisque $\Delta_1(t,x)$ et ses $m-2$ premières dérivées prises par rapport à x s'évanouissent pour $x=t$, on a

$$\Delta_1(t,x) = C(x-t)^{m-1},$$

où C est indépendant de x et t. Il est clair que

$$\frac{\partial^{m-1}\Delta_1(t,x)}{\partial x^{m-1}} = \Delta,$$

donc

$$\Delta_1(t,x) = \frac{\Delta}{(m-1)!}(x-t)^{m-1}. \tag{6.}$$

Par l'équation (D.) du no. 3 on trouve

$$\frac{\Delta(t,x)}{\Delta(t)} = \frac{p_0}{(m-1)!}(x-t)^{m-1} + \frac{p_1}{(m-2)!}(x-t)^{m-2} + \frac{p_2}{(m-3)!}(x-t)^{m-3} + \cdots + \frac{p_{m-2}}{1!}(x-t) + p_{m-1} = f(x,t). \tag{7.}$$

D'après les équations (6.) et (7.), les équations (A.) et (B.) du no. (3.) deviennent pour le cas présent:

$$F_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} F_{\varrho-1}(t) f(x,t)\, dt, \tag{A'.}$$

$$u_\varrho = \int_{x_0}^{x} F_{\varrho-1}(t) \frac{(x-t)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}\, dt. \tag{B'.}$$

[48] 7.

Il nous reste à faire voir que les termes de la série de Mr. Caqué coïncident avec les termes u_ϱ que nous venons de donner par la formule (B'.), si l'on modifie quelques notations. En remplaçant m par $p+1$; $p, p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ respectivement par $A(x), A_0(x), A_1(x), \ldots, A_p(x)$; $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$ respectivement par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$, et en nommant $\theta(x)$ la fonction u_0 de l'équation (2.) du no. précédent, on voit que la fonction $f(x,t)$ donnée par l'équation (7.) du no. précédent coïncide avec la fonction $f(x,t)$ de Mr. Caqué définie par l'équation (D), chap. II no. 6 de son mémoire; de même notre fonction $F_0(x)$ définie d'une manière générale par l'équation (10.) du no. 2 coïncide pour le cas présent avec la fonction $F(x)$ de Mr. Caqué donnée par l'équation (C) de son mémoire. Les fonctions $f_q(x,z)$ qu'il a données par la formule (E), ibid. peuvent être définies d'une manière plus distincte par l'équation:

$$f_{q+1}(x,z) = \int_z^x f_q(x,u) f(u,z)\, du. \tag{1.}$$

Dans la formule (H), ibid. chap. III no. 12, Mr. CAQUÉ trouve

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = F(x) + \sum_0^\infty{}_q \int_{x_0}^x F(z) f_q(x, z)\, dz. \tag{2.}$$

D'après notre formule (B'.) du no. précédent, nous avons:

$$\frac{d^{p+1}u_q}{dx^{p+1}} = F_{q-1}(x) \quad \text{pour} \quad q > 0, \tag{3.}$$

$\frac{d^{p+1}u_0}{dx^{p+1}}$ s'évanouissant; donc il faut montrer que

$$F_{q+1}(x) = \int_{x_0}^x F(z) f_q(x, z)\, dz. \tag{4.}$$

Dans ce but établissons la formule

$$\int_{x_0}^z d\omega \int_\omega^x \psi(u, \omega)\, du = \int_z^x du \int_{x_0}^z \psi(u, \omega)\, d\omega + \int_{x_0}^z d\omega \int_{x_0}^\omega \psi(\omega, v)\, dv, \tag{A''.}$$

où $\psi(u, \omega)$ est une fonction des variables indépendantes u, ω, telle que les fonctions à intégrer ne deviennent pas infinies dans l'étendue de l'intégration. Les deux membres de cette équation étant des fonctions de x et z dont [49 les dérivées prises par rapport à z sont l'une et l'autre

$$\int_z^x \psi(u, z)\, du,$$

et dont les valeurs pour $z = x_0$ s'évanouissent simultanément, sont égales. En posant dans cette équation $z = x$, on obtient la formule particulière:

$$\int_{x_0}^x d\omega \int_\omega^x \psi(u, \omega)\, du = \int_{x_0}^x d\omega \int_{x_0}^\omega \psi(\omega, v)\, dv. \tag{B''.}$$

En posant en outre

$$\psi(u, \omega) = f_{q-1}(x, u) f(u, \omega) F_r(\omega),$$

et partant

$$\psi(\omega, v) = f_{q-1}(x, \omega) f(\omega, v) F_r(v),$$

il s'ensuit

$$\int_{x_0}^x F_r(\omega)\, d\omega \int_\omega^x f_{q-1}(x, u) f(u, \omega)\, du = \int_{x_0}^x f_{q-1}(x, \omega)\, d\omega \int_{x_0}^\omega f(\omega, v) F_r(v)\, dv,$$

c'est-à-dire, d'après la formule (1.) de ce no. et la formule (A'.) du no. précédent,

$$(5.) \qquad \int_{x_0}^{x} F_r(\omega) f_q(x, \omega)\, d\omega = \int_{x_0}^{x} f_{q-1}(x, \omega) F_{r+1}(\omega)\, d\omega.$$

En posant dans cette équation au lieu de r et q, premièrement 0 et q, puis 1 et $q-1$, puis 2 et $q-2$, puis 3 et $q-3$, etc., jusqu'à $q-1$ et 1, et en ajoutant, on obtient

$$\int_{x_0}^{x} F_0(\omega) f_q(x, \omega)\, d\omega = \int_{x_0}^{x} f_0(x, \omega) F_q(\omega)\, d\omega = F_{q+1}(x),$$

donc l'équation (4.) se trouve démontrée.

Greifswald, mai 1870.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Eine nicht geringe Anzahl von Druckfehlern des Originals, die als solche dem Inhalte der Abhandlung nach unmittelbar zu erkennen sind, wurde stillschweigend berichtigt; ferner wurde gesetzt:

S. 295, Zeile 3 v. u. Pour statt Par,
„ 296, „ 13, 12 v. u. des accents statt d'accents,
„ 297, „ 1 de façon statt ainsi,
„ „ , „ 15 v. u. dans Δ par Δ_i statt en Δ avec Δ_i,
„ 298, „ 4, 5 nulles statt zéro,
„ „ , „ 10 v. o. nulle, Zeile 6 v. u. nul statt zéro,
„ 299, „ 6 en statt dans,
„ 301, „ 2, 3 données par les relations statt liées par la relation,
„ „ , „ 4, 3 v. u. dans statt en,
„ „ , „ 2 v. u. und ebenso im Folgenden S. 302 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ statt $v_1, v_2, \ldots, v_m$ zur Bezeichnung derjenigen Functionen von t, die aus $y_1, y_2, \ldots, y_m$ hervorgehen, wenn man die unabhängige Variable x durch t ersetzt,
„ 302, „ 7 v. u. dans statt en,
„ 303 zwischen den einzelnen Gliedern der beiden Reihen (2.), (3.) + Zeichen statt Kommata,
„ 304, Zeile 11 C'est ce que statt C'est que,
„ 306, „ 8 D'après statt Par,
„ „ , „ 9 v. u. $\theta(x)$ statt $\vartheta(x)$,
„ „ , „ 5 v. u. d'une manière générale statt généralement,
„ „ , „ 3 v. u. $f_q(x, z)$ statt $f_q(x, t)$,
„ „ , „ 2 v. u. d'une manière plus distincte statt plus distinctement,
„ 307, „ 7 Dans statt Pour,
„ „ , „ 2 v. u. il s'ensuit statt il suit.

2) In der Formel (C.) auf S. 302 hat man in $\Delta_1(t, x)$ und $\Delta(t)$ unter $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nicht die zu Anfang der No. 3 definirten so bezeichneten Functionen, sondern ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$D_1(y) - D_2(y) = 0$$

und entsprechend unter $v_1, v_2, \ldots, v_m$ diejenigen Functionen von t zu verstehen, die aus diesen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ durch Vertauschung von x mit t hervorgehen.

S. 302, Zeile 6 v. u. ist hinter »et« zu ergänzen: »de même, que la première dérivée de $\Delta_1(t,x)$ prise par rapport à t se forme si l'on remplace«; diese oder eine ähnliche Wendung ist wohl durch ein Versehen ausgefallen.

S. 304 müssen in den für $\operatorname{mod} u_\varrho$ und $\operatorname{mod} v_{r-1}$ aufgestellten Ungleichungen ((4.) und Zeile 13) die rechten Seiten abgeändert werden. Beachtet man aber, dass zu Folge des in der No. 4 geführten Convergenzbeweises die Reihe (3.) (S. 303) unbedingt und gleichmässig convergiert und demnach gliedweise integrirbar ist, so folgt, wenn man diese Reihe mit der unabhängigen Variabeln t bildet, dann mit $\frac{\Delta_1(t,x)}{\Delta(t)}$ multiplicirt und zwischen den Grenzen x_0 und x auf einem die singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) No. 2 vermeidenden Wege integrirt, dass einerseits die Reihe (5) (S. 304) unbedingt und gleichmässig convergent und andererseits, wenn man jetzt unter $\frac{\Delta_1(t,x)}{\Delta(t)}$ denjenigen Ausdruck versteht, der in der Gleichung (C.) (S. 302) unter dem Integralzeichen auftritt (vergl. oben),

$$\lim_{r=\infty} v_{r-1} = 0$$

ist. Auch lässt sich mit den in der Abhandlung entwickelten Hülfsmitteln unschwer erweisen, dass die Reihe (5.) gliedweise differentiirbar ist. Der letztere Punkt ist für die Erörterungen der No. 7 von Wichtigkeit. SCH.

XI.

BEMERKUNGEN ZU DER ABHANDLUNG: »ÜBER HYPERGEOMETRISCHE FUNCTIONEN n^{ter} ORDNUNG« IN DIESEM JOURNAL BD. 71 S. 316.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 72, 1870, S. 255—262.)

1.

In meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66, No. 7[1])) ist gezeigt, dass in [255 der Klasse der ebendaselbst No. 4 Gleichung (12.) charakterisirten Differentialgleichungen, den Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung mit drei singulären Punkten abgerechnet, diejenige, welcher die durch die Gausssche Reihe darstellbaren Functionen genügen, die einzige ist, welche durch die singulären Punkte und die Exponenten der zu den einzelnen singulären Punkten und dem Unendlichkeitspunkte gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen, oder, was dasselbe ist, durch die Wurzeln der zu diesen Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen allein vollständig bestimmt wird. Ist n die Ordnung der Differentialgleichung (12.) No. 4 meiner angeführten Abhandlung, ϱ die Anzahl der gegebenen und bestimmten singulären Punkte derselben, so ist, wie aus No. 7 ebendaselbst zu ersehen, die Anzahl der nach Festsetzung der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen noch verfügbaren Constanten der Differentialgleichung:

$$e_\varrho = \frac{n^2(\varrho-1)-n(\varrho+1)+2}{2}.$$

[1]) Abh. VI, S. 202 dieses Bandes. Sch.

In der in der Ueberschrift genannten Abhandlung nimmt Herr POCHHAMMER diesen Satz zum Ausgangspunkte seiner Untersuchung. Er betrachtet den Fall $\varrho = n$ und verfügt, nachdem er für jeden einzelnen singulären Punkt und den Unendlichkeitspunkt die Exponenten fixirt, über die übrigen

$$\varepsilon_n = \frac{(n-2)(n^2-1)}{2}$$

Constanten der Art, dass er zu einer Differentialgleichung gelangt:

$$\text{(A.)} \quad \varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{n-1}^{0}{}_k (-1)^{n-k}[(\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x) + (\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x)]\frac{d^k y}{dx^k} = 0,$$

256] wo

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$
$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \dots + \frac{b_n}{x-a_n},$$

indem $b_1, b_2, \dots, b_n$, λ willkürlich gegebene Constanten bedeuten (s. seine Abhandlung, Abschnitt I. Gleichung (16.)).

2.

Um zur Differentialgleichung (A.) zu gelangen, stellt Herr POCHHAMMER — wenn ich mich in der von mir gebrauchten Terminologie ausdrücke — die Bedingung auf, dass die determinirenden Fundamentalgleichungen für jeden singulären Punkt die Wurzeln $0, 1, 2, \dots, n-2$, für den Unendlichkeitspunkt aber die Wurzeln $-\lambda+1, -\lambda+2, -\lambda+3, \dots, -\lambda+n-1$ haben, und dass die diesen Wurzeln als Exponenten zugeordneten Integrale für jeden singulären Punkt geradezu, für den Unendlichkeitspunkt aber mit $x^{-\lambda+1}$ multiplicirt in der Umgebung des bezüglichen singulären Punktes oder des Unendlichkeitspunktes eindeutig, continuirlich und endlich werden und in denselben Punkten von Null verschieden sind.

Der analytische Ausdruck dieser Bedingungen ist durch No. 7 meiner Abhandlung dieses Journal Bd. 68[1]) implicite gegeben. Soll für einen singulären Punkt a die determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln $0, 1, 2, \dots, n-2$ und ausserdem die Wurzel μ enthalten, so hat man danach zwei Fälle zu unterscheiden:

---

1) Abh. VII, S. 228 ff. dieses Bandes. Sch.

Entweder ist μ keine positive oder negative ganze Zahl, alsdann bilden die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, n-2$ eine Gruppe für sich, und der dort angegebene analytische Ausdruck für die Bedingung, dass die dieser Wurzelgruppe entsprechende Integralgruppe in der Umgebung von a von Logarithmen frei sei, ist mit den Gleichungen des Herrn POCHHAMMER identisch, wenn man in letzteren $P_k(x)$ für $R_k(x)$ setzt.

Oder μ ist eine positive oder negative ganze Zahl, alsdann bilden alle n Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, n-2, \mu$ eine einzige Gruppe. Der analytische Ausdruck der Bedingung, dass die dieser Wurzelgruppe entsprechende Integralgruppe von Logarithmen frei sei, wie sie No. 7 meiner Abhandlung Bd. 68 giebt, enthält alsdann ausser den Gleichungen des Herrn POCHHAMMER noch andere.

Ist insbesondere μ gleich einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-2$, so folgt schon aus No. 6 meiner Abhandlung Bd. 66[1]), dass die Integralgruppe [257 Logarithmen enthält.

Dasselbe gilt vermittelst der Substitution $x = \frac{1}{t}$ für den Unendlichkeitspunkt. — Wir haben also das Resultat:

Die Behauptung des Herrn POCHHAMMER, dass stets die Integrale der Differentialgleichung (A.) für jeden singulären Punkt oder für den Unendlichkeitspunkt mit Potenzen resp. von $x-a$ oder x multiplicirt in der Umgebung von a oder des Unendlichkeitspunktes eindeutig, continuirlich und endlich sind, ist nicht richtig.

3.

Auch die Einschränkungen, welche Herr POCHHAMMER im II. Abschnitt seiner Abhandlung für die Werthe von $b_1, b_2, \ldots, b_n, \lambda$ macht, ändern in dieser Beziehung nichts.

Es sei mir gestattet, ein Beispiel hinzuzufügen, auf welches ich nachher noch einmal zurückkommen werde.

Es sei $n = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, und den eben angeführten Einschränkungen in Bezug auf $b_1, b_2, \ldots, b_n, \lambda$ gemäss $b_1 = 1\frac{1}{2}$, $b_2 = 1\frac{1}{2}$, $\lambda = 2\frac{1}{2}$, so wird die Differentialgleichung (A.):

$$(1.) \qquad 4x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 8(2x-1)\frac{dy}{dx} + 21y = 0.$$

[1]) S. 198 dieses Bandes. Sch.

Versucht man dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Reihe

$$y = \sum_0^\infty{}_a c_a x^a$$

zu genügen, in welcher c_0 von Null verschieden ist, so müsste für $k = 0, 1, 2, \ldots$ in inf.

$$(2.) \qquad 4(k+1)(k-2)c_{k+1} = (4k^2-20k+21)c_k$$

sein. Allein für $k = 2$ verschwindet der Coefficient von c_{k+1}, aber nicht der Coefficient von c_k dieser Gleichung, wie es sein müsste.

Ebenso wenig ist in der Umgebung von $x = 1$ eine Entwickelung der Form

$$y = \sum_0^\infty{}_a c_a (x-1)^a$$

möglich, wenn c_0 von Null verschieden sein soll.

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, so erhält man aus (1.)

$$(1a.) \qquad 4(1-t)t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 8(3-2t)t\frac{dy}{dt} + 21y = 0.$$

258] Die Wurzeln der zu $t = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{7}{2}$. Setzt man

$$y = t^{-\frac{3}{2}}\eta,$$

so wird aus (1a.)

$$(1b.) \qquad 4(1-t)t\frac{d^2\eta}{dt^2} + 4(3t-1)\frac{d\eta}{dt} - 7\eta = 0.$$

Dieser Differentialgleichung kann man nicht durch eine Reihe

$$\eta = \sum_0^\infty{}_a c_a t^a$$

genügen, wo c_0 von Null verschieden ist, was wie oben folgt.

Überhaupt hat die zu irgend einem singulären Punkt a_ν der Differentialgleichung (A.) gehörige determinirende Fundamentalgleichung ausser den Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, n-2$ die Wurzel $b_\nu + \lambda - 1$, und wenn diese eine positive oder negative ganze Zahl ist, so können nach No. 2 die Integrale der Differentialgleichung (A.) in der Umgebung von a_ν Logarithmen enthalten. — Die zum Unendlichkeitspunkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung hat

ausser den Wurzeln $-\lambda+1, -\lambda+2, -\lambda+3, \ldots, -\lambda+n-1$ noch die Wurzel $n-\lambda-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$. Ist also $b_1+b_2+\cdots+b_n$ eine positive oder negative ganze Zahl, so können die Integrale der Differentialgleichung (A.) in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes Logarithmen enthalten.

In der That sind in dem obigen Beispiele für die singulären Punkte 0 und 1 die zu der Wurzel Null, für den Unendlichkeitspunkt die zu der Wurzel $-\frac{r}{2}$ der bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen gehörigen Integrale der Differentialgleichung (1.) mit Logarithmen behaftet.

4.

Wir finden das obige Resultat auch bestätigt, wenn wir die im Abschnitt II. der Abh. des Herrn POCHHAMNER behandelte Integration der Differentialgleichung (A.) durch bestimmte Integrale einer Prüfung unterziehen. Es wird daselbst verificirt, dass

$$y_{\mu\nu} = \int_{a_\mu}^{a_\nu} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

und

$$y_\nu = \int_{a_\nu}^{x} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

Integrale der Differentialgleichung (A.) sind.

Wir wollen uns jedoch nicht bei dem Umstande aufhalten, dass man [259 erst dann die Differentialgleichung (A.) als durch diese Functionen von x integrirt ansehen könnte, wenn der Nachweis geliefert wäre, dass man aus denselben ein Fundamentalsystem von Integralen herstellen könne, d. h. ein solches System, zwischen dessen Elementen keine identische lineare, homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Wir wollen daher zulassen, dass z. B. $y_n, y_{12}, y_{23}, \ldots, y_{k-2,k-1}, y_{k-1,k+1}, y_{k+1,k+2}, \ldots, y_{n-1,n}, y_k$ ein Fundamentalsystem bilden, und die Entwickelung dieser Functionen in der Umgebung von a_k prüfen.

Zunächst muss das von Herrn POCHHAMMER adoptirte Princip, dass ein bestimmtes Integral als Function eines Parameters aufgefasst eindeutig sei, wenn die einzelnen Elemente desselben eindeutig sind, zurückgewiesen werden. Ich will hier nicht auf die Behandlung solcher Functionen nach diesem Gesichtspunkte tiefer eingehen, verweise vielmehr auf meine Abh.

Bd. 71 dieses Journals »die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale etc.«[1]). Ich will nur bemerken, dass man nicht übersehen dürfe, dass sich auch die Integrationswege und die Integrationsgrenzen ändern, und dass schon die einfachsten Beispiele die Unzulässigkeit des genannten Princips zeigen. Betrachtet man z. B.

$$y = \int_0^1 \frac{du}{u-x}$$

als Function von x, so ist $\frac{1}{u-x}$ um jeden Punkt x eindeutig, aber $y = \log\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ist nicht eindeutig um $x = 0$ und $x = 1$.

Es lässt sich in der That auf anderem Wege beweisen, dass die Function $y_{\mu\nu}$, wo μ und ν von k verschieden sind, und der Integrationsweg nicht durch a_k geht, in der Umgebung von a_k eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Denn man kann bei einem Umlaufe von x um a_k den Umlaufskreis so klein annehmen, dass der Integrationsweg von $y_{\mu\nu}$ ganz ausserhalb desselben liegt. Man hat alsdann

$$\mathrm{mod}\,(x-a_k) < \mathrm{mod}\,(u-a_k),$$

so dass, wenn man setzt

$$\Psi_k(u) = \frac{(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}}{(u-a_k)^{b_k-1}},$$

$$(1.) \qquad y_{\mu\nu} = \sum_0^\infty l_\alpha (x-a_k)^\alpha \int_{a_\mu}^{a_\nu} \Psi_k(u)\,(u-a_k)^{b_k+\lambda-\alpha-2}\,du,$$

260] wo l_α die successiven Binomialcoefficienten von $\lambda-1$ bedeutet. Die hier vorkommenden Integrale sind endlich, weil der Integrationsweg nicht durch a_k geht, und weil über die Grössen $b_1, b_2, \dots, b_n$ und λ solche Dispositionen getroffen sind, dass $\Psi_k(u)$ auf dem ganzen Wege endlich ist.

Herr Pochhammer lässt bei seiner Beweisart zu, dass der Integrationsweg durch a_k gehe. Aus unserem Beweise ist zu ersehen, dass dieses unzulässig. Aber abgesehen hiervon kann man aus No. 7 meiner Abhandlung (dieses Jounal Bd. 71[2])) sehen, wie die Eindeutigkeit aufgehoben würde, falls der Integrationsweg durch a_k ginge.

---

[1]) Abh. VIII, S. 241 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 250 ff. dieses Bandes. Sch.

Ebenso folgt, dass y_k in der Umgebung von a_k mit $(x-a_k)^{-\lambda+1-b_k}$ multiplicirt eindeutig ist. In der That ist es bei einem Umlaufe von x um a_k möglich, den Integrationsweg von a_k nach x ganz innerhalb des Umlaufskreises zu erhalten, so dass

$$\mathrm{mod}\,(u-a_k) \leqq \mathrm{mod}\,(x-a_k).$$

Man hat alsdann

$$y_k = \sum_0^\infty{}_\alpha p_\alpha (x-a_k)^{\lambda-1-\alpha} \int_{a_k}^x \Psi_k(u)(u-a_k)^{b_k+\alpha-1}\,du.$$

Ist μ von k verschieden, so ist

$$\mathrm{mod}\,(u-a_k) < \mathrm{mod}\,(a_u-a_k),$$

folglich lässt sich $\Psi_k(u)$ nach positiven ganzen Potenzen von $u-a_k$ entwickeln. Es sei demnach

$$\int_{a_k}^x \Psi_k(u)(u-a_k)^{b_k-1+\alpha}\,du = (x-a_k)^{b_k+\alpha}\sum_0^\infty{}_c\,\gamma_{c\alpha}(x-a_k)^c,$$

so folgt

$$y_k = (x-a_k)^{\lambda+b_k-1}\sum_0^\infty{}_\alpha \sum_0^\infty{}_c\, p_\alpha \gamma_{c\alpha}(x-a_k)^c. \tag{2.}$$

Anders verhält es sich jedoch mit y_n. Während nämlich x um a_k einen Umlauf macht, ist nicht bloss die obere Grenze, sondern auch der Integrationsweg zu ändern, so dass er durch keinen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hindurchführt. Hierdurch geht y_n nach einem solchen Umlauf im Allgemeinen in eine lineare homogene Function der übrigen Integrale des Fundamentalsystems über, muss also in der Entwickelung für die Umgebung von a_k Logarithmen enthalten (vergl. meine Abh. Bd. 71, No. 5 bis 7 [1])). Da a_n eine beliebige von a_k verschiedene der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist, so folgt, dass die Behauptung des Herrn POCHHAMMER, y_ν sei in der Umgebung von a_k eindeutig, wenn k von ν verschieden ist, allgemein nicht richtig ist.

Ich will letzteres noch durch ein Beispiel erläutern. Nimmt man, wie in No. 3, $n=2$, $b_1 = 1\frac{1}{2}$, $b_2 = 1\frac{1}{2}$, $\lambda = 2\frac{1}{2}$, so ist

$$y = \int_0^x u^{\frac{1}{2}}(u-1)^{\frac{1}{2}}(u-x)^{\frac{1}{2}}\,du \tag{3.}$$

[261

ein Integral der Differentialgleichung (1.) in No. 3.

1) S. 247 ff. dieses Bandes. Sch.

Befindet sich x in der Umgebung von 1, so kann man den Integrationsweg in y so wählen, dass beständig

$$\mod(u-1) \geqq \mod(x-1), \quad \mod(u-1) \leqq 1.$$

Es sei daher

$$\left(1+\frac{x-1}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_a \zeta_a \left(\frac{x-1}{1-u}\right)^a,$$

$$u^{\frac{1}{2}} = (1+u-1)^{\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_b \varepsilon_b (u-1)^b.$$

Es ist dann

$$u^{\frac{1}{2}}(u-1)^{\frac{1}{2}}(u-x)^{\frac{1}{2}} = (1-u)^s \left\{ \sum_0^\infty{}_c R_c(x) \frac{(x-1)^c}{(1-u)^c} + T(u,x) \right\},$$

wo

$$R_c(x) = \zeta_c \varepsilon_0 + \zeta_{c+1}\varepsilon_1(x-1) + \zeta_{c+2}\varepsilon_2(x-1)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

und $T(u,x)$ nur positive ganze Potenzen von $u-1$ und $x-1$ enthält, also

$$y = -R_s(x)(x-1)^s \log(1-x) + S(x), \tag{4.}$$

wo $S(x)$ nur positive ganze Potenzen von $x-1$ enthält. Dieses Integral gehört zur Wurzel Null der dem Punkte $x=1$ angehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.) No. 3.

5.

Schliesslich ist noch anzuführen, dass von einem allerdings ganz verschiedenen Gesichtspunkte aus bereits Herr Tissot im 17. Bande (Jahrgang 1852) des Liouvilleschen Journals in der Abhandlung »sur un déterminant etc.« zu einer Differentialgleichung geführt wurde, welche im Wesentlichen von der Differentialgleichung (A.) des Herrn Pochhammer nicht verschieden ist. Auch hat Herr Tissot dieselbe durch bestimmte Integrale integrirt, welche wesentlich mit denen im II^{ten} Abschnitt der Abh. des Herrn Pochhammer übereinstimmen.

Bezeichnen wir in der That die Integrationsvariable in den Integralen A_i des Herrn Tissot mit u statt mit x und setzen x für a, $\lambda-1$ für $n-m$, b_1-1 für $-m_1$, b_2-1 für $-m_2$, b_3-1 für $-m_3$, ..., b_n-1 für $-m_n$, endlich $e^{-u}\varphi(u)$ für $\varphi(u)$, so ist

$$A_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

262] mit den Integralen des Herrn Pochhammer im Abschnitt II. seiner Abh. übereinstimmend.

Die Function $\tilde{\omega}(u)$ bei Herrn Tissot wird jetzt

$$\tilde{\omega}(u) = F(u) + F(u)\frac{d\log\varphi(u)e^{-u}}{du} = F(u)\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)},$$

$F(u)$ und $\varphi(u)$ in der Bedeutung des Herrn Tissot genommen. Nun ist

$$(1.)\quad \begin{cases} F(u) = (-1)^n(u-x)\varphi(u) & \text{und} \\ \tilde{\omega}(u) = (-1)^n(u-x)\varphi(u)\left[\frac{n-\lambda+1}{u-x} + \frac{1-b_1}{u-a_1} + \frac{1-b_2}{u-a_2} + \cdots + \frac{1-b_n}{u-a_n}\right], \end{cases}$$

wenn bei diesen letzteren Formeln

$$\varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_n)$$

bedeutet. Es ist demnach

$$(2.)\qquad \tilde{\omega}(u) = (-1)^n[(n-\lambda+1)\varphi(u) + (u-x)\varphi'(u) - (u-x)\psi(u)],$$

wo

$$\psi(u) = \varphi(u)\left[\frac{b_1}{u-a_1} + \frac{b_2}{u-a_2} + \cdots + \frac{b_n}{u-a_n}\right].$$

Man hat also

$$(3.)\quad (k+1)\tilde{\omega}^{(k)}(x) - kF^{(k+1)}(x) = (-1)^n[(n-\lambda+1)\varphi^{(k)}(x) - k\psi^{(k-1)}(x)](k+1).$$

Setzt man also in die Differentialgleichung (7.) No. 7 der Abh. des Herrn Tissot

$$n+1-k = l$$

und multiplicirt mit $\frac{\alpha_{-1}}{n-\lambda+1}$, so wird dieselbe

$$(4.)\quad \sum_{n+1}^{6}{}_l(-1)^{n-l+1}[(\lambda-l-1)_{n-l+1}\varphi^{(n+1-l)}(x) + (\lambda-l-1)_{n-l}\psi^{(n-l)}(x)]\frac{d^l y}{dx^l} = 0,$$

wo festgesetzt ist, dass das Symbol m_k für ein negatives k verschwindet.

Die Differentialgleichung (4.) ist genau die Ableitung der Differentialgleichung (A.).

Greifswald, den 5. Juni 1870.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde

S. 311, Zeile 7 v. u. wird statt werden gesetzt,

„ 311, „ 8 v. u. »determinirenden« eingefügt,

„ 315, „ 7 v. u. bilden statt bildet gesetzt,

„ 317, „ 13 v. u. vor »ist« ein »so« unterdrückt.

2) S. 311, Zeile 13, 12 v. u. sind (vergl. die Anmerkungen zu den Abhandlungen VI, S. 203 und V, S. 158) die Worte »mit drei singulären Punkten« zu streichen.

Die zu Anfang der No. 3, S. 313 erwähnten Einschränkungen (siehe POCHHAMMER, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 71, S. 336) bestehen darin, dass die Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ grösser als 1, die Constante λ grösser als n vorausgesetzt werden.

Auf die in der vorstehenden Abhandlung enthaltenen »Bemerkungen« hat Herr POCHHAMMER im Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 73, S. 143 Fussnote entgegnet. SCH.

XII.

ÜBER DIE FORM DER ARGUMENTE DER THETAFUNCTIONEN UND ÜBER DIE BESTIMMUNG VON $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ ALS FUNCTION DER KLASSENMODULN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 73, 1871, S. 305—323.)

Wenn man die Argumente der Thetafunctionen durch gewisse Inte- [305
grale erster Gattung und die Coefficienten der homogenen Function zweiten Grades durch die Periodicitätsmoduln derselben ersetzt, so hat RIEMANN in seiner Theorie der ABELschen Functionen (dieses Journ. B. 54[1]), § 22) nachgewiesen, dass die dadurch gebildete Function des Ortes in der Fläche T, wenn sie nicht identisch für jeden Punkt verschwindet, für p Punkte unendlich klein erster Ordnung wird, und dass man die Argumente als Functionen der Nullpunkte so darstellen kann, dass die Substitution von p willkürlich gegebenen Punkten für dieselben bewirkt, dass die Thetafunction in den letzteren verschwindet. Die Ausführung dieser Transformation erfordert die Berechnung gewisser ebendaselbst angegebener Integralausdrücke, welche in dem Falle der hyperelliptischen Integrale von Herrn CARL NEUMANN in einer Schrift über ABELsche Integrale (Halle 1863) angedeutet und später in seinen »Vorlesungen über die RIEMANNsche Theorie etc.« pag. 458—484 ausführlich entwickelt worden ist. Da jedoch in dem allgemeinen Falle die Berechnung jener Integralausdrücke mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist, so hat schon RIEMANN ein Mittel dieselbe zu umgehen angedeutet. Als ein solches

[1]) Riemanns Werke (1892), S. 96—142. Sch.

Mittel erscheint der Satz im § 23 seiner Theorie, dessen Anwendung jedoch noch auf erhebliche Schwierigkeiten führt. In dem Falle der hyperelliptischen Integrale hat auf einem anderen Wege Herr PRYM (Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866, § 12 und 13) unter Anwendung einiger ihm von RIEMANN mitgetheilten Sätze über Charakteristiken die oben postulirte Form der Argumente der Thetafunctionen mit Umgehung der Integralausdrücke entwickelt.

In dem Werke über ABELsche Functionen haben die Herren CLEBSCH und GORDAN (das. § 56) die Herstellung der gewünschten Form der Thetaargumente im Wesentlichen auf die Auflösung gewisser algebraischer Glei-
306] chungen und die Absonderung eines gewissen Systems bevorzugter Wurzeln derselben zurückgeführt. Dieselbe Form hat nach ihnen Herr H. WEBER (d. J. B. 70, pag. 314 sqq.) mit Hülfe RIEMANNscher Principien verificirt. — Obgleich die Absonderung der bevorzugten Wurzeln unter gegebener Querschnittszerlegung der Fläche T mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist, so ist die von den Herren CLEBSCH und GORDAN angenommene Form der Argumente von weitreichendem Vortheil. Wir wollen dieses hier an dem Beispiel der Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function der Klassenmoduln zeigen, indem wir nachweisen, dass das von Herrn THOMAE (d. J. B. 66, pag. 95) gefundene Resultat unter Zugrundelegung der CLEBSCH-GORDANschen Form sich wesentlich vereinfacht. — Ehe wir jedoch auf diese Materie eingehen, wollen wir zuerst zeigen, wie man durch Weiterentwickelung des schon oben erwähnten von RIEMANN § 23 seiner Theorie gegebenen Satzes auf natürlichem Wege zu der Form der Herren CLEBSCH und GORDAN gelangen kann, und ausserdem über die Absonderung der bevorzugten Wurzeln einige Bemerkungen hinzufügen. — Wir werden die Abhandlung von RIEMANN über ABELsche Functionen (d. J. B. 54) kurz als R. A. F. und das Werk der Herren CLEBSCH und GORDAN kurz als Cl. G. A. F. citiren.

1.

Es sei im Anschluss an die RIEMANNsche Bezeichnungsweise die den ABELschen Functionen zu Grunde liegende algebraische Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{s}) = 0 \qquad \text{(R. A. F. § 5)}$$

und

$$(1.) \qquad w_a = \int_\mu^\xi \frac{\varphi_a\left(\begin{smallmatrix} s, & z \\ s, & z \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial s}} ds, \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

wo μ einen festen und ξ einen beweglichen Punkt der Fläche T bedeutet, ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung, wie es (R. A. F. § 18) definirt ist. Wir setzen

$$(2.) \qquad u_a = c_a + w_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

wo die c_a Constanten bedeuten, welche durch die Gleichungen

$$(3.) \qquad (p-1)c_a + K_a = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

bestimmt sind, wenn K_a den ebenso bezeichneten Ausdruck bei RIEMANN (über das Verschwinden der Thetaf. d. J. B. 65[1]) § 1) bedeutet, jedoch mit der Abänderung, dass daselbst u durch w zu ersetzen ist.

Es ist alsdann für beliebige $p-1$ Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ [307

$$\ldots$$

$$\vartheta\left(\sum_1^p a\left(\sum_0^{p-1} u_a(\xi_b)\right)\right) = 0,$$

wo $u_a(\xi_b)$ den Werth bedeutet, welchen u_a annimmt, wenn ξ in ξ_b hineinrückt (s. RIEMANN ü. d. V. d. Thetaf. § 1 und 2). Hieraus folgt, dass

$$(4.) \qquad \vartheta\left(\sum_1^p a\left(u_a(\xi) - \sum_1^p u_a(\xi_b)\right)\right)$$

verschwindet, wenn ξ in einen der Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ hineinfällt, welches übrigens auch diese Punkte sein mögen.

Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ Punkte, welche mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind (R. A. F. § 16), so verschwindet die Function (4.) identisch in jedem Punkte ξ, und umgekehrt, wenn letzteres stattfindet, so sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft. Beides ergiebt sich aus RIEMANN (A. F. § 24).

2.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2p-2}$ beliebige durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Punkte, so ist bei der über c_a (Gl. (3.) vor. No.) getroffenen Bestimmung

[1]) Riemanns Werke, S. 212—224. Sch.

nach (R. A. F. § 23)

$$(1.) \qquad \sum_{0}^{2p-2}{}_{b} u_a(\varepsilon_b) \equiv 0, \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

oder wenn wir die Integrationswege in der Fläche T angemessen verlaufen lassen, mit Rücksicht auf Gleichung (2.) vor. No.:

$$(1a.) \qquad 2(p-1)c_a + \sum_{1}^{2p-2}{}_{b} \int_{\mu}^{\varepsilon_b} dw_a = 0. \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

Um $(p-1)c_a$, welches in den Argumenten der Thetafunction auftritt, zu berechnen, ist es zweckmässig diese Gleichung so umzuformen, dass die Division durch 2 ausgeführt werden könne. Zu dem Ende werde ein beliebiges System correspondirender Periodicitätsmoduln

$$\varkappa_a \pi i + \lambda_1 a_{a1} + \lambda_2 a_{a2} + \cdots + \lambda_p a_{ap} = P_a(\varkappa, \lambda) \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

gesetzt, und es werden p Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ derart bestimmt, dass:

$$(2.) \qquad \sum_{1}^{2p-2}{}_{b} \int_{\mu}^{\varepsilon_b} dw_a + P_a(\varkappa, \lambda) = 2 \sum_{1}^{p}{}_{c} \int_{\mu}^{\alpha_c} dw_a. \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

Dass diese Gleichung lösbar ist, ergiebt sich nach Division durch 2 aus dem 308] Satze über die Umkehrung der ABELschen Integrale. Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ eine Lösung, so folgt aus Gleichung (2.) nach dem Satze über die Umkehrung des ABELschen Theorems (s. Cl. G. A. F. § 62; vergl. auch WEBER, ob. cit. Abh. § 1), dass eine rationale Function ζ von (s, z) existiren muss, welche für die Punkte ε von der ersten Ordnung, für μ von der zweiten Ordnung unendlich gross, für die Punkte α von der zweiten Ordnung unendlich klein wird, in allen übrigen Punkten aber weder Null noch unendlich ist. Ist daher $as + bz + c$ eine lineare Function von (s, z), die für μ unendlich klein zweiter Ordnung wird, und $\varphi(s^{n-2}, z^{m-2})$ diejenige ganze rationale Function, durch welche die Punkte ε mit einander verknüpft sind (R. A. F. § 16), so wird

$$\zeta . \varphi . (as + bz + c) = \psi$$

für keinen im Endlichen befindlichen Punkt von T unendlich gross, ist demnach eine ganze rationale Function von (s, z), welche für die Punkte α unendlich klein zweiter Ordnung, für die $m+n-2$ (R. A. F. § 8) Punkte, in denen $as + bz + c$ ausser in μ verschwindet, und für jedes sich aufhebende Paar

von Verzweigungspunkten unendlich klein erster Ordnung, also im Ganzen in $2p+2r+m+n-2 = m(n-1)+n(m-1)$ Punkten unendlich klein erster Ordnung wird. Hieraus folgt, dass der Grad von ψ in Bezug auf s und z resp. der $n-1^{\text{ten}}$ und $m-1^{\text{ten}}$ ist, wie leicht aus (R. A. F. § 8) folgt.

Nach Analogie der RIEMANNschen Bezeichnung für Punkte, die durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind, wollen wir p Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft nennen, wenn eine ganze rationale Function $\psi_\mu(s^{n-1}, z^{m-1})$ gefunden werden kann, die in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ unendlich klein zweiter Ordnung wird und überdiess in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten und in denjenigen $m+n-2$ Punkten von der ersten Ordnung verschwindet, worin eine für μ unendlich klein zweiter Ordnung werdende ganze rationale Function ersten Grades von (s, z) noch ausserdem Null wird. Alsdann haben wir den Satz: Jede Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ der Gleichung (2.) ist mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft.

Ist umgekehrt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ein System von Punkten, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft sind, so ist

$$\zeta = \frac{\psi_\mu}{(as+bz+c)\varphi}$$

eine rationale Function von (s, z) mit den oben angegebenen Eigenschaften, und daher nach dem ABELschen Theorem: [309

$$(3.) \qquad \sum_1^{2p-2}{}_b \int_\mu^{\alpha_b} dw_a \equiv 2 \sum_1^{p}{}_c \int_\mu^{\alpha_c} dw_a. \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

Hieraus folgt:

$$(4.) \qquad \sum_1^{p}{}_c \int_\mu^{\alpha_c} dw_a = \frac{1}{2} \sum_1^{2p-2}{}_b \int_\mu^{\alpha_b} dw_a + \frac{1}{2} P_a(\varkappa, \lambda), \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

wo $\varkappa, \lambda$ Zahlenwerthe bedeuten, die mod. 2 vollkommen bestimmt sind.

Es giebt bekanntlich 2^{2p} incongruente Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2} P_a(\varkappa, \lambda)$, welche man dadurch erhält, dass man für $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$ je eine der Zahlen 0 und 1 setzt.

Jedem Systeme von Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft sind, entspricht vermöge Gleichung (4.) ein bestimmtes System correspondirender halber Periodicitätsmoduln.

Das Problem, aus den Gleichungen

$$(5.) \qquad v_a = \sum_1^p {}_b \int_\mu^{\xi_b} dw_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ zu bestimmen, wird für solche Werthe und nur für solche Werthe der v_a unbestimmt, denen ξ entsprechen, die mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind (s. Cl. G. A. F. § 52). Die Gleichungen (2.) könnten also für ein bestimmtes $P_a(x, \lambda)$ nur dann mehr als ein System von Punkten α liefern, wenn ein diesen Gleichungen genügendes System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft wäre. Es wäre alsdann, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ mit μ durch die Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft sind, und $as+bz+c$ in μ unendlich klein zweiter Ordnung wird,

$$\frac{(as+bz+c)\varphi^2}{\psi_\mu}$$

für keinen im Endlichen befindlichen Punkt der Fläche T unendlich gross, also eine ganze rationale Function von (s, z), die in $m(n-2)+n(m-2)$ Punkten unendlich klein ist, also (R. A. F. § 8) eine Function $\varphi_1(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$. Diese wird in den $p-2$ Punkten, die mit den α durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind, und in μ unendlich klein zweiter Ordnung, in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten unendlich klein erster Ordnung. Nun kann aber μ so gewählt werden, dass keine Function von der Art $\varphi_1(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$ für dasselbe 310] unendlich klein zweiter Ordnung wird, was sich aus der oben citirten Abh. des Herrn Weber (§ 3) ergiebt, wenn nicht besondere Beziehungen zwischen den $3p-3$ Moduln der Klasse algebraischer Functionen, welche der Theorie zu Grunde gelegt werden, bestehen.

Man kann also im Allgemeinen μ so wählen, dass keines der Systeme α mit $p-2$ anderen Punkten durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft ist, und demnach jedem vorgeschriebenen $P_a(x, \lambda)$ ein bestimmtes System von Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, die mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft sind, entspricht.

3.

Aus den Gleichungen (1a.) und (2.) vor. No. folgt:

$$(1.) \qquad c_a(p-1) = \frac{1}{2}P_a(x,\lambda) - \sum_1^p{}_c \int_\mu^{\alpha_c} dw_a. \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

Demnach ist

$$(2.) \quad \vartheta\left(\sum_1^p{}_a\left(u_a(\xi) - \sum_1^p{}_b u_a(\xi_b)\right)\right) = \vartheta\left(\sum_1^p{}_a\left(\int_\mu^\xi dw_a - \sum_1^p{}_b \int_{\alpha_b}^{\xi_b} dw_a - \frac{1}{2}P_a(x,\lambda)\right)\right).$$

Das Argument auf der rechten Seite dieser Gleichung hat die Form, auf welche die Herren Clebsch und Gordan (A. F. § 56) dasselbe gebracht haben. Um die Übereinstimmung deutlicher hervortreten zu lassen, bemerken wir Folgendes: Eine Curve

$$(3.) \qquad \psi(s^{n-1}, s_1^{m-1}) = 0$$

ist vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass sie durch die Doppelpunkte (sich aufhebende Verzweigungspunkte) der Curve

$$(4.) \qquad F(s^n, s_1^m) = 0,$$

durch p auf der letzteren willkürlich angenommene Punkte und durch $m+n-2$ der Durchschnittspunkte einer Geraden:

$$as + bs + c = 0$$

mit der Curve (4.) hindurchgehen soll, wie sich aus der Vergleichung der Anzahl der disponiblen Coefficienten der Gl. (3.) mit der Anzahl der Bedingungsgleichungen ergiebt. Es ist daher die Curve (3.) die Curve $N-2^{\text{ter}}$ Ordnung der Herren Clebsch und Gordan, wenn wir, um Verwechselungen vorzubeugen, mit N den Grad der von ihnen der Theorie zu Grunde gelegten algebraischen Gleichung bezeichnen.

Eine Curve

$$(5.) \qquad \varphi(s^{n-2}, s_1^{m-2}) = 0$$

dagegen ist vollständig bestimmt durch die Bedingungen, dass sie durch die Doppelpunkte der Curve (4.) und durch $p-1$ auf der letzteren willkürlich [311 angenommene Punkte hindurchgehen soll. Die Curve (5.) stimmt daher mit der Curve $N-3^{\text{ter}}$ Ordnung derselben Herren Verfasser überein. Dass im

wirklichen Grad eine Abweichung vorhanden ist, hat seinen Grund darin, dass $f(\overset{\nu}{s}, \overset{\mu}{z})$ in der RIEMANNschen Bezeichnung eine nicht complete ganze rationale Function $\mu+\nu^{\text{ten}}$ Grades bedeutet; ein Grund, welcher auch die Verschiedenheit der Ausdrücke für p in der Theorie von RIEMANN und der Herren CLEBSCH und GORDAN veranlasst.

4.

Setzt man in Gleichung (2.) vor. No. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ resp. gleich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, so wird im Allgemeinen nach No. 1 und 2

$$\vartheta\left(\sum_1^p a\left(\int_\mu^\xi dw_a - \frac{1}{2}P_a(x,\lambda)\right)\right)$$

nicht identisch in jedem Punkte ξ, sondern nur in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ verschwinden. Soll also letztere Function in μ verschwinden, d. h.

$$\vartheta\left(\sum_1^p a\left(\frac{1}{2}P_a(x,\lambda)\right)\right) = 0 \tag{1.}$$

sein, so muss eine der Grössen α mit μ zusammenfallen; und umgekehrt, wenn letzteres stattfindet, so wird die Gleichung (1.) erfüllt. In diesem Falle ergiebt sich aus No. 2, dass die Function ψ_μ, durch welche die α mit μ verknüpft sind, durch die in μ unendlich klein werdende Function $as+bz+c$ theilbar, und der Quotient eine Function φ ist, welche in den von μ verschiedenen Punkten α unendlich klein zweiter Ordnung wird. (Vergl. Cl. G. A. F. § 75 und WEBER, o. c. Abh. § 6.)

Man nennt bekanntlich ein System $\frac{1}{2}P_a(x,\lambda)$ von correspondirenden halben Periodicitätsmoduln ein gerades oder ungerades, je nachdem

$$x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots + x_p\lambda_p \equiv 0 \text{ oder } 1, \quad \text{mod. } 2. \tag{2.}$$

Nun ist im Allgemeinen $\vartheta\left(\sum_1^p a\left(\frac{1}{2}P_a(x,\lambda)\right)\right)$ Null oder von Null verschieden, je nachdem $\frac{1}{2}P_a(x,\lambda)$ ein ungerades oder ein gerades System halber Periodicitätsmoduln ist. (Vergl. Cl. G. A. F. § 75 und WEBER § 7.)

Aus beiden Sätzen ergiebt sich, wenn wir ein System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, das mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft ist, nach der Analogie der CLEBSCH-GORDANschen Bezeichnung ein eigentliches oder ein uneigent-

liches System (α) nennen, je nachdem keine der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ oder eine mit μ coincidirt, der Satz:

Durch die Gleichung (2.) No. 2 sind die geraden Systeme [312 halber Periodicitätsmoduln den eigentlichen Systemen (α), die ungeraden Systeme den uneigentlichen zugeordnet.

Da es nun bekanntlich $2^{p-1}(2^p-1)$ Systeme ungerader und $2^{p-1}(2^p+1)$ Systeme gerader halber Periodicitätsmoduln giebt, so ist auch die Anzahl der uneigentlichen Systeme (α) gleich $2^{p-1}(2^p-1)$ und die Anzahl der eigentlichen $2^{p-1}(2^p+1)$ (vergl. Cl. G. A. F. § 75 und WEBER § 7).

5.

Die sämmtlichen Systeme (α), welche für alle möglichen Werthe von $P_\alpha(x, \lambda)$ durch Gleichung (2.) No. 2 auf transcendentem Wege geboten werden, genügen einem Systeme algebraischer Gleichungen, welches folgendermassen aus der Definition der Functionen ψ_μ sich ergiebt.

Bestimmt man die Coefficienten der Function $\psi(s^{n-1}, z^{m-1})$ derart, dass dieselbe in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten und in den $m+n-2$ Punkten, worin die in μ unendlich klein zweiter Ordnung werdende Function $as+bz+c$ noch ausserdem verschwindet, gleich Null wird, so erhält ψ die Form:

$$\psi(s^{n-1}, z^{m-1}) = \zeta_0\psi_0 + \zeta_1\psi_1 + \zeta_2\psi_2 + \cdots + \zeta_p\psi_p, \tag{1.}$$

worin die ζ willkürliche Constanten, die ψ bestimmte ganze rationale Functionen von (s, z) sind. Setzt man in die beiden Gleichungen

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{2.}$$

für (s, z) successive $(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots, (b_p, a_p)$, so erhält man $2p$ Gleichungen, und aus diesen, durch Elimination der Grössen ζ, p Gleichungen, welche in Verbindung mit den p Gleichungen:

$$F(b_i, a_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{3.}$$

zur Bestimmung der Punktsysteme (b_i, a_i) oder (α) dienen. Wir wissen aus No. 2, dass wir als Lösungen dieses Systems von Gleichungen die den verschiedenen $\frac{1}{1}P_\alpha(x, \lambda)$ entsprechenden Punktsysteme (α) erhalten müssen. Aber wie ordnen sich die auf dem eben angegebenen algebraischen Wege er-

mittelten einzelnen Systeme (α) den verschiedenen Systemen halber Periodicitätsmoduln zu?

Diese Frage hat nur dann einen bestimmten Sinn, wenn die Art der Zer-
[313] schneidung der Fläche T, welche vorgenommen wird, um diese Fläche in eine einfach zusammenhangende zu verwandeln, (R. A. F. §§ 3 u. 19) fixirt ist. Aus den Untersuchungen der Herren CLEBSCH und GORDAN (A. F. § 89) geht nämlich hervor, dass man die Querschnitte so wählen kann, dass ein beliebiges eigentliches System (α) von Lösungen der oben erwähnten algebraischen Gleichungen dem Systeme $\frac{1}{2}P_\alpha(0,0)$ vermittelst der Gleichung (2.) No. 2 zugeordnet ist. Man kann daher, wie sich aus Cl. G. A. F. § 93 ergiebt, statt die Querschnitte von vorn herein festzulegen, ein beliebiges eigentliches System (α) dem Systeme $\frac{1}{2}P_\alpha(0,0)$ vermittelst Gleichung (2.) No. 2 zuordnen, worauf sich die Grösse der Periodicitätsmoduln $a_{\alpha\beta}$ bestimmen lässt.

Ist jedoch die Art der Zerschneidung der Fläche T fixirt, so sind hiermit die Periodicitätsmoduln gegeben, und es ist jedes System (α) durch Gleichung (2.) in No. 2 einem bestimmten Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln zugeordnet. Für diesen Fall wollen wir in der folgenden Nummer einige Bemerkungen, welche auf die oben aufgeworfene Frage Bezug haben, anschliessen.

6.

Ist (α') ein festes System, (α) aber ein beliebiges System, $\frac{1}{2}P_\alpha(x',\lambda')$ und $\frac{1}{2}P_\alpha(x,\lambda)$ die denselben resp. zugeordneten Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln, so ist nach Gleichung (2.) oder (4.) No. 2

$$\left.\begin{aligned} (1.)\qquad \sum_1^p{}_c \int_\mu^{\alpha'_c} dw_\alpha &= \frac{1}{2}\sum_1^{2p-2}{}_b \int_\mu^{\varepsilon_b} dw_\alpha + \frac{1}{2}P_\alpha(x',\lambda'), \\ (2.)\qquad \sum_1^p{}_c \int_\mu^{\alpha_c} dw_\alpha &= \frac{1}{2}\sum_1^{2p-2}{}_b \int_\mu^{\varepsilon_b} dw_\alpha + \frac{1}{2}P_\alpha(x,\lambda). \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1,2,\ldots,p)$$

In diesen Gleichungen erstrecken sich die Integrale rechter Hand über die in der Gleichung (1a.) No. 2 vorgeschriebenen Wege, die Integrale linker Hand über diejenigen, welche die Umkehrung der ABELschen Integrale erfordert. Wenn wir das durch die Differenz $\frac{1}{2}P_\alpha(x,\lambda)-\frac{1}{2}P_\alpha(x',\lambda')$ entstehende System correspondirender halber Periodicitätsmoduln mit $\frac{1}{2}Q_\alpha(x,\lambda)$ bezeichnen,

so ergiebt die Subtraction der Gleichungen (1.) und (2.)

$$(3.) \qquad \frac{1}{2} Q_a(x, \lambda) = \sum_1^p{}_c \int_{\alpha'_c}^{\alpha_c} dw_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

(vergl. Cl. G. A. F. § 56 und WEBER, l. c. § 6), wo die Integrationswege [314 rechter Hand ebenfalls bestimmt sind, wenn x, λ bestimmte Zahlen bedeuten, aber willkürlich gewählt werden dürfen, wenn diese Zahlen nur bis auf Vielfache von 2 als gegeben betrachtet werden. Unter der letzteren Voraussetzung denken wir uns, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, die sämmtlichen Integrationswege rechter Hand in Gleichung (3.) in der einfach zusammenhangenden Fläche T' verlaufend. Alsdann können diese Gleichungen dazu dienen, die numerischen Werthe der ganzen Zahlen x, λ in $\frac{1}{2} Q_a(x, \lambda)$ zu bestimmen, sobald die Periodicitätsmoduln a_{ik} und die Integrale rechter Hand berechnet sind.

Wählt man für (α) nach und nach alle eigentlichen und uneigentlichen Systeme, so erhält man durch die Gleichung (3.) successive 2^{2p} incongruente Systeme halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2} Q_a(x, \lambda)$, und die Systeme (α) sind auf diese Weise einem unter ihnen (α') als Basis zugeordnet worden.

Denken wir uns nunmehr für die Basis (α') successive alle Systeme (α) gewählt, und jedesmal die Zuordnung aller übrigen Systeme durch Gleichung (3.) ausgeführt, so sind wir im Stande das System (α^0), welches vermittelst der Gleichung (2.) No. 2 dem Systeme $\frac{1}{2} P_a(0, 0)$ zugehört, von allen übrigen Systemen (α) auszusondern.

In der That ergiebt für das letztere System als Basis, wenn also (α^0) an die Stelle von (α') gesetzt wird, wie aus No. 4 folgt, die Gleichung (3.) ein gerades oder ein ungerades System halber Periodicitätsmoduln $\frac{1}{2} Q_a(x, \lambda)$, je nachdem das System der oberen Grenzen (α) ein eigentliches oder ein uneigentliches ist.

Umgekehrt ist das System (α^0) das einzige unter den Systemen (α), welches diese Eigenschaft besitzt.

Da

$$\sum_1^p{}_c \int_{\alpha'_c}^{\alpha_c} dw_a = \sum_1^p{}_c \int_{\alpha^0_c}^{\alpha_c} dw_a - \sum_1^p{}_c \int_{\alpha^0_c}^{\alpha'_c} dw_a,$$

so ergiebt sich die Richtigkeit des letzteren Satzes, wenn nachgewiesen ist,

dass unter den Differenzen, welche aus ein und demselben System $\frac{1}{2}Q_a(x', \lambda')$ und jedem einzelnen der geraden Systeme halber Periodicitätsmoduln gebildet werden, mindestens eine ist, welche ein ungerades System halber Periodicitätsmoduln darstellt.

Es sei daher $\frac{1}{2}Q_a(x, \lambda)$ irgend ein gerades System, so ist die Differenz

$$\tfrac{1}{2}Q_a(x, \lambda) - \tfrac{1}{2}Q_a(x', \lambda') = \tfrac{1}{2}Q_a(x - x', \lambda - \lambda')$$

315] ein gerades oder ungerades System, je nachdem

(4.) $$\sum_1^p{}_b (x_b - x'_b)(\lambda_b - \lambda'_b) \equiv 0 \text{ oder } 1, \mod 2 \quad \text{(s. No. 4 Gl. (2.))}.$$

Nun ist

$$\sum_1^p{}_b x_b \lambda_b \equiv 0, \mod 2,$$

und wenn wir mit δ die Null oder Eins bezeichnen, je nachdem $\frac{1}{2}Q_a(x', \lambda')$ ein gerades oder ungerades System ist,

$$\sum_1^p{}_b x'_b \lambda'_b \equiv \delta, \mod 2.$$

Es ist demnach $\frac{1}{2}Q_a(x - x', \lambda - \lambda')$ dann und nur dann ein gerades System, wenn

(5.) $$\sum_1^p{}_b (x_b \lambda'_b + x'_b \lambda_b) \equiv \delta, \mod 2.$$

Es ist nun nicht möglich, dass für alle geraden Systeme $\frac{1}{2}Q_a(x, \lambda)$ diese Congruenz erfüllt werde. Denn der Voraussetzung nach sind in dem Zahlensysteme:

$$\begin{pmatrix} x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_p \\ \lambda'_1, & \lambda'_2, & \ldots, & \lambda'_p \end{pmatrix}$$

nicht alle gleichstelligen x' und λ' gleichzeitig congruent Null. Ist ausserdem $\frac{1}{2}Q_a(x', \lambda')$ ungerade, so muss wenigstens ein Paar gleichstelliger x', λ' dieses Zahlensystems congruent Eins sein.

Es sei nun

1) $\frac{1}{2}Q_a(x', \lambda')$ gerade, also $\delta = 0$, und $x'_i \equiv 1$ oder $\lambda'_i \equiv 1$.

Wählen wir in dem einen oder anderen Falle ein gerades System $\frac{1}{2}Q_a(x, \lambda)$, in welchem alle x und λ congruent Null sind, ausser λ_i oder x_i, die resp. congruent Eins, so wird die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Eins.

2) $\frac{1}{2}Q_a(x', \lambda')$ ungerade, also $\delta = 1$, und $x'_i \equiv 1$, $\lambda'_i \equiv 1$, so muss man zwei Fälle unterscheiden: a) Sind alle übrigen x', λ' congruent Null, so wähle man

ein gerades System $\frac{1}{2}Q_\alpha(\varkappa, \lambda)$, worin $\varkappa_l \equiv 1$, $\lambda_l \equiv 1$; $\varkappa_m \equiv 1$, $\lambda_m \equiv 1$, alle übrigen $\varkappa$, λ congruent Null; so wird die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Null ist. b) Sind noch andere der Grössen $\varkappa'$, λ' congruent Eins, z. B. $\varkappa'_m \equiv 1$ oder $\lambda'_m \equiv 1$, so wähle man das gerade System $\frac{1}{2}Q_\alpha(\varkappa, \lambda)$ so, dass $\varkappa_l \equiv 1$, $\lambda_l \equiv 0$; $\varkappa_m \equiv 0$, $\lambda_m \equiv 1$ oder $\varkappa_m \equiv 1$, $\lambda_m \equiv 0$, alle übrigen $\varkappa$, λ congruent Null; so ist wieder die Congruenz (5.) nicht erfüllt, da die linke Seite congruent Null ist.

Wegen dieser bewiesenen Eigenschaft des Systems (α^0) wollen wir [316 dasselbe das zu μ gehörige Hauptsystem nennen.

7.

Wir gehen dazu über, die in No. 3 Gleichung (2.) angenommene Darstellung der Argumente der Thetafunction auf die Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ anzuwenden. Herr Thomae hat (d. J. B. 66, pag. 95) für $d \log \vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, die als von einander unabhängig vorausgesetzt werden, einen eleganten Ausdruck gegeben und denselben für die hyperelliptischen Functionen (d. J. B. 71, pag. 201) vollständig berechnet. Die weitere Behandlung desselben Ausdruckes für den allgemeinen Fall ist jedoch durch beträchtliche Schwierigkeiten gehemmt (s. die Abh. des Herrn Thomae B. 66). Der von Herrn Thomae gegebene Ausdruck nimmt aber eine wesentlich einfachere Gestalt an, wenn man von der erwähnten Form der Argumente der Thetafunction ausgeht.

Es sei $W_1, W_2, \ldots, W_p$ ein System unabhängiger Integrale erster Gattung, so dass

$$(1.) \qquad W_\alpha = \int_\mu^\xi \frac{f_\alpha\left(s, z\right)}{\frac{\partial F}{\partial s}} ds,$$

wo die Functionen f_α ganz und rational sind und für die sich aufhebenden Verzweigungspunkte verschwinden, während die noch übrigen p willkürlichen Constanten jeder derselben (R. A. F. § 9) einer späteren Disposition vorbehalten bleiben. Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \ldots & A_p^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{(p)} & A_2^{(p)} & \ldots & A_p^{(p)} \end{vmatrix} = \nabla,$$

wo $A_i^{(k)}$ den Periodicitätsmodul von W_i am Querschnitte a_k bedeutet (R. A. F. § 20), so ist bekanntlich

$$(2.) \qquad w_a = \frac{i\pi}{\nabla} \sum_1^p{}_b \frac{\partial \nabla}{\partial A_b^{(a)}} W_b \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

ein System unabhängiger Integrale erster Gattung von der Beschaffenheit, dass der Periodicitätsmodul von w_a am Querschnitt a_a gleich πi, an allen übrigen Querschnitten a gleich Null, am Querschnitte b_ν gleich $a_{a\nu}$, und zugleich findet die Beziehung statt, dass $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ (R. A. F. § 18—21).

317] Es sei ferner

$$(3.) \qquad u_a = w_a + c_a,$$

wo c_a dieselbe Bedeutung habe wie in No. 1, und k irgend einer der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, und σ der demselben zugehörige Werth von s, so mögen aus den Gleichungen

$$(4.) \qquad u_a(\sigma, k) - \sum_1^p{}_b u_a(s_b, z_b) = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

die p Grössenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), …, (s_p, z_p) bestimmt werden. Bezeichnet man $\frac{du_a(s_b, z_b)}{dz_b}$ kurz mit $\frac{du_a}{dz_b}$, und setzt:

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dz_1} & \frac{du_1}{dz_2} & \cdots & \frac{du_1}{dz_p} \\ \frac{du_2}{dz_1} & \frac{du_2}{dz_2} & \cdots & \frac{du_2}{dz_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_p}{dz_1} & \frac{du_p}{dz_2} & \cdots & \frac{du_p}{dz_p} \end{vmatrix} = \Delta,$$

so findet Herr THOMAE l. c. ein Resultat, welches im Wesentlichen auf das Folgende hinauskommt:

$$(5.) \qquad \frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \ldots, 0)}{\partial k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial' \log \Delta}{\partial k},$$

wo wir durch den an das Differentiationszeichen rechts oben angefügten Index angedeutet haben, dass bei der Differentiation nach k die in Δ enthaltenen Grössen (s_b, z_b) als von k unabhängig behandelt werden sollen.

Dieses Resultat wollen wir einer Transformation unterwerfen. Zunächst ergiebt sich leicht aus einem bekannten Determinantensatz, wenn man

$$\frac{dW_a(s_b, z_b)}{dz_b} = \frac{dW_a}{dz_b}$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{dW_1}{dz_1} & \frac{dW_1}{dz_2} & \cdots & \frac{dW_1}{dz_p} \\ \frac{dW_2}{dz_1} & \frac{dW_2}{dz_2} & \cdots & \frac{dW_2}{dz_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dW_p}{dz_1} & \frac{dW_p}{dz_2} & \cdots & \frac{dW_p}{dz_p} \end{vmatrix} = D$$

setzt, [318

$$\Delta = \frac{(i\pi)^p}{\nabla} D, \tag{6.}$$

also

$$\frac{\partial' \log \Delta}{\partial k} = \frac{\partial' \log D}{\partial k} - \frac{\partial \log \nabla}{\partial k}. \tag{7.}$$

8.

Es ist nun das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung vor. No., welches wir weiter umformen wollen. Lassen wir zu dem Ende den Punkt μ in No. 1—6 in den Verzweigungspunkt k hineinrücken, und verstehen unter (α^0) das dem k zugehörige Hauptsystem, so wie unter ξ_b den Punkt (s_b, z_b), unter ξ den Punkt (s, z), so folgt aus Gleichung (1a.) und (2.) No. 2

$$u_a(s, z) - \sum_1^p{}_b u_a(s_b, z_b) = \int_k^{\xi} du_a - \sum_1^p{}_b \int_{\alpha_b^{(0)}}^{\xi_b} du_a. \qquad (a = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.}$$

Die Gleichung (4.) vor. No. wird daher

$$\sum_1^p{}_b \int_{\alpha_b^{(0)}}^{\xi_b} du_a = 0, \qquad (a = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.}$$

welche sofort ergiebt:

$$\xi_1 = \alpha_1^{(0)}, \quad \xi_2 = \alpha_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad \xi_p = \alpha_p^{(0)}. \tag{3.}$$

Die lineare Function $as + bz + c$ in No. 2, welche in μ unendlich klein zweiter Ordnung wird, ist hier, mit Rücksicht auf R. A. F. § 6, gleich $z - k$. Die-

selbe verschwindet in noch $n-2$ anderen Punkten. Daraus folgt, auf dieselbe Weise wie in No. 2, dass die Function ψ_k, durch welche die Grössen (α^0) mit k verknüpft sind, in Bezug auf s vom $n-2^{\text{ten}}$, in Bezug auf z vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade ist.

Es sind nunmehr

$$\left[\frac{f_a(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}(z-k)^{\frac{1}{2}}\right]_{\substack{z=k\\ s=\sigma}} = \mathfrak{A}_a, \qquad \left[\frac{\psi_k(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}(z-k)^{\frac{1}{2}}\right]_{\substack{z=k\\ s=\sigma}} = \mathfrak{B}$$

endliche Grössen. Weil ausserdem (α^0) ein eigentliches System ist, so ist, wenigstens so lange als nicht besondere Beziehungen zwischen den sich aufhebenden Verzweigungspunkten bestehen, wie im allgemeinen Falle μ, so hier k von $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)}$ verschieden, demnach ist die Grösse $\mathfrak{B}$ nicht Null. Setzen 319] wir also

$$\frac{\mathfrak{A}_a}{2\mathfrak{B}} = C_a, \tag{4.}$$

so ist C_a eine endliche Constante, und die Differenz

$$\frac{\partial W_a}{\partial k} - C_a \int \frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\, dz,$$

deren Minuendus und Subtrahendus nur für $(s,z) = (\sigma, k)$ und zwar beide wie $-\mathfrak{A}_a(z-k)^{-\frac{1}{2}}$ unendlich werden, ist ein in der ganzen Fläche T endliches Integral. Es ist demnach

$$\frac{\partial W_a}{\partial k} - C_a \int \frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\, dz = \lambda_{a1} W_1 + \lambda_{a2} W_2 + \cdots + \lambda_{ap} W_p + \text{Const.}, \tag{5.}$$

wo die Grössen λ Constanten bedeuten (R. A. F. § 4).

Differentiiren wir diese Gleichung nach z, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial k}\frac{dW_a}{dz} - C_a \frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}} = \lambda_{a1}\frac{dW_1}{dz} + \lambda_{a2}\frac{dW_2}{dz} + \cdots + \lambda_{ap}\frac{dW_p}{dz}. \tag{6.}$$

Setzen wir hierin successive für (s,z) die Punkte $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)}$, so erhalten wir

$$\frac{\partial'}{\partial k}\frac{dW_a}{dz_b} = \sum_1^p{}_c \lambda_{ac}\frac{dW_c}{dz_b}, \quad \text{für } a = 1, 2, \ldots, p; \tag{7.}$$

daher ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\sum_1^p{}_c \lambda_{ic} \frac{dW_c}{dz_b} = \Sigma^{(ib)}$$

setzen,

$$\frac{\partial' D}{\partial k} = \sum_1^p{}_i \begin{vmatrix} \frac{dW_1}{dz_1} & \frac{dW_1}{dz_2} & \cdots & \frac{dW_1}{dz_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dW_{i-1}}{dz_1} & \frac{dW_{i-1}}{dz_2} & \cdots & \frac{dW_{i-1}}{dz_p} \\ \Sigma^{(i1)} & \Sigma^{(i2)} & \cdots & \Sigma^{(ip)} \\ \frac{dW_{i+1}}{dz_1} & \frac{dW_{i+1}}{dz_2} & \cdots & \frac{dW_{i+1}}{dz_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dW_p}{dz_1} & \frac{dW_p}{dz_2} & \cdots & \frac{dW_p}{dz_p} \end{vmatrix} = D \sum_1^p{}_i \lambda_{ii}.$$

Folglich ist [320

$$\frac{\partial' \log D}{\partial k} = \sum_1^p{}_i \lambda_{ii}. \tag{8.}$$

9.

Die Grössen λ lassen sich aus Gleichung (6.) vor. No. auf algebraischem Wege bestimmen. Die Rechnung wird sehr einfach, wenn wir über die in jedem $f_a(s,z)$ in No. 7 willkürlich gebliebenen p Constanten folgendermassen disponiren. Es seien $b_1, b_2, \ldots, b_p$ willkürlich gewählte Punkte der Fläche T, die sowohl untereinander als auch von den Verzweigungspunkten vollkommen unabhängig sind. Es werden nun die p Constanten in $f_a(s,z)$ so bestimmt, dass diese Function für alle b ausser b_a verschwindet, in b_a aber den Werth von $\frac{\partial F}{\partial s}$ in demselben Punkte annimmt. Dieses ist immer zulässig, wenn nicht die Punkte b Beziehungen zu einander haben.

Die Gleichung (6.) vor. No. ergiebt alsdann:

$$\left[\frac{\partial}{\partial k}\frac{f_a(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i} - C_a\left[\frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i} = \lambda_{ai}. \tag{1.}$$

In der Umgebung des Punktes b_i in der Fläche T ist

$$\frac{f_a(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} = \varepsilon + c_1(z-b_i) + c_2(z-b_i)^2 + \cdots, \tag{2.}$$

($\varepsilon = 1$ oder 0, je nachdem $a = i$ oder $a \gtrless i$),

wo $c_1, c_2, \ldots$ von z unabhängige Grössen sind, und mit b_i auch der Werth von z im Punkte b_i bezeichnet ist. Aus Gleichung (2.) folgt, dass das erste Glied auf der linken Seite der Gleichung (1.) verschwindet, dass also

$$\lambda_{\alpha i} = -C_\alpha \left[\frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i}. \tag{3.}$$

Aus den Gleichungen (5.) und (7.) No. 7, Gleichung (8.) No. 8 folgt daher:

$$\frac{\partial \log \vartheta(0,0,\ldots,0)}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + \frac{1}{2}\sum_1^p{}_i C_i \left[\frac{\psi_k(s,z)}{(z-k)\frac{\partial F}{\partial s}}\right]_{b_i}. \tag{4.}$$

In dieser Gleichung ist das erste Glied auf der rechten Seite ein vollständiger Differentialquotient einer transcendenten Function, das zweite eine wohlbestimmte algebraische Function.

321] 10.

In dem besonderen Falle der hyperelliptischen Integrale sei die der Theorie zu Grunde gelegte algebraische Gleichung

$$s^2 - R(z) = 0, \tag{1.}$$

wo

$$R(z) = (z-k_1)(z-k_2)\ldots(z-k_{2p+2}),$$

und die Grössen k von einander unabhängig vorausgesetzt werden. In diesem Falle sind keine sich aufhebenden Verzweigungspunkte vorhanden. Ist daher

$$\varphi(z) = (z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_p),$$

so kann man setzen:

$$f_\alpha(s,z) = \frac{2\sqrt{R(b_\alpha)}}{\varphi'(b_\alpha)}\cdot\frac{\varphi(z)}{z-b_\alpha}. \tag{2.}$$

Da sich aufhebende Verzweigungspunkte nicht vorhanden, so kann man für $\varphi(s^{n-2}, z^{m-2})$ eine ganze rationale Function $p-1^{\text{ten}}$ Grades von z wählen. Eine solche Function wird in einem Verzweigungspunkte, wo sie verschwindet, unendlich klein zweiter Ordnung. Daher können die Grössen ε in No. 2 zu je zweien einander gleich und gleich einer der Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_{2p+2}$ genommen werden.

Ist k eine dieser Grössen und fällt μ in k hinein, so ergiebt die Gleichung (2.) No. 2 für das System der oberen Grenzen (α) p Verzweigungspunkte, da im gegenwärtigen Falle jede zwischen zwei Verzweigungspunkten verlaufende Integration eines der Systeme correspondirender halber Periodicitätsmoduln liefert. Man kann also, wenn $k', k'', \ldots, k^{(p)}$ die p Verzweigungspunkte sind, welche die Gleichung (2.) No. 2 für ein bestimmtes $P_\alpha(\varkappa, \lambda)$ ergiebt, das zugehörige $\psi_k(s, z)$ setzen

$$\psi_k(s, z) = (z-k')(z-k'')\ldots(z-k^{(p)}).$$

Sind insbesondere $k_1, k_2, \ldots, k_p$ diejenigen Verzweigungspunkte, welche die Gleichung (2.) No. 2 für $P_\alpha(0, 0)$ liefert, also das System (α^0), so sind diese Verzweigungspunkte von k verschieden, da in ihnen $\vartheta\left(\sum_1^p \alpha \left(\int_k^\xi dw_\alpha\right)\right)$ verschwindet, während diese Function für $\xi = k$ in die im Allgemeinen nicht verschwindende Grösse $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ übergeht. Die zu (α^0) gehörige Function $\psi_k(s, z)$ ist

(3.) $$\psi_k(s, z) = \psi(z) = (z-k_1)(z-k_2)\ldots(z-k_p).$$

Es ist alsdann [322

(4.) $$C_\alpha = \frac{\sqrt{R(b_\alpha)}}{\varphi'(b_\alpha)} \frac{\varphi(k)}{(k-b_\alpha)\psi(k)}.$$

Also geht das zweite Glied der rechten Seite der Gl. (4.) vor. No. über in:

$$\frac{1}{4}\sum_1^p{}_i \frac{\psi(b_i)}{\varphi'(b_i)(k-b_i)^2} \frac{\varphi(k)}{\psi(k)}.$$

Setzt man

(5.) $$\frac{\varphi(k_\alpha)\psi(b_i)}{\psi'(k_\alpha)\varphi'(b_i)} \frac{1}{(k_\alpha-b_i)^2} = l_{i\alpha},$$

so ist nach Gleichung (4.) vor. No.

(6.) $$\frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \ldots, 0)}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + \frac{1}{4}\sum_1^p{}_i \frac{d\log(k-b_i)}{dk} + \frac{1}{4}\sum_1^p{}_i \sum_1^p{}_\alpha l_{i\alpha} \frac{d\log(k-k_\alpha)}{dk}.$$

11.

Zieht man es vor, bei den hyperelliptischen Integralen die gewöhnliche Form

(1.) $$\frac{dW_\alpha}{dz} = \frac{z^{\alpha-1}}{\sqrt{R(z)}}$$

festzuhalten, so wird

$$C_a = \frac{k^{a-1}}{2\psi(k)}. \tag{2.}$$

Die Gleichung (6.) in No. 8 wird gegenwärtig:

$$\frac{\frac{1}{2}s^{a-1} - C_a\psi(s)}{s-k} = \sum_1^p{}_b \lambda_{ab} s^{b-1}. \tag{3.}$$

Setzt man

$$\frac{\psi(s)-\psi(k)}{s-k} = \chi(s),$$

so folgt aus Gleichung (3.)

$$\lambda_{ii} = -\frac{C_i}{1.2\ldots(i-1)}\left[\frac{d^{i-1}\chi(s)}{ds^{i-1}}\right]_{s=0}, \tag{4.}$$

also

$$\sum_1^p{}_i \lambda_{ii} = -\frac{1}{2\psi(k)}\sum_1^p{}_a \frac{k^{a-1}}{1.2\ldots(a-1)}\left[\frac{d^{a-1}\chi(s)}{ds^{a-1}}\right]_{s=0} = -\frac{\chi(k)}{2\psi(k)},$$

also

$$\sum_1^p{}_i \lambda_{ii} = -\frac{\psi'(k)}{2\psi(k)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log\psi(k)}{\partial k}, \tag{5.}$$

323] also nach Gleichung (8.) No. 8

$$\frac{\partial' \log D}{\partial k} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log\psi(k)}{\partial k}$$

und folglich nach Gleichung (5.) und (7.) No. 7

$$\frac{\partial \log\vartheta(0,0,\ldots,0)}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\nabla}{\partial k} + \frac{1}{4}\frac{\partial \log\phi(k)}{\partial k}, \tag{6.}$$

was mit dem Resultate des Herrn THOMAE (ob. cit. Abh. d. J. B. 71, pag. 215) übereinstimmt.

Greifswald im März 1871.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 323, Zeile 7 c_a statt c,
„ 325, „ 10 von der ersten statt in erster,
„ 337, in der $(i+1)^{ten}$ Zeile der Determinante dreimal W_{i+1} statt W_i,
„ 340, Zeile 3 v. u. pag. 215 statt pag. 216.

Es wurde eingefügt:

S. 326, Zeile 8 das zweite »für«,
„ 329, „ 18 v. u. »gleich Null wird«,
„ 332, letzte Zeile } »congruent«,
„ 333, Zeile 2 }
„ 338, „ 7 »auf der rechten Seite«.

SCH.

XIII.

ÜBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHEN DIE PERIODICITÄTSMODULN DER ABELSCHEN INTEGRALE GENÜGEN, UND ÜBER VERSCHIEDENE ARTEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN FÜR $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 73, 1871, S. 324—339.)

In einer früheren Abhandlung (d. J. B. 71[1])) haben wir die Periodi- [324
citätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters einer näheren Untersuchung unterzogen und namentlich auch die linearen Differentialgleichungen aufgestellt, welchen diese Functionen genügen. In dem Folgenden wollen wir ebenso für die Periodicitätsmoduln der allgemeinen ABELschen Integrale, als Functionen eines der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der der Theorie zu Grunde gelegten Fläche T, lineare Differentialgleichungen entwickeln, unter der Voraussetzung, dass die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte von einander unabhängig sind.

In diesem Journale B. 36[2]) hat JACOBI für das elliptische $\vartheta(0)$ als Function von $\log q$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung entwickelt, deren Coefficienten numerische Grössen sind. Dieselbe steht in enger Beziehung zu der bekannten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher K und K' genügen, und sie lässt eine unmittelbare Anwendung auf die Transformation zu. — Wir wollen im Folgenden zeigen, dass ähnliche Relationen sich in der Theorie der ABELschen Functionen zwischen $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function

[1]) Abh. VIII, S. 241 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 97 ff., Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 171 ff. Sch.

der Periodicitätsmoduln und deren partiellen Ableitungen nach denselben ergeben, und dass die Herleitung derselben entweder mit Hülfe der bei den oben angeführten Differentialgleichungen der Periodicitätsmoduln in dieser Arbeit hergestellten Beziehungen, oder auch unabhängig von diesen möglich ist.

Da jedoch die Periodicitätsmoduln nicht von einander unabhängig sind, so scheinen uns für manche andere Zwecke, als die sich unmittelbar auf das Problem der Transformation beziehenden, solche Differentialgleichungen den Vorzug zu verdienen, welchen $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function eines der $3p-3$ Klassenmoduln, oder eines der als unabhängig von einander vorausgesetzten sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte genügen. Wir wählen die letz-
325] teren als unabhängige Variabeln und zeigen, dass $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function derselben gewisse algebraische Differentialgleichungen befriedigt.

In der Bezeichnung schliessen wir uns überall an die Abhandlung von RIEMANN (d. J. B. 54[1])) an, welche wir kurz als R. A. F. citiren.

1.

Ehe wir in unsere Untersuchung eintreten, ist es nöthig nachzuweisen, dass die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der die algebraische Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0 \tag{1.}$$

darstellenden Fläche T als von einander unabhängig vorausgesetzt werden dürfen.

Zwischen der Anzahl w dieser Punkte, und der Anzahl $2p$ von Querschnitten, welche die Fläche T in eine einfach zusammenhangende verwandeln, findet die Beziehung statt:

$$w = 2n + 2(p-1) \quad \text{(R. A. F. § 7).} \tag{2.}$$

Für die mit Gleichung (1.) zu derselben Klasse gehörigen algebraischen Gleichungen ist p unveränderlich (R. A. F. § 11). Die Gleichung niedrigsten Grades in derselben Klasse hat für $p > 2$ die Form

$$F_1(\overset{\nu}{s}, \overset{\nu}{z}) = 0, \tag{3.}$$

und es ist

$$p = 2\nu - \varepsilon, \tag{4.}$$

wo $\varepsilon = 2$ oder 3, je nachdem p gerade oder ungerade. (R. A. F. § 13.)

[1]) Riemanns Werke, (1892), S. 88 ff. Sch.

Es sei w_1 die Anzahl der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der Gleichung (3.), so ist nach Gleichung (2.)

$$w_1 = 2\nu + 2(p-1), \tag{5.}$$

oder

$$w_1 = 6\nu - 2(1+\varepsilon). \tag{6.}$$

Die Anzahl $(\nu+1)^2$ der Constanten der Gl. (3.) ist also um mehr als eine Einheit grösser als w_1.

Nun sei

$$n = \nu + \zeta, \quad m = \nu + \eta, \tag{7.}$$

wo ζ und η entweder Null oder positive ganze Zahlen sind; es folgt alsdann aus Gl. (2.) und (5.)

$$w = w_1 + 2\zeta. \tag{8.}$$

Die Anzahl der Constanten der Gl. (1.) ist [326

$$(m+1)(n+1) = (\nu+1+\zeta)(\nu+1+\eta) = (\nu+1)^2 + (\nu+1+\eta)\zeta + (\nu+1)\eta,$$

also übertrifft die Anzahl der Constanten der Gl. (1.) die der Gleichung (3.) um mehr als 2ζ, und demnach die Anzahl w der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte der Gleichung (1.) um mehr als eine Einheit, so dass im Allgemeinen letzteren Punkten willkürliche, von einander unabhängige Lagen gegeben werden können.

Zu demselben Schlusse gelangt man auch für $p = 1$ oder 2. Wir werden demnach in dieser Arbeit die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte als von einander unabhängig betrachten.

2.

Eine fernere Bemerkung bezieht sich auf die Darstellung einer rationalen Function von (s, z), die in gegebenen Punkten unendlich gross und in anderen gegebenen unendlich klein werden soll.

Bekanntlich kann man mit Hülfe der Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0 \tag{1.}$$

jede rationale Function $f(s, z)$ auf die Form bringen:

$$f(s, z) = \frac{L_{n-1} s^{n-1} + L_{n-2} s^{n-2} + \cdots + L_0}{N}, \tag{2.}$$

wo die Grössen $L_{n-1}, L_{n-2}, \ldots, L_0$ und N ganze rationale Functionen von z sind.

Soll daher $f(s,z)$ in den Punkten $(s_1,z_1), (s_2,z_2), \ldots, (s_m,z_m)$ unendlich gross erster Ordnung, sonst aber überall endlich werden, und setzen wir

$$N = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)$$

und bezeichnen die $n-1$ übrigen Punkte der Fläche T, welche mit (s_α, z_α) zu demselben Werthe z_α gehören, mit $(s'_\alpha, z_\alpha), (s''_\alpha, z_\alpha), \ldots, (s_\alpha^{(n-1)}, z_\alpha)$, so ist der Zähler so zu bestimmen, dass er in den Punkten

$$(s'_\alpha, z_\alpha),\ (s''_\alpha, z_\alpha),\ \ldots,\ (s_\alpha^{(n-1)}, z_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

von der ersten Ordnung verschwindet. Diese $m(n-1)$ Bedingungen liefern ebenso viele lineare Gleichungen für die Coefficienten der L als Unbekannte. — Ist μ die Anzahl dieser Coefficienten und

$$\mu - m(n-1) = \nu + 1,$$

327] so treten zu jenen Gleichungen noch ν andere hinzu, welche ausdrücken, dass der Zähler von $f(s,z)$ ausserdem in den ν gegebenen Punkten $(b_1,a_1), (b_2,a_2), \ldots, (b_\nu,a_\nu)$ erster Ordnung verschwinden soll. Die Gesammtheit der $\mu-1$ Gleichungen liefert die Verhältnisse der Coefficienten der L als rationale Functionen der Grössen

$$(s'_\alpha, z_\alpha),\ (s''_\alpha, z_\alpha),\ \ldots,\ (s_\alpha^{(n-1)}, z_\alpha) \quad \text{und} \quad (b_1,a_1),\ (b_2,a_2),\ \ldots,\ (b_\nu,a_\nu).$$

Da diese Functionen, wie sich aus der Theorie der linearen Gleichungen ergiebt, in Bezug auf $s'_\alpha, s''_\alpha, \ldots, s_\alpha^{(n-1)}$ symmetrisch sind, und die symmetrischen Functionen dieser Grössen sich rational durch die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der Gleichung

$$F(s, z_\alpha^{m}) = 0 \tag{1a.}$$

und durch s_α ausdrücken lassen, so ergiebt sich schliesslich der Satz:

Die Constanten in der rationalen Function $f(s,z)$, welche dadurch bestimmt wird, dass sie in den gegebenen Punkten $(s_1,z_1), (s_2,z_2), \ldots, (s_m,z_m)$ unendlich gross erster Ordnung, sonst überall endlich, und in den gegebenen Punkten $(b_1,a_1), (b_2,a_2), \ldots, (b_\nu,a_\nu)$ unendlich klein erster Ordnung wird, lassen sich als rationale

Functionen dieser beiden Reihen von Grössenpaaren darstellen, deren Coefficienten ihrerseits rational aus den Constanten der Gleichung (1.) zusammengesetzt sind.

Wenn $m > p$, so ist nach R. A. F. § 5 u. 8 die Bestimmung einer rationalen Function gemäss den obigen Bedingungen stets möglich, und es ergiebt sich $\nu = m-p$, so wie dass der Zähler derselben noch ausserdem in p Punkten verschwindet.

3.

Es sei

$$(1.) \qquad U = \int \frac{\varphi(s^{m-1}, z^{m-1})}{\frac{\partial F}{\partial s}} ds$$

irgend ein Integral erster Gattung (R. A. F. § 9), und k irgend einer der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, so ist $\frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda}$ in der Fläche T überall ausser in k endlich und hat in der Umgebung von k die Form

$$(2.) \qquad \frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda} = c_\lambda (s-k)^{-\frac{2\lambda-1}{2}} + c_{\lambda-1}(s-k)^{-\frac{2\lambda-3}{2}} + \cdots + c_1 (s-k)^{-\frac{1}{2}} + G,$$

wo G nur positive ganzzahlige Potenzen von $(s-k)^{\frac{1}{2}}$ enthält.

Es seien nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ p willkürliche, aber feste Punkte der [328 Fläche T, so lässt sich eine rationale Function $\chi_\lambda(s,z)$ derart bestimmen, dass der Nenner derselben in k unendlich klein der Ordnung $2\lambda-1$, in den Punkten ε unendlich klein erster Ordnung wird, während ihr Zähler für die noch übrigen Nullpunkte des Nenners von gleicher Ordnung wie dieser verschwindet. Alsdann enthält der Zähler noch 2λ willkürliche Constanten (R. A. F. § 8), über welche wir folgendermassen verfügen. In der Umgebung von k hat $\chi_\lambda(s,z)$ die Form:

$$(3.) \quad \chi_\lambda(s,z) = (s-k)^{-\frac{2\lambda-1}{2}} \left(e_0 + e_1(s-k)^{\frac{1}{2}} + e_2(s-k)^{\frac{2}{2}} + \cdots + e_{2\lambda-2}(s-k)^{\frac{2\lambda-2}{2}}\right) + H,$$

wo H nur positive ganzzahlige Potenzen von $(s-k)^{\frac{1}{2}}$ enthält. Wir setzen nun

$$(4.) \qquad \begin{cases} e_1 = e_2 = \cdots = e_{2\lambda-2} = 0, \\ e_0 = c_\lambda, \quad e_2 = c_{\lambda-1}, \quad \ldots, \quad e_{2\lambda-2} = c_1. \end{cases}$$

Dieses giebt im Ganzen $2\lambda-1$ Bedingungen, gerade so viel, als zulässig sind.

Es ist alsdann

$$\frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda} - \chi_\lambda(s, z)$$

in den Punkten $\mathfrak{e}$ unendlich gross erster Ordnung, sonst aber überall endlich. — Sind daher $t_1, t_2, \ldots, t_p$ Integrale zweiter Gattung von der Beschaffenheit, dass t_ν in $\mathfrak{e}_\nu$ unendlich gross erster Ordnung, sonst überall endlich ist, sind ferner $U_1, U_2, \ldots, U_p$ ein System linearunabhängiger Integrale erster Gattung, so dass

$$U_\alpha = \int \frac{\varphi_\alpha\left(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z}\right)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

so ist (R. A. F. § 5)

$$(5.)\quad \frac{\partial^\lambda U}{\partial k^\lambda} - \chi_\lambda = \delta_{\lambda 1} t_1 + \delta_{\lambda 2} t_2 + \cdots + \delta_{\lambda p} t_p + \gamma_{\lambda 1} U_1 + \gamma_{\lambda 2} U_2 + \cdots + \gamma_{\lambda p} U_p + \text{Const.},$$

wo die Grössen γ und δ Constanten bedeuten.

4.

Die Grössen γ, δ in Gl. (5.) vor. No. lassen sich, wenn die Function χ_λ und die Integrale t_ν gebildet sind, auf algebraischem Wege berechnen. — Differentiiren wir daher die Gleichung (5.) vor. No. nach z, und bringen die rationalen Functionen von (s, z) auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichung 329] auf die Form der Gl. (2.) No. 2, so ergeben sich, wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gl. (1.) No. 1, n Gleichungen, welche die Grössen γ, δ linear enthalten. Da diese Gleichungen identisch für jeden Werth von z bestehen, so resultiren aus denselben lineare Gleichungen für die Grössen γ, δ, welche für dieselben bestimmte Werthe liefern, da die Existenz der Gl. (5.) vor. No. bereits erwiesen. Sind (σ_ν, ζ_ν) die dem Punkte $\mathfrak{e}_\nu$ zugehörigen Werthenpaare (s, z), so wie σ der dem k zugehörige Werth von s, so folgt aus der Bildungsweise der rationalen Functionen χ_λ und $\frac{dt_\nu}{ds}$ (R. A. F. § 8) nach dem Satze in No. 2, dass die Coefficienten dieser Functionen sich rational aus den Coefficienten von $\varphi(s, z)$, $F(s, z)$ und ihren Ableitungen nach k und aus (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammensetzen lassen. Ferner sind die Coefficienten der oben erwähnten linearen Gleichungen für die γ, δ rational aus den Coefficienten von $\varphi(s, z)$, $F(s, z)$ und deren Ableitungen nach k, ferner aus den Coefficienten von $\chi_\lambda(s, z)$, $\frac{dt_\nu}{ds}$, $\frac{dU_\nu}{ds}$ zsammengesetzt. Hieraus folgt, dass die

Grössen γ, δ sich rational aus den Coefficienten von $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k, ferner aus den Coefficienten von $\varphi_\nu(s,z)$, und aus (σ,k) und den (σ_ν,ζ_ν) zusammensetzen.

5.

Es sei K der Periodicitätsmodul von U an einem bestimmten Querschnitt, T_ν, K_ν resp. die Periodicitätsmoduln von t_ν, U_ν an demselben Querschnitt, so folgt aus Gl. (5.) No. 3:

$$(1.)\qquad \frac{\partial^\lambda K}{\partial k^\lambda} = \delta_{\lambda 1} T_1 + \delta_{\lambda 2} T_2 + \cdots + \delta_{\lambda p} T_p + \gamma_{\lambda 1} K_1 + \gamma_{\lambda 2} K_2 + \cdots + \gamma_{\lambda p} K_p.$$

Nehmen wir für λ successive $0, 1, 2, \ldots, 2p$ und eliminiren aus den $2p+1$ Gleichungen $T_1, T_2, \ldots, T_p, K_1, K_2, \ldots, K_p$, so erhält man eine Gleichung der Form

$$(2.)\qquad \beta_{2p} \frac{\partial^{2p} K}{\partial k^{2p}} + \beta_{2p-1} \frac{\partial^{2p-1} K}{\partial k^{2p-1}} + \cdots + \beta_0 K = 0.$$

Dieses ist eine lineare Differentialgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, in welcher k als unabhängige Variable gilt, und welcher die $2p$ Periodicitätsmoduln von U genügen. Die Coefficienten β sind nach voriger No. rationale Functionen der Coefficienten in $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k, der Coefficienten von $\varphi_\nu(s,z)$ und der Grössen (σ,k) und (σ_ν,ζ_ν). Allein die Periodicitätsmoduln von U sind über gewisse Querschnitte erstreckte Integrale, [330 und daher durch die Coefficienten in $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ vollkommen bestimmt, sobald die Querschnitte gegeben sind, und es lassen sich die Verhältnisse der Coefficienten β aus diesen Periodicitätsmoduln und ihren Ableitungen ohne Zuhülfenahme anderer Grössen zusammensetzen (s. meine Abh. B. 66 d. J.[1]) No. 2). Hieraus folgt, dass die Verhältnisse der Coefficienten β nur rationale Functionen der Coefficienten in $\varphi(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k sind.

Wenn zwischen den Grössen $T_1, T_2, \ldots, T_p, K_1, K_2, \ldots, K_p$ besondere Beziehungen bestehen, so werden, wenn man für λ in Gl. (1.) successive $0, 1, 2, \ldots, q$ setzt, wo $q < 2p$, aus diesen $q+1$ Gleichungen sich schon jene Grössen eliminiren lassen, und es ergiebt sich alsdann eine Differential-

[1]) Abh. VI, S. 159 ff. dieses Bandes. Sch.

gleichung niedrigerer als $2p^{ter}$ Ordnung, welcher die sämmtlichen Periodicitätsmoduln von U genügen.

Das in dieser No. entwickelte Theorem ist eine Verallgemeinerung eines auf die hyperelliptischen Integrale bezüglichen in meiner Arbeit B. 71 d. J.[1]) No. 8 und 11.

6.

JACOBI hat in diesem Journal B. 36[2]) für das elliptische $\vartheta(0)$ als Function von $\log q = -\pi\frac{K'}{K}$ eine Differentialgleichung entwickelt, welche in Bezug auf $\vartheta(0)$ als abhängige Variable von der dritten Ordnung, in Bezug auf $\vartheta(0)$ und seine Ableitungen nach $\log q$ vom 14ten Grade, und mit rein numerischen Coefficienten behaftet ist.

Fasst man dagegen $\vartheta(0)$ als Function des Moduls k auf, so ist die Differentialgleichung, welcher $\vartheta(0)$ genügt, bei weitem einfacher. Aus der Gleichung

$$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \tag{1.}$$

und der bekannten Differentialgleichung

$$(k-k^3)\frac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dK}{dk} - kK = 0$$

oder

$$\frac{d}{dk}\left[kk'^2\frac{dK}{dk}\right] - kK = 0, \tag{2.}$$

331] folgt nämlich, wenn wir mit JACOBI

$$\vartheta(0) = y$$

setzen,

$$\frac{d}{dk}\left[kk'^2\frac{dy^2}{dk}\right] - ky^2 = 0. \tag{3.}$$

Wenn man wiederum aus dieser Gleichung die Differentialgleichung dritter Ordnung von JACOBI herleiten will, so folgt zunächst aus Gl. (2.), welcher K und K' genügen,

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{K'}{K}\right) = \frac{-\pi}{2kk'^2K^2},$$

also

$$\frac{d\log q}{dk} = \frac{2}{kk'^2y^4}. \tag{4.}$$

[1]) Abh. VIII, S. 241 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Jacobis Werke, Bd. II, S. 171 ff. Sch.

Daher ergiebt die Gleichung (3.)

$$(5.) \qquad 8\frac{d}{d\log q}\left[\frac{1}{y^3}\frac{dy}{d\log q}\right] - k^2k'^2y^6 = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung unter Anwendung der Gl. (4.) nach $\log q$, und eliminirt k aus der entstandenen Gleichung und der Gleichung (5.), so erhält man die Differentialgleichung dritter Ordnung von JACOBI.

Von dieser Differentialgleichung lässt sich, weil sie den Modul k nicht enthält, unmittelbar auf die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen Anwendung machen, wie JACOBI l. c. gezeigt hat. Wir wollen nun im Folgenden für $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function der Periodicitätsmoduln a_{α} algebraische Gleichungen zwischen der Function und ihren partiellen Ableitungen nach den a_{α} herleiten, welche ebenfalls mit rein numerischen Coefficienten behaftet sind. Diese erscheinen als die Verallgemeinerung der Differentialgleichung dritter Ordnung von JACOBI und lassen ebenfalls, da sie von der Wahl des Querschnittssystems unabhängig sind, unmittelbare Anwendung auf die Transformation der ABELschen Functionen zu.

Da jedoch diese Relationen nur unter Voraussetzung der zwischen den Periodicitätsmoduln bestehenden Abhängigkeit gelten, so scheinen uns für manche andere Zwecke, als die sich auf die Transformation beziehenden, solche Relationen den Vorzug zu verdienen, in welchen $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function von einander unabhängiger Grössen auftritt. Wir lassen daher die Herleitung von Differentialgleichungen für $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ folgen, in welchen die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte als unabhängige Variable auftreten; diese Differentialgleichungen erscheinen als Verallgemeinerung der Differentialgleichung (3.).

7. [338

Die Differentialgleichungen der erstgenannten Art, nämlich die zwischen $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ und seinen partiellen Ableitungen nach den Periodicitätsmoduln, lassen sich durch rein algebraische Eliminationen erhalten, ohne Kenntniss des Ausdruckes von $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ durch die Klassenmoduln oder der Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln als Functionen derselben Grössen genügen, wenn man von den in meiner vorangehenden Arbeit[1]) an-

[1]) Abh. XII, S. 321 ff. dieses Bandes. Sch.

gestellten Betrachtungen Gebrauch macht. Diese Arbeit wollen wir kurz mit A. citiren.

Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung, von der Art, dass der Periodicitätsmodul von u_α am Querschnitte a_α gleich πi, an allen übrigen a gleich Null, am Querschnitte b_ν gleich $a_{\alpha\nu}$ (und $a_{\alpha\nu} = a_{\nu\alpha}$), (R. A. F. § 18—21), so ist bekanntlich

$$E_{\lambda\mu}(s,z) = \frac{\partial^2 \log \vartheta\left(\sum_1^p a(u_\alpha)\right)}{\partial u_\lambda \partial u_\mu}$$

eine rationale Function von (s,z).

Ist μ ein beliebiger Punkt der Fläche T, und $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)}$ das mit μ durch die Gleichung

$$\psi_\mu(s,z) = 0$$

verknüpfte Hauptsystem (s. m. A. No. 1—6), und disponirt man über die in den u_α enthaltenen Constanten derart, dass man setzt:

$$u_\alpha = \int_\mu^\xi du_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.}$$

wo ξ der einem beliebigen Werthenpaare (s,z) entsprechende Punkt der Fläche T ist, so wird $\vartheta\left(\sum_1^p a(u_\alpha)\right)$ in den Punkten $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)}$ unendlich klein erster Ordnung (s. m. A. No. 3 Gl. (2.)), also $E_{\lambda\mu}(s,z)$ in denselben Punkten unendlich gross zweiter Ordnung, sonst aber überall endlich. Die Function $\psi_\mu(s,z)$ wird ebenfalls in diesen Punkten unendlich klein zweiter Ordnung (s. m. A. No. 2), also ist

$$G_{\lambda\mu}(s,z) = E_{\lambda\mu}(s,z)\,\psi_\mu(s,z) \tag{2.}$$

eine ganze rationale Function von (s,z). Da u_α für jeden Punkt der Fläche T endlich ist, so ist für $z = \infty$ oder $s = \infty$ $G_{\lambda\mu}(s,z)$ ebenso oft unendlich wie ψ_μ, demnach ist $G_{\lambda\mu}(s,z)$ wie ψ_μ in Bezug auf s vom Grade $n-1$, in Bezug auf z vom Grade $m-1$, also

$$G_{\lambda\mu}(s,z) = G_0 + G_1 s + G_2 s^2 + \cdots + G_{n-1} s^{n-1}, \tag{3.}$$

wo $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ ganze rationale Functionen $m-1^{\text{ten}}$ Grades von z sind.

Wir setzen zur Abkürzung [333

$$(4.) \qquad \left[\frac{\partial^q \log \vartheta\left(\sum_1^p \alpha(u_\alpha)\right)}{\partial u_a \partial u_b \partial u_c \dots}\right]_{\xi=\mu} = L_{abc\dots},$$

wo q die Anzahl der u, nach denen differentiirt wird, bedeutet. Differentiirt man nun die Gleichung (3.), indem man die Identität:

$$(5.) \qquad \frac{dE_{\lambda\mu}(s,z)}{dz} = \sum_1^p{}_b \frac{\partial^2 \log \vartheta\left(\sum_1^p \alpha(u_\alpha)\right)}{\partial u_\lambda \partial u_\mu \partial u_b} \frac{du_b}{dz}$$

anwendet, mn mal, und setzt $\xi = \mu$, so bilden diese Gleichungen mit Gl. (3.) (ebenfalls für $\xi = \mu$) zusammen $mn+1$ Gleichungen, aus welchen die mn Constanten der Functionen $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ eliminirt werden können. Das Resultat der Elimination ist eine Gleichung zwischen den Grössen $L_{abc\dots}$, in welchen die Ordnung der Differentiation höchstens gleich $mn+2$, und zwischen den Coefficienten von $\frac{du_a}{dz}$ und ψ_μ und der Grösse μ. Bezeichnen wir diese Gleichung mit

$$(A) = 0.$$

Bildet man die ferneren Ableitungen der Gleichung (3.) bis zur $mn+l^{\text{ten}}$ Ordnung, setzt $\xi = \mu$ und eliminirt aus jeder derselben mit Hülfe von mn der ersten Gleichungen die Constanten in $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$, so mögen die neuentstandenen Gleichungen mit

$$(A') = 0, \quad (A'') = 0, \quad \dots, \quad (A^{(\omega)}) = 0$$

bezeichnet werden. Dieselben werden theilweise identisch erfüllt, theilweise von einander abhängig sein können. Immer aber wird für ein hinlänglich grosses l eine genügende Anzahl von Gleichungen vorhanden sein, um mit Hülfe der Gleichungen, welche zwischen den α und μ bestehen (s. m. A. No. 5), und der Gl. (1.) No. 1 die Grösse μ, die Coefficienten von $F(s,z)$, $\frac{du_a}{dz}$ und von ψ_μ zu eliminiren. Das Resultat ist eine Gleichung zwischen den Grössen $L_{abc\dots}$, in welchen die Ordnung der Differentiation höchstens gleich $mn+l+2$, mit rein numerischen Coefficienten.

Solcher Gleichungen erhält man $\frac{p(p+1)}{2}$, wenn man für λ, μ alle zulässigen Combinationen macht.

334] 8.

Da $\vartheta\left(\sum_1^p a(u_a)\right)$ und jede ihrer Ableitungen gerader Ordnung eine gerade Function der u, jede Ableitung ungerader Ordnung eine ungerade Function derselben Grössen ist, so verschwinden die letzteren, wenn in denselben $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$ gesetzt wird. Daher verschwinden auch die Ableitungen ungerader Ordnung von $\log\vartheta\left(\sum_1^p a(u_a)\right)$ für dieselben Werthe.

Die bekannten Relationen

$$(1.) \qquad 4\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu\mu}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_\mu^2}, \qquad 2\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu\mu'}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_\mu\,\partial u_{\mu'}}$$

lassen sich folgendermassen schreiben:

$$(2.) \qquad \begin{cases} 4\dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial a_{\mu\mu}} = \dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu^2} + \left(\dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial u_\mu}\right)^2, \\ 2\dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial a_{\mu\mu'}} = \dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu\,\partial u_{\mu'}} + \dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial u_\mu}\dfrac{\partial\log\vartheta}{\partial u_{\mu'}}. \end{cases}$$

Für $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$ gehen die Relationen (2.) über in

$$(3.) \qquad \begin{cases} 4\dfrac{\partial\log\vartheta(0,0,\ldots,0)}{\partial a_{\mu\mu}} = \left[\dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu^2}\right]_{u=0}, \\ 2\dfrac{\partial\log\vartheta(0,0,\ldots,0)}{\partial a_{\mu\mu'}} = \left[\dfrac{\partial^2\log\vartheta}{\partial u_\mu\,\partial u_{\mu'}}\right]_{u=0}, \end{cases}$$

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$ unter einander verschieden, so folgt aus der Form der Thetafunction, als Verallgemeinerung von (1.),

$$(4.) \qquad 2^\lambda\frac{\partial^\lambda\vartheta}{\partial a_{\mathfrak{ab}}\,\partial a_{\mathfrak{cb}}\ldots} = \frac{\partial^{2\lambda}\vartheta}{\partial u_\mathfrak{a}\,\partial u_\mathfrak{b}\,\partial u_\mathfrak{c}\,\partial u_\mathfrak{b}\ldots},$$

wo 2λ die Anzahl der u, nach welchen auf der rechten Seite differentiirt wird, bedeutet. Sind irgend welche unter den Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$ einander gleich, so wird der Exponent von 2 auf der linken Seite der Gleichung (4.) um eine leicht bestimmbare Zahl grösser.

Aus dieser Gleichung folgt, dass man die partiellen Ableitungen gerader Ordnung von $\log\vartheta$ für $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$ als rationale Functionen mit numerischen Coefficienten der Ableitungen von $\vartheta(0,0,\ldots,0)$ nach den $a_{\mathfrak{a}}$ oder auch als ganze rationale Functionen der Ableitungen von $\log\vartheta(0,0,\ldots,0)$ nach den $a_{\mathfrak{a}}$ darstellen kann.

Mit Hülfe dieser Relationen führen wir die zwischen den Grössen $L_{abc\ldots}$ in voriger No. gefundenen Beziehungen in Gleichungen zwischen den Ab- [335 leitungen von $\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ nach den Periodicitätsmoduln $a_{\alpha\beta}$ über, wie sie oben angekündigt worden.

Da jedes eigentliche System (α), welches mit μ durch eine Gleichung $\psi_\mu = 0$ verknüpft ist, als Hauptsystem gelten kann, wenn man das Querschnittssystem a, b zweckmässig wählt (s. m. 𝔄. No. 5), so unterliegt das in voriger und dieser No. beschriebene Verfahren nicht der Schwierigkeit, welche mit dem Aussondern des Hauptsystems verbunden ist (s. m. 𝔄. No. 5 und 6). Wählt man vielmehr ein beliebiges eigentliches System (α) als Hauptsystem und bildet mit dem zugehörigen ψ_μ, d. h. demjenigen ψ_μ, durch welches das System (α) mit μ verknüpft ist, die Gleichung (2.) vor. No., so erhält man die oben entwickelten Relationen unter Voraussetzung der entsprechenden Querschnittszerlegung.

Da jedoch die den verschiedenen eigentlichen Systemen (α) zugehörigen ψ_μ sich nur durch die in den Coefficienten derselben auftretenden Grössensysteme (α) unterscheiden, die letzteren aber bei der oben angedeuteten Elimination herausfallen, so folgt: Die gefundenen Relationen bleiben ungeändert für jede beliebige Art der Querschnittszerlegung.

9.

Um für die elliptischen Functionen auf diesem Wege die Rechnung durchzuführen, sei

$$s^2 = R(z), \tag{1.}$$

wo

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

ferner A der Periodicitätsmodul von $\int\frac{dz}{s}$ am Querschnitte a, und es werde gesetzt

$$u = \frac{i\pi}{A}\int_\mu^\xi \frac{dz}{s}, \tag{2.}$$

so hat u am Querschnitte a den Periodicitätsmodul πi, am Querschnitte b heisse er τ. Es bleibt hierbei unentschieden, wie die beiden Querschnitte a und b zu legen sind.

Soll $\vartheta\left(\int_\mu^\xi du - \int_\alpha^\eta du + P\right)$, wo P einen der Werthe

$$\frac{\pi i}{2},\ \frac{\tau}{2},\ \frac{\pi i}{2}+\frac{\tau}{2}$$

336] bedeutet, verschwinden für $\xi = \eta$, wo η ein beliebiger Punkt der Fläche T ist, so ist bekanntlich

$$\int_\mu^\alpha du + P \equiv \frac{\pi i}{2} + \frac{\tau}{2}, \tag{3.}$$

also

$$2\int_\mu^\alpha du \equiv 0. \tag{4.}$$

Die den drei verschiedenen Systemen halber Periodicitätsmoduln P nach Gl. (3.) zugehörigen Werthe α, oder die Functionen ψ_μ, durch welche sie mit μ verknüpft sind, können also, wie aus der Gleichung (4.) folgt, nach dem ABELschen Theorem in diesem Falle folgendermassen gefunden werden:

Es sei (s_μ, μ) das dem Punkte μ zugehörige Werthsystem (s, z), so setzen wir

$$\psi_\mu(s, z) = a_0 + a_1 s + a_2 z^2 + cs \tag{5.}$$

und bestimmen die Constanten a und c durch folgende Bedingungsgleichungen:

$$\psi_\mu(-s_\mu, \mu) = 0, \quad \psi'_\mu(-s_\mu, \mu) = 0, \tag{6.}$$

wo $\psi'_\mu(s, z)$ die totale Ableitung von $\psi_\mu(s, z)$ nach z bedeutet.

Die Bedingungen, dass $\psi_\mu(s, z)$ in α unendlich klein zweiter Ordnung wird, sind, wenn (s_α, α) das dem Punkte α zugehörige Werthsystem (s, z) ist,

$$\psi(s_\alpha, \alpha) = 0, \quad \psi'(s_\alpha, \alpha) = 0. \tag{7.}$$

Die Elimination von a_0, a_1, a_2, c aus den Gleichungen (6.) und (7.) ergiebt für α folgende Gleichung:

$$(\alpha-\mu)[2(s_\mu + s_\alpha) + (\alpha-\mu)(s'_\mu - s'_\alpha)] = 0, \tag{8.}$$

wo s' wieder die Ableitung von s nach z bedeutet. Die Gleichungen (6.) und (7.) ergeben alsdann die Verhältnisse der Coefficienten von $\psi_\mu(s, z)$.

Unter Voraussetzung irgend einer Lage der Querschnitte a und b, sei α diejenige Wurzel der Gleichung (8.), für welche $\vartheta\left(\int_\mu^\xi du\right)$ verschwindet, also

das Hauptsystem des allgemeinen Falles, welches sich hier auf ein Glied reducirt, so ist in diesem Falle

$$E(s, z) = \frac{d^2 \log \vartheta(u)}{du^2} \tag{9.}$$

und

$$G(s, z) = G_0 + G_1 s, \tag{10.}$$

wo G_0 vom zweiten, G_1 vom nullten Grade ist.

Bildet man die Ableitungen der Gleichung (10.) nach z bis zur zehnten [337 Ordnung, und setzt $\xi = \mu$, so kann man aus den ersten 4 der 11 Gleichungen die Coefficienten von G_0 und G_1 bestimmen, diese in die nächstfolgenden substituirt liefern 4 von einander unabhängige Gleichungen, aus welchen man mit Hinzuziehung von Gleichung (8.) k, $\frac{i\pi}{A}$, μ eliminiren kann. Das Eliminationsresultat ist eine Gleichung zwischen L_4, L_6, L_8, L_{10}, wenn man setzt:

$$\left[\frac{d^a \log \vartheta(u)}{du^a}\right]_{a=0} = L_a. \tag{11.}$$

Nach der vorigen No. lassen sich diese Grössen durch die Ableitungen von $\log \vartheta(0)$ nach τ darstellen. Die Differentialgleichung für $\vartheta(0)$, welche man erhält, ist fünfter Ordnung. Sie ergiebt sich aus der JACOBIschen, für $\tau = \log q$, durch zweimalige Differentiation nach τ.

10.

Um die Differentialgleichung herzuleiten, welcher $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function eines der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte genügt, wenden wir den Ausdruck von

$$\frac{\partial \log \vartheta(0, 0, \ldots, 0)}{\partial k}$$

als Function von k an.

Es bedeute nämlich $U_1, U_2, \ldots, U_p$ wie in No. 3 ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung, und $A_a^{(\mu)}$ den Periodicitätsmodul von U_a am Querschnitte a_μ; setzt man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \ldots & A_p^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{(p)} & A_2^{(p)} & \ldots & A_p^{(p)} \end{vmatrix} = \nabla,$$

so ist (s. m. A. No. 8 Gl. (8.) und No. 9 Gl. (4.))

$$(1.) \qquad \frac{\partial \log \vartheta(0,0,\ldots,0)}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \nabla}{\partial k} + R,$$

wo R auf algebraische Weise sowohl explicite von k als auch von den Coefficienten von $\varphi_a(s,z)$ und $F(s,z)$ abhängt.

Nach No. 5 Gleichung (1.) ist:

$$(2.) \qquad \frac{\partial^\lambda A_a^{(\mu)}}{\partial k^\lambda} = \delta_{\lambda 1}^{(a)} T_1^{(\mu)} + \delta_{\lambda 2}^{(a)} T_2^{(\mu)} + \cdots + \delta_{\lambda p}^{(a)} T_p^{(\mu)} + \gamma_{\lambda 1}^{(a)} A_1^{(\mu)} + \gamma_{\lambda 2}^{(a)} A_2^{(\mu)} + \cdots + \gamma_{\lambda p}^{(a)} A_p^{(\mu)},$$

wo $T_a^{(\mu)}$ den Periodicitätsmodul von t_a am Querschnitte a_μ bedeutet, und γ, δ sich rational aus den Coefficienten von $\varphi_a(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k, und aus (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammensetzen lassen.

338] Differentiiren wir die Gleichung (1.) $2p^2$mal nach k, und setzen für die Ableitungen von $A_a^{(\mu)}$ ihre Werthe aus (2.), so kann man aus den entstandenen $2p^2+1$ Gleichungen die $2p^2$ Grössen $A_a^{(\mu)}$, $T_a^{(\mu)}$ eliminiren. Das Resultat der Elimination ist eine algebraische Gleichung zwischen den Ableitungen von $\vartheta(0,0,\ldots,0)$ als Function von k, deren Coefficienten algebraisch aus den Coefficienten von $\varphi_a(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k, und aus (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammengesetzt sind.

Differentiirt man diese Gleichung $p$mal, so kann man aus den entstandenen $p+1$ Gleichungen, unter Zuhülfenahme der Gleichungen $F(\sigma_\nu, \zeta_\nu) = 0$, die p Grössenpaare (σ_ν, ζ_ν) eliminiren, und erhält schliesslich als die gesuchte Verallgemeinerung der Differentialgleichung (3.) in No. 6 eine Differentialgleichung

$$(3.) \qquad M_k = 0,$$

deren Coefficienten sich algebraisch aus den Coefficienten von $\varphi_a(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k und aus (σ, k) zusammensetzen.

11.

Unter Voraussetzung der in No. 3—5 entwickelten Formeln und der Differentialgleichung (3.) vor. No. lassen sich die in No. 7 u. 8 behandelten Relationen zwischen den Ableitungen von $\log\vartheta(0,0,\ldots,0)$ nach den Periodicitätsmoduln a_{ik} auch auf folgende Weise herleiten.

Bekanntlich ist

$$(1.) \qquad u_a = \frac{i\pi}{\nabla}\sum_1^p{}_b \frac{\partial \nabla}{\partial A_b^{(a)}} U_b, \qquad (a = 1, 2, \ldots, p)$$

ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung von der Beschaffenheit, wie es in No. 7 gefordert wird.

Es werde vorausgesetzt, dass die Coefficienten von $\varphi_a(^{n-s}s, ^{m-s}z)$, als Functionen eines jeden der sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte algebraischen Differentialgleichungen genügen, also beispielsweise, wie die Coefficienten von $F(s,z)$, algebraische Functionen von k sind. Da die Grössen $A_a^{(\mu)}$ nach No. 5 linearen Differentialgleichungen genügen, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten von $\varphi_a(s,z)$, $F(s,z)$ und deren Ableitungen nach k vorstellen, so sind auch die Coefficienten von $\frac{du_a}{ds}$ Functionen von k, welche algebraischen Differentialgleichungen genügen. — Unter derselben Voraussetzung ergiebt sich, dass die Coefficienten der Gleichung (3.) vor. No. als Functionen von k algebraischen Differentialgleichungen genügen.

Nun ist nach No. 5 Gl. (1.): [339

$$(2.)\quad \frac{\partial^\lambda a_{a\mu}}{\partial k^\lambda} = \delta_{\lambda 1}^{(a)} T_1^{(\mu)} + \delta_{\lambda 2}^{(a)} T_2^{(\mu)} + \cdots + \delta_{\lambda p}^{(a)} T_p^{(\mu)} + \gamma_{\lambda 1}^{(a)} a_{1\mu} + \gamma_{\lambda 2}^{(a)} a_{2\mu} + \cdots + \gamma_{\lambda p}^{(a)} a_{p\mu},$$

wo die Grössen γ, δ sich nach No. 4 rational aus den Coefficienten der Functionen $F(s,z)$, $\frac{du_a}{dz}$ und ihrer Ableitungen nach k, und aus den Grössen (σ, k) und den (σ_ν, ζ_ν) zusammensetzen.

Es ist aber:

$$(3.)\qquad \frac{\partial \log \vartheta(0,0,\ldots,0)}{\partial k} = \sum_{ab} \frac{\partial \log \vartheta(0,0,\ldots,0)}{\partial a_{ab}} \frac{\partial a_{ab}}{\partial k}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung bis zur l^{ten} Ordnung nach k, indem wir stets $\vartheta(0,0,\ldots,0)$ als Function der $a_{\mu\nu}$ und diese wieder als Functionen von k behandeln, und setzen in jeder dieser Gleichungen für die Ableitungen von $a_{\mu\nu}$ nach k deren Werthe aus Gl. (2.), so können wir l so gross wählen, dass wir aus den entstehenden $l+1$ Gleichungen, unter Zuhülfenahme der successiven Ableitungen der Gleichung (3.) vor. No. die Grössen (σ, k), (σ_ν, ζ_ν), $T_a^{(\mu)}$, $a_{\mu\nu}$ und die Ableitungen von $\vartheta(0,0,\ldots,0)$ nach k eliminiren können. Die Coefficienten der resultirenden Gleichung zwischen den Ableitungen von $\vartheta(0,0,\ldots,0)$ nach den $a_{\mu\nu}$

$$(4.)\qquad (\Lambda_k) = 0$$

hängen auf algebraische Weise ab von den Coefficienten von $F(s,z)$, $\frac{du_a}{ds}$ und

ihren Ableitungen nach k, ferner von den Coefficienten der Gl. (3.) vor. No. und ihren Ableitungen nach k. Mit Hülfe der successiven Ableitungen der einzelnen algebraischen Differentialgleichungen, welchen diese verschiedenen Grössen genügen, lassen sie sich alle aus der Gl. (4.) und deren Ableitungen eliminiren, und man erhält eine Gleichung

$$(5.) \qquad (\Lambda_k') = 0,$$

welche eine Relation zwischen den Ableitungen von $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ nach den $a_{\mu\nu}$ ausdrückt, mit rein numerischen Coefficienten.

Den verschiedenen sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkten k entsprechend ergiebt sich eine gewisse Anzahl von Relationen dieser Art.

Greifswald im März 1871.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 348, letzte Zeile $\chi_\lambda(s, z)$ statt $\chi(s, z)$,

„ 349, Zeile 2 v. o. und 13 v. u. $\varphi_\nu(s, z)$ statt $\varphi_\lambda(s, z)$,

„ 352, „ 4 v. u. $G_{\lambda\mu}(s, z)$ statt $G_\mu(s, z)$.

2) Auf den Gegenstand der vorstehenden Abhandlung ist der Verfasser später (Zur Theorie der ABELschen Functionen, Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften, 1897, S. 608—621) zurückgekommen. SCH.

XIV.

ÜBER DIE DARSTELLUNG DER FUNCTIONEN COMPLEXER VARIABLEN, INSBESONDERE DER INTEGRALE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 75, 1873, S. 177—223.)

Um eine mehrdeutige Function $f(z)$ einer complexen Variablen von [177 einem Punkte A der z-Ebene längs einer vorgeschriebenen Curve L bis zu einem anderen Punkte B der Ebene fortzusetzen, wird bekanntlich die Curve L in solche Abschnitte zerlegt, dass jeder einzelne einem Gebiete angehört, innerhalb dessen $f(z)$ eindeutig und stetig ist. Die innerhalb dieser Einzelgebiete gültigen Entwickelungen dienen alsdann dazu, den Werth der Function von Abschnitt zu Abschnitt, und demnach auch den Endwerth in B zu berechnen. Dieses Verfahren leidet ausser an der grossen Beschwerlichkeit in der praktischen Durchführung an dem wesentlichen theoretischen Mangel, dass dasselbe nicht a priori den Zusammenhang zwischen den Werthen der Function am Anfang und am Ende des Weges L erkennen lässt. Selbst wenn es gelingt, für die Function $f(z)$ eine einheitliche analytische Darstellung, welche in der ganzen Ebene gültig ist, zu finden, z. B. eine solche, wie ich sie für die Integrale linearer Differentialgleichungen in den Annali di Matemat. d. d. Brioschi e Cremona, Ser. II, tom. IV, fasc. I[1]) gegeben habe, werden der Natur der Sache nach die einzelnen Glieder der Entwickelung vom Fortsetzungswege abhängig sein, es wird mithin dieselbe Schwierigkeit auf die einzelnen Glieder zurückfallen.

[1]) Abh. X, S. 295 ff. dieses Bandes. Sch.

Die folgende Arbeit hat die hier aufgeworfene Frage zu ihrem Ausgangspunkte genommen. In derselben wird gezeigt, dass man durch algebraische Hülfsmittel die z-Ebene in zwei Gebiete G_1 und G_2 zerlegen kann von folgender Beschaffenheit:

Das eine Gebiet G_2 ist ein endliches, das andere G_1 der übrig bleibende unendlich grosse Theil der Ebene.

Die Grenze zwischen beiden Gebieten ist eine sich selbst nicht schneidende algebraisch bestimmbare Curve, und die sämmtlichen endlichen singulären Punkte der Function befinden sich auf derselben.

178] Innerhalb des Gebietes G_2 ist $f(z)$ eindeutig und stetig, innerhalb G_1 nur für $z = \infty$ nicht eindeutig und stetig. Es werden für jedes dieser Gebiete Reihenentwickelungen der Function gegeben, welche bezüglich innerhalb der ganzen Fläche gültig sind. Die Entwickelung innerhalb G_1 liefert die durch die Umläufe um ∞ von einander verschiedenen Werthe auf ähnliche Weise, wie eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe. — Die Herleitung dieser Entwickelungen setzt nur voraus, dass man einen Zweig einer bestimmten algebraischen Function von z, der innerhalb G_1 eindeutig und stetig ist, für jeden Werth von z innerhalb dieses Gebietes zu berechnen verstehe.

Der Zusammenhang der Functionswerthe des einen und anderen Gebietes ist von dem Verhalten der Function in den Umgebungen der auf der Grenze liegenden singulären Punkte derselben abhängig. Ist derselbe ermittelt, und führt eine Curve L von einem Punkte A des einen Gebietes zu einem Punkte B des anderen Gebietes, so lässt sich, wenn der Ausgangswerth der Function in A bestimmt ist, der Werth derselben in B berechnen, ohne dass man die Zwischenstufen der Werthe längs der Curve durchzumachen hätte.

Der Zusammenhang wird für die Integrale linearer Differentialgleichungen aufgestellt, und somit für diese das gestellte Problem vollständig gelöst.

Erste Abtheilung.

1.

Es sei

$$F(w) = \frac{f(w)}{wg(w)}, \tag{1.}$$

worin $f(w)$ und $g(w)$ ganze rationale Functionen bedeuten, welche für $w = 0$

nicht verschwinden. Ferner seien die beiden complexen Variablen w und w_1 mit einander durch die Gleichung

$$\psi(w, w_1) = \frac{F(w_1) - F(w)}{w_1 - w} = 0 \tag{2.}$$

verbunden.

Dem Werthe $w = 0$ entsprechen von Null verschiedene Wurzeln w_1 der Gleichung (2.). Ist daher K_r eine mit dem Radius r um den Anfang der w beschriebene Kreislinie, so befinden sich die einem Punkte w der Fläche [179 desselben zugehörigen Wurzeln w_1 der Gleichung (2.) sämmtlich ausserhalb K_r, wenn r eine gewisse Grenze nicht überschreitet.

Diese Grenze sei $r = R$, und K die mit R beschriebene Kreislinie. Es befindet sich alsdann der Annahme nach keiner der irgend einem Werthe w des Inneren von K entsprechenden Werthe w_1 ebenfalls innerhalb K. Es ist aber auch keiner dieser Werthe w_1 auf der Peripherie K gelegen. Gesetzt nämlich, es entspräche einem Werthe $w = w^{(0)}$ des Inneren ein Werth $w_1 = w_1^{(0)}$ der Peripherie von K, so würde auch wegen der Symmetrie der Gleichung (2.) in Bezug auf w und w_1, dem Werthe $w = w_1^{(0)}$ der Peripherie ein Werth $w_1 = w^{(0)}$ des Inneren von K entsprechen. Da aber w_1, so lange es endlich ist, sich mit w stetig ändert, so würde alsdann auch einem dem $w = w_1^{(0)}$ hinlänglich nahe im Inneren von K gelegenen Punkte w ein Werth w_1 entsprechen, der in der Nähe von $w_1 = w^{(0)}$ ebenfalls im Inneren von K befindlich wäre. — Aus demselben Grunde ist auch kein Punkt w_1, der einem Punkte w der Peripherie K entspricht, im Inneren gelegen. — Es wird daher auf der Peripherie K einen oder mehrere Werthe w geben, zu denen ebenfalls auf der Peripherie befindliche Werthe w_1 gehören.

Der Kreis K ist demnach der grösste der Kreise K_r, welche die Eigenschaft haben, dass die irgend einem Werthe w des Inneren derselben zugehörigen Werthe w_1 ausserhalb derselben befindlich sind. Sein Radius R ist eine von Null verschiedene Grösse. Wir wollen den Kreis K den zur Function $F(w)$ zugehörigen Grenzkreis nennen.

Innerhalb des Kreises K liegt keine Wurzel der Gleichung

$$F'(w) = 0, \tag{3.}$$

wo $F'(w)$ die Ableitung von $F(w)$ bedeutet. Denn sei w_0 eine Wurzel dieser

Gleichung, so genügt der Gleichung (2.) $w_1 = w = w_0$. Befände sich nun w_0 im Inneren von K, so würden auch Werthen w innerhalb K, die hinlänglich nahe an w_0 liegen, Werthe w_1 ebenfalls innerhalb K in der Nähe von w_0 entsprechen.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$g(w) = 0 \tag{4.}$$

liegen ausserhalb K. Denn da dem Punkte $w = 0$ des Inneren von K ausser $w_1 = \infty$ die Wurzeln der Gleichung $g(w_1) = 0$ zugehören, so befindet sich jede der letzteren aus den oben angegebenen Gründen ausserhalb K.

Hieraus ergiebt sich auch, dass nur, wenn $g(w)$ eine Constante und
180] $f(w)$ eine für $w = 0$ nicht verschwindende ganze rationale Function ersten Grades ist, der Grenzkreis die unendliche Ebene umfasst, in allen übrigen Fällen aber ist R eine endliche Grösse.

2.

Beschreibt der Punkt w einen Kreis K_r, so beschreiben die zugehörigen Wurzeln der Gleichung (2.) vor. Nummer Curvenzweige $\mathfrak{C}'_r, \mathfrak{C}''_r, \ldots$, welche wir als die mit K_r zusammengehörigen Curvenzweige bezeichnen. — Ein Punkt w von K_r und ein Punkt w_1 einer Curve $\mathfrak{C}_r$ sollen entsprechend heissen, wenn w_1 mit w durch die Gleichung (2.) vor. Nummer verbunden ist.

Die mit einer vom Grenzkreise K eingeschlossenen Kreislinie K_r zusammengehörigen Curvenzweige haben nach der vor. Nummer weder mit dem Inneren noch mit der Peripherie von K einen Punkt gemeinschaftlich. Die mit K zusammengehörigen Curvenzweige dagegen haben mit der Peripherie von K einen oder mehrere Punkte gemeinschaftlich, treten aber nirgendwo in das Innere desselben ein. Die letzteren Curven seien $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$, und es habe $\mathfrak{C}'$ mit K den Punkt w' gemeinschaftlich. Es können alsdann zwei Fälle eintreten:

Entweder ist w' als Punkt von $\mathfrak{C}'$ dem w' als Punkt von K entsprechend. Es wird alsdann die Gleichung (2.) in vor. Nummer durch $w_1 = w = w'$ befriedigt, d. h. es ist w' eine Wurzel der Gleichung (3.) vor. Nummer.

Oder es ist w' als Punkt von $\mathfrak{C}'$ einem anderen Punkte $w = w''$ von K entsprechend. Es erlangt alsdann, wenn nicht die Curve $\mathfrak{C}'$ längs einer w' enthaltenden endlichen Strecke auf K fällt, der Modul von w_1 längs der

Curve $\mathfrak{C}'$ für den Werth $w = w''$ den Minimalwerth R. Es ist also unter allen Umständen, wenn man

$$w = re^{\varphi i}, \quad w_1 = r_1 e^{\varphi_1 i}$$

setzt, $\frac{dr_1}{d\varphi}$ für $w = w''$, $w_1 = w'$ Null oder unendlich.

Nun folgt aus Gleichung (2.) vor. Nummer

$$(1.) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial w}[e^{\varphi i}dr + wi\,d\varphi] + \frac{\partial\psi}{\partial w_1}[e^{\varphi_1 i}dr_1 + w_1 i\,d\varphi_1] = 0.$$

Bewegt sich w auf der Peripherie K, w_1 auf $\mathfrak{C}'$, so ist $dr = 0$, also

$$(2.) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial w}wi + \frac{\partial\psi}{\partial w_1}\left[e^{\varphi_1 i}\frac{dr_1}{d\varphi} + w_1 i\frac{d\varphi_1}{d\varphi}\right] = 0.$$

Bezeichnen wir den Werth von [181

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial w}w}{\frac{\partial\psi}{\partial w_1}w_1} \quad \text{für} \quad w = w'', \quad w_1 = w'$$

mit $A + Bi$, so folgt aus Gleichung (2.)

$$(3.) \qquad \frac{dr_1}{d\varphi} = RB, \qquad \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = -A \quad \text{für} \quad w = w'', \quad w_1 = w'.$$

Da R weder Null noch unendlich ist, so folgt also

$$B = 0 \quad \text{oder} \quad B = \infty.$$

Es sei 1) $B = \infty$, so ist, da $\frac{\partial\psi}{\partial w}$ für $w = w''$, $w_1 = w'$ nach No. 1 endlich ist, $\frac{\partial\psi}{\partial w_1}$ für dieselben Werthe Null, d. h.

$$\frac{F'(w')}{w' - w''} - \frac{F(w') - F(w'')}{(w' - w'')^2} = 0,$$

d. h. da w' und w'' von einander verschieden angenommen wurden, und nach Gleichung (2.) vor. Nummer,

$$F'(w') = 0.$$

Es wäre demnach w' eine Wurzel der Gleichung (3.) vor. Nummer.

Es sei 2) $B = 0$.

Die Durchschnittspunkte eines Kreises K_r mit den mit K_r zusammengehörigen Curvenzweigen ergeben sich aus der Gleichung (2.) vor. Nummer,

wenn man in derselben $w = re^{\varphi i}$ und $w_1 = re^{\varphi_1 i}$ setzt. Die Sonderung des reellen und imaginären Theiles liefert alsdann zwei Gleichungen zur Bestimmung der Werthepaare φ und φ_1 als Functionen von r, welche Durchschnittspunkten entsprechen, derart, dass der Durchschnittspunkt $re^{\varphi_1 i}$ der Kreislinie K_r und der mit ihr zusammengehörigen Curve $\mathfrak{C}_r$ dem Punkte $re^{\varphi i}$ des Kreises K_r entspricht.

Die Durchschnittspunkte sind imaginär für alle Kreise innerhalb K; es ist wenigstens einer reell für K selber. Für diesen Punkt sei

$$w = w'' = Re^{\varphi'' i}, \quad w_1 = w' = Re^{\varphi' i}.$$

Ist für diese Werthe $\frac{\partial \psi}{\partial w_1}$ nicht Null, d. h. w' nicht Wurzel der Gleichung (3.) vor. Nummer, so entsprechen den Werthen w innerhalb einer hinlänglich kleinen den Punkt w'' umgebenden geschlossenen Curve Werthe von w_1 eben-
182] falls innerhalb einer den Punkt w' umgebenden geschlossenen Curve, und zwar die innerhalb K fallenden Werthe w_1 den ausserhalb K fallenden Werthen w. Daher werden die Kreise K_r für Werthe von $r > R$ bis zu einer gewissen Grenze von einer der mit ihnen zusammengehörigen Curven geschnitten. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, dass die mit K zusammengehörigen Curven, welche K treffen, in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fallen. In diesem Falle können die Durchschnittspunkte für $r > R$ wenigstens bis zu einer gewissen Grenze ebenfalls imaginär sein.

Für die Grössen φ und φ_1 als Functionen von r ergiebt sich aus Gleichung (1.)

$$\frac{\partial \psi}{\partial w}\left[e^{\varphi i} + wi\frac{d\varphi}{dr}\right] + \frac{\partial \psi}{\partial w_1}\left[e^{\varphi_1 i} + w_1 i\frac{d\varphi_1}{dr}\right] = 0. \tag{4.}$$

Der Annahme nach ist $\frac{\partial \psi}{\partial w_1}$ für $w = w''$, $w_1 = w'$ nicht Null. Es ergiebt sich also aus Gleichung (4.) für $w = w''$, $w_1 = w'$:

$$A\left[\frac{1}{R} + i\frac{d\varphi}{dr}\right] + \frac{1}{R} + i\frac{d\varphi_1}{dr} = 0. \tag{5.}$$

Wenn nun nicht die mit K zusammengehörigen und K treffenden Curvenzweige in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fallen, so sind nach dem Obigen φ und φ_1 für $r \geqq R$ bis zu einer gewissen Grenze reelle Functionen von r.

Es folgt alsdann aus Gleichung (5.)

$$(A+1)\frac{1}{R} = 0,$$

oder da R endlich und von Null verschieden:

(6.) $$A = -1.$$

Die Gleichung (1.) giebt alsdann für $w = w''$, $w_1 = w$

(7.) $$\frac{dr_1}{R} + i d\varphi_1 = \frac{dr}{R} + i d\varphi,$$

woraus sich ergiebt:

(8.) $$dr_1 = dr, \quad d\varphi_1 = d\varphi.$$

Ist aber w dem w'' in beliebiger Richtung unendlich benachbart und innerhalb K gelegen, also dr negativ, so muss den obigen Eigenschaften des Grenzkreises K zu Folge das zugehörige w_1 ausserhalb K unendlich nahe an w' liegen, also dr_1 positiv sein, was der ersten Gleichung (8.) widerspricht.

Demnach muss für $w = w''$, $w_1 = w'$, $\frac{\partial\psi}{\partial w_1}$ verschwinden, oder $w' = w''$ sein.

Wir gelangen also in beiden Fällen zu dem Resultat: [183

Wenn die mit K zusammengehörigen und K treffenden Curven nicht in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fallen, so sind die Durchschnittspunkte derselben mit K Wurzeln der Gleichung (3.) vor. Nummer.

3.

Der Fall, dass die mit dem Grenzkreise zusammengehörigen und denselben treffenden Curven in ihrer ganzen Ausdehnung auf ihn fallen, tritt z. B. ein, wenn

(1.) $$\begin{cases} f(w) = A_0 + A_1 w + A_2 w^2, \\ g(w) = 1. \end{cases}$$

Die Gleichung (2.) No. 1 wird:

(2.) $$A_0 - A_2 w w_1 = 0.$$

Mit einem Kreise K_r gehört eine einzige Curve zusammen, nämlich ein Kreis $K_{r'}$, dessen Radius

(3.) $$r' = \frac{1}{r} \bmod \frac{A_0}{A_2}.$$

Da beide Kreise concentrisch sind, so können sie sich nur treffen, wenn sie zusammenfallen, wenn also

$$r' = r = \sqrt{\operatorname{mod}\frac{A_0}{A_2}} = R. \tag{4.}$$

Der Kreis mit dem durch diese Gleichung bestimmten Radius ist der Grenzkreis für dieses Beispiel.

Die Gleichung (3.) No. 1 wird:

$$A_0 - A_2 w^2 = 0. \tag{5.}$$

Man sieht, dass die Wurzeln dieser Gleichung sich auf der Peripherie des Grenzkreises befinden.

Wir wollen zeigen, dass allgemein, wenn die mit dem Grenzkreise zusammengehörigen und ihn treffenden Curven in ihrer ganzen Ausdehnung auf denselben fallen, auf der Peripherie desselben sich Wurzeln der Gleichung (3.) No. 1 befinden.

Es folgt nämlich für die correspondirenden Punkte der Peripherie K und einer mit K zusammengehörigen und auf sie fallenden Curve, da gleichzeitig $dr = 0$, $dr_1 = 0$, aus Gleichung (1.) vor. Nummer

$$\frac{\partial\psi}{\partial w} w\, d\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial w_1} w_1 d\varphi_1 = 0. \tag{6.}$$

184] Hieraus ergiebt sich, dass für solche correspondirenden Punkte

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial w} w}{\frac{\partial\psi}{\partial w_1} w_1} = A$$

reell ist. Es geht daher für solche correspondirenden Punkte die Gleichung (1.) vor. Nummer über in:

$$A\left(\frac{dr}{R} + i\,d\varphi\right) + \frac{dr_1}{R} + i\,d\varphi_1 = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$dr_1 = -A\,dr, \quad d\varphi_1 = -A\,d\varphi. \tag{7.}$$

Bezeichnen wir wieder mit $w = w''$, $w_1 = w'$ zwei solche correspondirenden Punkte, so entspricht den Eigenschaften des Grenzkreises zu Folge einem dem w'' unendlich benachbarten im Inneren von K befindlichen Werth w ein

dem w' unendlich benachbarter ausserhalb K befindlicher Werth w_1, d. h. einem negativen dr ein positives dr_1. Die erste Gleichung (7.) ergiebt daher, dass A positiv ist. Bewegt sich nun der Punkt w, um die Peripherie K zu erzeugen, so bewegt sich gleichzeitig w_1, um die correspondirenden Punkte der mit K zusammengehörigen Curve zu erzeugen. Aus der zweiten Gleichung (7.) ergiebt sich, dass sich die beiden auf der Peripherie K bewegenden Punkte w und w_1 in entgegengesetzter Richtung bewegen, und da w jedenfalls einen vollständigen Umlauf vollzieht, so folgt, dass sie sich begegnen müssen, also zwei correspondirende Punkte zusammenfallen. Für solche aber geht die Gleichung (2.) No. 1 über in

$$F'(w) = 0.$$

Da innerhalb des Grenzkreises keine Wurzel der Gleichung (3.) No. 1 befindlich ist, so ergiebt sich als Resultat der Untersuchung dieser drei Nummern der Satz:

Der Radius des Grenzkreises ist der Modul derjenigen Wurzel der Gleichung

(A.) $$F'(w) = 0,$$

welche unter allen Wurzeln derselben den kleinsten Modul hat.

4.

Es werde die complexe Grösse z mit der complexen Grösse w durch die Gleichung

(1.) $$z = F(w)$$

verbunden, wo $F(w)$ dieselbe Bedeutung hat wie in No. 1.

Jedem Kreise K_r in der w Ebene entspricht eine geschlossene Curve [185 C_r in der z Ebene; dem Grenzkreise K entspreche die geschlossene Curve C, welche Grenzcurve heissen möge.

Die den Kreisen K_r innerhalb K entsprechenden Curven C_r schneiden sich weder selbst noch unter einander. Denn von den einem solchen Schnittpunkte z zugehörigen Wurzeln w der Gleichung (1.) müssten mindestens zwei verschiedene sich innerhalb des Grenzkreises K befinden. Dieselben seien w und w_1, so würden sie die Gleichung:

(2.) $$\frac{F(w) - F(w_1)}{w - w_1} = 0$$

befriedigen. Dieses ist aber der Definition des Grenzkreises zu Folge nicht möglich.

Eliminirt man z zwischen der Gleichung

$$\frac{d[g(w)w]}{dw}z - \frac{df(w)}{dw} = 0 \tag{3.}$$

und der Gleichung (1.), so erhält man die Gleichung

$$F'(w) = 0. \tag{4.}$$

Die den Wurzeln dieser Gleichung entsprechenden Werthe von z sind also die Verzweigungspunkte der algebraischen Function w von z, Gleichung (1.).

Zwei Curven C_r und C_s, welche zwei unendlich benachbarten Kreisen innerhalb K entsprechen, liegen so, dass diejenigen Punkte, welche zwei unendlich benachbarten Punkten der beiden Kreise entsprechen, selber unendlich benachbart sind, dass also die eine Curve von der anderen ganz umschlossen wird.

Da nun C_r für unendlich kleine r ganz im Unendlichen, für endliche, von Null verschiedene, hinlänglich kleine r ganz im Endlichen sich befindet, so folgt, dass von zwei Curven C_r, die zu verschiedenen Kreisen innerhalb K gehören, diejenige die andere umgiebt, welche dem kleineren Kreise entspricht, und dass die Curve C_0 sich nach allen Richtungen ins Unendliche erstreckt.

Es sei F die von der Grenzcurve C in der z Ebene eingeschlossene Fläche, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass, wenn r von Null bis R wächst, die Ebene z sich mit einer Schaar geschlossener, continuirlich aneinander liegender und sich umschliessender Curven C_r erfüllt, welche die ganze Ebene mit Ausschluss der Fläche F einfach bedecken. Diese von ihnen bedeckte Fläche heisse F'.

186] Es entspricht alsdann jedem Punkte der vom Grenzkreise eingeschlossenen Fläche in der w-Ebene nur ein Punkt der Fläche F' in der z-Ebene, und umgekehrt, oder beide Flächen sind Abbildungen von einander.

5.

Es seien in der z-Ebene die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ gegeben, so kann man die ganze rationale Function m^{ten} Grades $\varphi(w)$ so bestimmen, dass die Function

$$z = \frac{\varphi(w)}{w} \tag{1.}$$

für die willkürlichen Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ in der w-Ebene resp. die Werthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m+1}$ liefert. In der That sei

$$f(w) = (w-\alpha_1)(w-\alpha_2)\ldots(w-\alpha_{m+1}),$$

$$f_i(w) = \frac{f(w)}{w-\alpha_i},$$

so ist

$$\varphi(w) = \sum_1^{m+1} \frac{\alpha_i \varepsilon_i}{f'(\alpha_i)} f_i(w), \tag{2.}$$

wo $f'(w)$ die Ableitung von $f(w)$ bedeutet, die gesuchte Function.

Allgemeiner ist die Function:

$$\varepsilon = \frac{\varphi(w) + \psi(w) f(w)}{w}, \tag{3.}$$

für eine beliebige rationale Function $\psi(w)$ von w, die für keinen der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ unendlich wird, von derselben Eigenschaft.

Der Radius des Grenzkreises der Function (3.) ist nach No. 3 der kleinste Modul der Wurzeln der Gleichung:

$$w\varphi'(w) - \varphi(w) + w[\psi(w) f'(w) + f(w)\psi'(w)] - \psi(w) f(w) = 0, \tag{4.}$$

wo die Ableitungen durch obere Accente angedeutet sind.

Es seien insbesondere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ die $m+1$ Wurzeln der Gleichung:

$$w^{m+1} - 1 = 0, \tag{5.}$$

so geht die Gleichung (4.) über in:

$$w\varphi'(w) - \varphi(w) + \psi(w)[mw^{m+1} + 1] + w\psi'(w)(w^{m+1} - 1) = 0. \tag{6.}$$

Ist der Radius des Grenzkreises der Function (1.) grösser als Eins, oder was dasselbe ist, sind die Moduln der Wurzeln der Gleichung:

$$w\varphi'(w) - \varphi(w) = 0 \tag{7.}$$

sämmtlich grösser als Eins, so wählen wir $\psi(w) = 0$. Ist dagegen der [187 Modul von mindestens einer der Wurzeln der Gleichung (7.) kleiner oder gleich Eins, so wählen wir $\psi(w)$ so, dass die Moduln der Wurzeln der Gleichung (6.) sämmtlich grösser als Eins werden. Den Nachweis der Möglichkeit einer solchen Wahl und die wirkliche Herstellung einer der gemachten Anforderung genügenden Function $\psi(w)$ wollen wir im Folgenden geben.

. 6.

Wir wählen:

$$\psi(w) = \frac{a}{w^{m+1}-\beta}, \tag{1.}$$

wo a und β Constanten, und zwar letztere von Eins verschieden. Setzen wir zur Abkürzung

$$w\varphi'(w) - \varphi(w) = G(w), \tag{2.}$$

so geht die Gleichung (6.) vor. Nummer über in:

$$G(w) - \frac{a[w^{2(m+1)} - (m+2-m\beta)w^{m+1} + \beta]}{(w^{m+1}-\beta)^2} = 0. \tag{3.}$$

Zunächst wollen wir β so bestimmen, dass die Function:

$$H(w) = \frac{w^{2(m+1)} - (m+2-m\beta)w^{m+1} + \beta}{(w^{m+1}-\beta)^2} \tag{4.}$$

innerhalb des mit dem Radius Eins um den Anfang der w beschriebenen Kreises E und auf der Peripherie weder Null noch unendlich wird. Ist dieses erreicht, so sei M der Minimalwerth des Moduls von $H(w)$ innerhalb und auf der Peripherie von E, N der Maximalwerth des Moduls von $G(w)$ innerhalb desselben Kreises und auf dessen Peripherie, so darf man a nur so wählen, dass

$$M \bmod a > N, \tag{5.}$$

um zu erreichen, dass die Wurzeln der Gleichung (3.) oder

$$G(w) - aH(w) = 0 \tag{6.}$$

sämmtlich ausserhalb E befindlich sind.

Es ist nun erstlich ersichtlich, dass

$$\bmod \beta > 1$$

sein muss. Setzt man nämlich den Zähler von $H(w)$ gleich Null, so ist $\bmod \beta$ das Product der Moduln der Wurzeln der gebildeten Gleichung, welche sämmtlich grösser als Eins sein sollen.

[388] Wählt man $\bmod \beta > 1$, so wird $H(w)$ innerhalb E und auf der Peripherie von E nicht unendlich. Wie β näher zu bestimmen ist, damit $H(w)$ auch innerhalb derselben Grenzen nicht verschwinde, soll nunmehr gezeigt werden.

7.

Aus der Abhandlung des Herrn HERMITE (Extrait d'une lettre à M. BORCHARDT, dieses Journal, Bd. 52, p. 45) ergiebt sich nämlich leicht folgender Satz:

Es sei gegeben die Gleichung:

$$F(z) = 0, \tag{1.}$$

wo $F(z)$ eine ganze rationale Function mit beliebig complexen Coefficienten. Substituiren wir

$$z = \varrho \frac{iu-1}{iu+1}, \tag{2.}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ und ϱ reell und positiv, und bezeichnen die dadurch entstandene Gleichung mit:

$$R(u) = 0, \tag{3.}$$

so ist die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung, in denen der Coefficient von i positiv oder negativ ist, respective gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung (1.), die ausserhalb oder innerhalb der mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt der z beschriebenen Kreisfläche liegen.

In der That folgt aus Gleichung (2.)

$$u = i\frac{z+\varrho}{z-\varrho} = \frac{2\varrho y}{(x-\varrho)^2+y^2} + i\frac{(x^2+y^2-\varrho^2)}{(x-\varrho)^2+y^2}, \tag{4.}$$

wenn man

$$z = x+yi$$

setzt. Da der Punkt z sich ausserhalb oder innerhalb des mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreises befindet, je nachdem

$$x^2+y^2-\varrho^2 \gtrless 0,$$

so ist der Satz bewiesen.

Um die Anzahl der Wurzeln der Gleichung (3.) mit positiven und negativen Coefficienten von i zu finden, bedienen wir uns eines Satzes, welchen Herr HERMITE in derselben Abhandlung (p. 44) gegeben. Danach ist eine [189 quadratische Form $\mathfrak{F}$ zu bilden, welche in eine Summe von Quadraten linearer Functionen ihrer Variablen mit reellen Coefficienten zu verwandeln ist. Es ist alsdann die Anzahl der positiven und negativen Quadrate resp. gleich der

Anzahl der Wurzeln der Gleichung (3.) mit positiven und negativen Coefficienten von i*).

Für unseren Zweck sei die Gleichung (1.) eine quadratische:

$$F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 = 0 \tag{5.}$$

und $\varrho = 1$, so verwandelt die Substitution

$$z = \frac{iu - 1}{iu + 1} \tag{6.}$$

dieselbe in:

$$-(A_0 + A_1 + A_2)u^2 + 2i(A_0 - A_2)u + A_0 - A_1 + A_2 = 0. \tag{7.}$$

Setzt man

$$\left\{\begin{array}{l} a + a'i = -(A_0 + A_1 + A_2), \\ b + b'i = 2i(A_0 - A_2), \\ c + c'i = A_0 - A_1 + A_2, \end{array}\right. \tag{8.}$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F} = (a'b - ab')z_1^2 + 2(a'c - ac')z_1 z_0 + (b'c - bc')z_0^2 \text{**}). \tag{9.}$$

Verwandelt man diese quadratische Form in eine Summe von zwei Quadraten, so befinden sich innerhalb des Kreises mit dem Radius Eins eine, zwei, oder keine Wurzel der Gleichung (5.), je nachdem eines der Quadrate, beide, oder keines das negative Vorzeichen hat.

190] 8.

Die Gleichung, welche man erhält, wenn man den Zähler der Function $H(w)$ (No. 6 Gleichung (4.)) gleich Null setzt, lautet:

---

*) Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass, wenn man bloss wissen will, ob überhaupt innerhalb des Kreises mit dem Radius ϱ eine Wurzel der Gleichung (1.) enthalten ist, oder was dasselbe besagt, ob überhaupt der Coefficient von i in einer Wurzel der Gleichung (3.) negativ ist, diese Frage häufig schon durch folgenden Satz entschieden werden kann:

Ist der Coefficient irgend eines der Quadrate der Form $\mathfrak{F}$ negativ, so befinden sich Wurzeln der Gleichung (1.) innerhalb des mit ϱ beschriebenen Kreises.

In der That bleibt bekanntlich die Anzahl der positiven und negativen Vorzeichen in der in eine Summe von Quadraten transformirten Form $\mathfrak{F}$ für jede Transformation dieselbe. Man kann aber immer eine solche Transformation vornehmen, bei welcher das Quadrat mit dem negativen Vorzeichen beibehalten wird (vergl. SERRET, Cours d'algèbre sup. t. I, p. 426).

**) In der HERMITEschen Abhandlung (S. 44) sind irrthümlicherweise die Coefficienten der Form (9.) des Textes mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen.

$$\beta-(m+2-m\beta)v+v^2=0, \tag{1.}$$

wo

$$v=w^{m+1} \tag{2.}$$

gesetzt ist. Diese Gleichung, verglichen mit Gleichung (5.) vor. Nummer giebt statt Gleichung (7.) vor. Nummer:

$$(m+1)(1-\beta)u^2+2i(\beta-1)u+m+3-(m-1)\beta=0. \tag{3.}$$

Es sei demnach β reell, so ist

$$\left\{\begin{array}{ll} a=(m+1)(1-\beta), & a'=0, \\ b=0, & b'=2(\beta-1), \\ c=m+3-(m-1)\beta, & c'=0. \end{array}\right. \tag{4.}$$

Es ist alsdann

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}=2(m+1)(1-\beta)^2\varepsilon_1^2+2(\beta-1)[m+3-(m-1)\beta]\varepsilon_0^2, \tag{5.}$$

eine Form, die nur Quadrate enthält.

Die Gleichung (1.) hat keine Wurzel v innerhalb des Kreises mit dem Radius Eins, oder was dasselbe ist, die Gleichung

$$H(w)=0 \tag{6.}$$

hat keine Wurzel w innerhalb des Kreises E, wenn

$$2(\beta-1)[m+3-(m-1)\beta]>0,$$

oder, da nach No. 6 der absolute Werth von β grösser als Eins sein muss,

$$1<\beta<\frac{m+3}{m-1}. \tag{7.}$$

Wir wählen

$$\beta=\frac{m+1}{m-1}. \tag{8.}$$

Die Function $\psi(w)$ in No. 6 lautet alsdann

$$\psi(w)=\frac{a(m-1)}{(m-1)w^{m+1}-(m+1)} \tag{9.}$$

und die Function $H(w)$ wird:

$$H(w)=\frac{(m-1)[(m-1)w^{2(m+1)}+2w^{m+1}+m+1]}{[(m-1)w^{m+1}+(m+1)]^2}. \tag{10.}$$

191] In der That folgt aus der Gleichung:

$$(11.) \qquad (m-1)w^{2(m+1)} + 2w^{m+1} + m + 1 = 0$$

$$w^{m+1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{m^2-2}}{m-1}.$$

Da der Modul dieses Ausdruckes

$$\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} > 1,$$

so hat die Gleichung (11.) keine innerhalb E oder auf der Peripherie E befindliche Wurzel.

9.

Der Minimalwerth M des Moduls der Function $H(w)$ innerhalb des Kreises E ergiebt sich

$$(1.) \qquad M = \frac{\sqrt{(m-1)(m^5+m^4+m^3-3m^2-6m+2)}}{m^4+2m^3+4m^2+2m-1}.$$

Wählt man daher a so, dass

$$(2.) \qquad M \bmod a > N,$$

so ist der Radius des Grenzkreises, der zur Function:

$$(3.) \qquad \varepsilon = \frac{\varphi(w)}{w} + \frac{a(m-1)(w^{m+1}-1)}{[(m-1)w^{m+1}-(m+1)]w}$$

gehört, grösser als Eins.

Es ist zu bemerken, dass es nicht erforderlich ist, den Maximalwerth N des Moduls von $G(w)$ innerhalb E wirklich aufzusuchen. Es lässt sich vielmehr jedesmal unmittelbar eine positive Zahl N' angeben, unterhalb welcher sich N befinden muss, und die Ungleichung (2.) ist a potiori befriedigt, wenn

$$(2a.) \qquad M \bmod a \geqq N'.$$

Das Quadrat einer solchen Zahl N' wird erhalten, wenn man in $G(w)$ für w setzt $re^{\varphi i}$, alsdann $G(w)$ mit dem conjugirten Werthe multiplicirt, endlich in dem so erhaltenen Quadrate des Moduls von $G(w)$ die negativen Vorzeichen in positive verwandelt und an die Stelle von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, r die Einheit setzt.

Ebenso kann man in die Ungleichung (2.) statt M jede kleinere positive Zahl M' setzen; z. B. für $m \geqq 2$

$$(4.) \qquad M' = \frac{(3m-1)\sqrt{m-1}}{9m^4} \quad \text{oder auch} \quad M' = \frac{3m-1}{9m^4}.$$

10. [192

Es sei wie in No. 5

$$f(w) = w^{m+1} - 1$$

und

$$\varphi(w) = \sum_1^{m+1} \frac{\alpha_i z_i}{f'(\alpha_i)} f_i(w).$$

Wenn die Gleichung

(1.) $$w\varphi'(w) - \varphi(w) = 0$$

innerhalb E befindliche Wurzeln hat, so ist es häufig möglich, durch eine Permutation der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ in dem Ausdrucke für $\varphi(w)$, welche einer veränderten Zuordnung dieser Grössen zu den auf der Peripherie von E liegenden Einheitswurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ gleichkommt, zu bewirken, dass für die veränderte Function $\varphi_1(w)$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung:

(1a.) $$w\varphi_1'(w) - \varphi_1(w) = 0$$

ausserhalb E liegen. Wir werden in No. 12 ein solches Beispiel kennen lernen.

In solchen Fällen reicht die Substitution:

(2.) $$s = \frac{\varphi_1(w)}{w}$$

aus, um einen Grenzkreis zu erzielen, dessen Peripherie E umgiebt.

Wenn aber für jede Permutation der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ einige oder mehrere Wurzeln der Gleichung (1.) innerhalb E befindlich sind, so muss man zur Substitution (3.) vor. Nummer seine Zuflucht nehmen, deren zugehöriger Grenzkreis den Kreis E umgiebt.

Es sei z. B.

$$m = 3, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0{,}1, \quad z_3 = 0{,}1.i, \quad z_4 = -0{,}1.$$

Für $m = 3$ ist allgemein

(3.) $$\begin{cases} \varphi(w) = \frac{1}{4}[z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 + (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)w \\ \qquad + (z_1 - iz_2 - z_3 + iz_4)w^2 + (z_1 - z_2 + z_3 - z_4)w^3], \end{cases}$$

daher wird die Gleichung (1.):

(4.) $$G(w) = -[z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4] + [z_1 - iz_2 - z_3 + iz_4]w^2 + 2[z_1 - z_2 + z_3 - z_4]w^3 = 0.$$

Für unser numerisches Beispiel ist der Modul des Coefficienten von w^3 in dieser Gleichung stets grösser als der von w^0, welche Permutation der Grössen z_1, z_2, z_3, z_4 auch gewählt werde. Es hat demnach in diesem Falle die Gleichung (4.) mindestens eine Wurzel, deren Modul kleiner als Eins, die also innerhalb E liegt.

193] Für die obige Permutation lautet die Gleichung (4.):

$$(5.) \qquad G(w) = -(1+0{,}1\,.\,i) + (1-0{,}3\,.\,i)w^3 + 2(1+0{,}1\,.\,i)w^5 = 0.$$

Man erhält:

$$(6.) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{mod}\, G(w))^2 = 1{,}01 - (1{,}94\cos 2\varphi + 0{,}8\sin 2\varphi)r^2 - 4{,}04\cos 3\varphi\,.\,r^3 \\ \qquad\qquad + 1{,}09\,r^4 + (3{,}88\cos\varphi - 1{,}6\sin\varphi)r^5 + 4{,}04\,r^6, \end{array} \right.$$

wenn

$$w = re^{\varphi i}$$

gesetzt wird. Werden in (6.) die negativen Vorzeichen in positive verwandelt und statt r sowie statt der Cosinusse und Sinusse die positive Einheit gesetzt, so ist innerhalb E

$$(7.) \qquad (\mathrm{mod}\, G(w))^2 < 18{,}4.$$

In unserem Falle ist

$$(8.) \qquad M = \frac{\sqrt{154}}{88}.$$

Wir bestimmen demnach

$$(9.) \qquad \frac{\sqrt{154}}{88} \bmod a \geqq \sqrt{18{,}4},$$

und können danach

$$(10.) \qquad a \geqq 31$$

annehmen. Die Substitution (3.) vor. Nummer wird alsdann

$$(11.) \qquad z = \frac{(1+0{,}1\,.\,i)(1+w+w^5) + (1-0{,}3\,.\,i)w^3}{4w} + \frac{31}{4}\,\frac{w^4-1}{(w^4-2)w}.$$

Der dieser zugehörige Grenzkreis umgiebt den Kreis E.

11.

Fassen wir nunmehr die Hauptresultate der vorhergehenden Untersuchung zusammen.

I. Es sei

$$F(w) = \frac{f(w)}{wg(w)}, \tag{1.}$$

wo $f(w)$ und $g(w)$ ganze rationale Functionen der complexen Variablen w sind, die für $w = 0$ nicht verschwinden, und R der kleinste unter den Moduln der Wurzeln der Gleichung:

$$F'(w) = 0. \tag{2.}$$

Es bedeute ferner K die in der Ebene der w mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebene Kreislinie, C die Curve der z-Ebene, welche [194 diesem Kreise vermittelst der rationalen Function

$$z = F(w) \tag{3.}$$

zugehört, so entspricht jedem Punkte innerhalb K nur ein Punkt in dem ausserhalb C liegenden unendlichen Flächenraume F', und umgekehrt, d. h. die Flächen K und F' sind Abbildungen von einander.

Wir nennen K den Grenzkreis und die Curve C die Grenzcurve, welche zur Function (3.) gehören.

II. Sind in der z-Ebene $m+1$ Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ gegeben, so lassen sich die Functionen $f(w)$ und $g(w)$ folgendermassen bestimmen:

1) Der Radius R des Grenzkreises ist grösser als Eins, so dass die Curve C_e in der z-Ebene, welche dem Kreise E mit dem Radius Eins in der w Ebene entspricht, ganz der Fläche F' angehört.

2) Den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ entsprechen in willkürlicher Zuordnung $m+1$ Punkte auf der Peripherie E, welche die $m+1^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit darstellen.

Aus dieser Bestimmung ergiebt sich, dass einerseits die innere Fläche des Kreises E und die äussere unendliche Fläche der Curve C_e, andererseits der Ring zwischen den Kreisen K und E und der Ring zwischen den Curven C und C_e Abbildungen von einander sind.

Wir wollen die Curve C_e den zu dieser so bestimmten Substitution (3.) zugehörigen Absonderungsschnitt nennen.

12.

Um zum Vorhergehenden ein Beispiel zu geben, seien vier Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 in der z-Ebene gegeben, derart dass

$$z_3 = -z_1, \quad z_4 = -z_2,$$

und man setze nach No. 5

$$(1.) \qquad z = \frac{1}{2w}\{z_1 + z_2 i + (z_1 - z_2 i)w^2\},$$

so liefern die vier auf der Peripherie des mit der Längeneinheit um den Anfang der w beschriebenen Kreises E liegenden Punkte $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -i$ resp. die vier Werthe z_1, z_2, z_3, z_4.

Es sei

$$z = x + yi, \quad z_k = x_k + y_k i,$$

195] und es bewege sich w auf der Peripherie des mit dem Radius r um den Anfang der w beschriebenen Kreises K_r, so dass

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

alsdann folgt aus Gleichung (1.) oder

$$(1a.) \qquad z = \frac{1}{2}\left\{z_1\left(w + \frac{1}{w}\right) - z_2 i\left(w - \frac{1}{w}\right)\right\}$$

$$(2.) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left\{(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)\left(r + \frac{1}{r}\right) - (y_1\sin\varphi - y_2\cos\varphi)\left(r - \frac{1}{r}\right)\right\}, \\ y = \frac{1}{2}\left\{(x_1\sin\varphi - x_2\cos\varphi)\left(r - \frac{1}{r}\right) + (y_1\cos\varphi + y_2\sin\varphi)\left(r + \frac{1}{r}\right)\right\}. \end{cases}$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ und setzt:

$$(3.) \qquad \begin{cases} p = x_2\left(r + \frac{1}{r}\right) - y_1\left(r - \frac{1}{r}\right), & p_1 = x_1\left(r - \frac{1}{r}\right) + y_2\left(r + \frac{1}{r}\right), \\ p_2 = x_1\left(r + \frac{1}{r}\right) + y_2\left(r - \frac{1}{r}\right), & p_3 = -x_2\left(r - \frac{1}{r}\right) + y_1\left(r + \frac{1}{r}\right), \end{cases}$$

so ergiebt sich als Gleichung der Curve C_r in der z-Ebene:

$$(4.) \qquad 4(p_1^2 + p_2^2)x^2 - 8(pp_1 + p_2p_3)xy + 4(p^2 + p_3^2)y^2 = (p_1p_2 - pp_3)^2.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, deren Mittelpunkt im Anfang der z,

wenn

$$p_1 p_2 - p p_3 \gtrless 0.$$

Die Längen der Halbaxen der Ellipsen a_r und b_r ergeben sich auf bekannte Weise, wenn man

(5.) $$x_1 + y_2 = \alpha, \quad x_1 - y_2 = \alpha', \quad y_1 + x_2 = \beta, \quad y_1 - x_2 = \beta'$$

setzt:

(6.) $$\begin{cases} a_r^2 = \left(\dfrac{\frac{1}{r}\sqrt{\alpha'^2+\beta^2} + r\sqrt{\alpha^2+\beta'^2}}{2} \right)^2, \\ b_r^2 = \left(\dfrac{\frac{1}{r}\sqrt{\alpha'^2+\beta^2} - r\sqrt{\alpha^2+\beta'^2}}{2} \right)^2. \end{cases}$$

Die Ellipse verwandelt sich in ein System zweier zusammenfallender gerader Linien, wenn

$$p_1 p_2 - p p_3 = 0$$

oder

(7.) $$(\alpha^2+\beta'^2) r^2 - (\alpha'^2+\beta^2)\frac{1}{r^2} = 0.$$

Diese Gleichung hat eine reelle positive Wurzel: [196

(8.) $$r = \sqrt[4]{\frac{\alpha'^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta'^2}}.$$

Für $r = 0$ sind die Axen der Ellipse unendlich gross, für wachsende Werthe von r nehmen die Quadrate der Halbaxen ab, bis für den Werth (8.) von r

$$a_r^2 = \sqrt{(\alpha^2+\beta'^2)(\alpha'^2+\beta^2)}, \quad b_r^2 = 0,$$

d. h. die Ellipse eine mit der Axe $2a_r$ zusammenfallende Doppellinie wird.

Für Werthe von r, die grösser sind als der Werth (8.), nehmen a_r^2 und b_r^2 wieder fortwährend mit wachsendem r zu.

Bekanntlich sind die Richtungen der beiden Axen der Ellipse die der beiden durch die Gleichung:

(9.) $$(p p_1 + p_2 p_3) x^2 + (p_1^2 + p_3^2 - p^2 - p_2^2) xy - (p p_1 + p_2 p_3) y^2 = 0$$

dargestellten auf einander senkrechten Geraden. Nun ist

$$p p_1 + p_2 p_3 = 4(x_2 y_2 + x_1 y_1), \quad p_1^2 + p_3^2 - p^2 - p_2^2 = 4(y_2^2 + y_1^2 - x_2^2 - x_1^2),$$

also von r unabhängig. Es sind demnach die Richtungen der Axen für alle Ellipsen dieselben; die der Axen $2a_r$ coïncidirt mit der geraden Doppellinie, in welche die Ellipse für den Werth (8.) von r übergeht, und deren Gleichung ist:

$$(10.) \qquad (\alpha\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}-\alpha'\sqrt{\alpha^2+\beta'^2})x-(-\beta'\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}+\beta\sqrt{\alpha^2+\beta'^2})y = 0.$$

Die Gleichung, welche den Grenzkreis liefert (s. Gleichung (A.) No. 3) ist

$$(11.) \qquad w^2(z_1-z_2 i)-(z_1+z_2 i) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich als Radius desselben

$$(12.) \qquad R = \sqrt[4]{\frac{\alpha'^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta'^2}}.$$

Durch Vergleichung von (8.) und (12.) folgt, dass die Grenzcurve C die gerade Doppellinie ist, welche sich in der Richtung der Linie (10.) nach beiden Seiten des Anfangspunktes bis zum Abstande $\sqrt[4]{(\alpha^2+\beta'^2)(\alpha'^2+\beta^2)}$ erstreckt. Die Fläche F' ist demnach die durch diese Doppellinie begrenzte unendliche Ebene.

Ist

$$(13.) \qquad x_2 y_1 - x_1 y_2 \gtrless 0,$$

d. h. liegen z_1 und z_2 nicht mit dem Nullpunkte in gerader Linie, so kann man voraussetzen, dass der Ausdruck (13.) positiv ist, da eine Vertauschung [197] von z_1 und z_2 demselben das entgegengesetzte Vorzeichen verschafft, wenn er negativ ausfällt.

Es ist aber unter dieser Voraussetzung $R > 1$, es genügt also die Substitution (1.) auch der in vor. Nummer unter II. aufgestellten Bedingung, dass der Kreis E innerhalb des Grenzkreises sich befindet.

Liegen aber z_1 und z_2 mit dem Nullpunkte in gerader Linie, so ist

$$(14.) \qquad x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$$

und demnach $R = 1$. Der Kreis E fällt alsdann mit dem Grenzkreis K, die Grenzcurve mit dem Absonderungsschnitt zusammen.

In diesem Falle ist nach No. 9 Gleichung (3.) an die Stelle der Substitution (1.) die folgende zu setzen:

$$(15.) \qquad z = \frac{1}{2w}\{z_1+z_2 i+(z_1-z_2 i)w^2\}+\frac{a(w^4-1)}{(w^4-2)w},$$

wo a nach No. 9 zu bestimmen ist. Der zu dieser Substitution gehörige Grenzkreis umschliesst den Kreis E.

Eine andere Behandlung dieses Falles, wo die Gleichung (14.) befriedigt wird, ergiebt sich aus der folgenden Nummer.

13.

Die in No. 5—11 getroffene Bestimmung der Function $F(w)$ (No. 11 Gleichung (3.)) kann durch allgemeinere ersetzt werden, welche von der in No. 11 erwähnten darin abweichen, dass den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ $m+1$ willkürliche Punkte auf der Peripherie von E entsprechen.

In gewissen Fällen kann man sich auch einfacherer Functionen bedienen, um eine einfach zusammenhängende Fläche in der z-Ebene so zu bestimmen, dass auf deren Begrenzung C_z gegebene Punkte sich befinden, und dass sie ganz einer anderen einfach zusammenhängenden Fläche angehört, die eine Abbildung einer Kreisfläche K in der w-Ebene ist, derart, dass die Begrenzung C_z einem Kreise E entspricht.

Liegen z. B. die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ auf einer geraden Linie L, welche gegen die reelle Axe der z-Ebene unter dem Winkel ϑ geneigt ist und vom Anfangspunkte den Abstand l hat, und setzt man

$$(1.) \qquad z = \frac{e^{\alpha i} + e^{\beta i} w}{1 + e^{(\alpha+\beta-2\vartheta)i} w} \mp i l e^{\vartheta i},$$

wo α und β beliebige reelle Grössen sind, so entspricht jedem Punkte der w-Ebene nur ein Punkt der z-Ebene, und umgekehrt.

Ist [198

$$z = x + yi,$$

so ergiebt sich für

$$w = e^{\varphi i},$$

$$(2.) \qquad \begin{cases} x = \pm l \sin\vartheta + \cos\vartheta \dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta-\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta+\varphi}{2} - \vartheta\right)}, \\ y = \mp l \cos\vartheta + \sin\vartheta \dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta-\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta+\varphi}{2} - \vartheta\right)}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin\vartheta$, die zweite mit $\cos\vartheta$ und subtrahirt, so folgt:

$$x\sin\vartheta - y\cos\vartheta = \pm l. \tag{3.}$$

Dieses ist die Gleichung der Linie L. Während also w die Peripherie E beschreibt, bewegt sich der Punkt z auf der geraden Linie L.

Umgekehrt ergeben die Gleichungen (2.) zu jedem Punkte der Linie L einen Punkt der Peripherie E.

Die gerade Linie L theilt die z-Ebene in zwei Hälften T und T', wovon die eine dem Inneren, die andere dem Äusseren des Kreises E entspricht.

14.

Um noch ein zweites Beispiel für eine einfachere Bestimmung, wie sie in vor. Nummer angedeutet worden, zu geben, seien z_1, z_2, z_3, z_4 vier beliebige Punkte in der z-Ebene, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ vier beliebige Punkte auf dem Kreise E in der w-Ebene, und es werden die Coefficienten in der Function

$$z = \frac{A_0 + A_1 w + A_2 w^2}{B_0 + B_1 w + B_2 w^2} \tag{1.}$$

so bestimmt, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ in willkürlicher Zuordnung den Punkten z_1, z_2, z_3, z_4 entsprechen. Hierzu sind die Gleichungen:

$$A_0 + A_1\alpha_k + A_2\alpha_k^2 - B_1\alpha_k z_k = (B_0 + B_2\alpha_k^2) z_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{2.}$$

zu erfüllen. Zu diesen fügen wir die Bestimmung:

$$A_0 B_2 - A_2 B_0 = 0 \tag{3.}$$

199] hinzu. Aus den Gleichungen (2.) folgt:

$$\begin{cases} \Delta A_i = \varkappa_i B_0 + \lambda_i B_2, \\ \Delta B_1 = \varkappa_2 B_0 + \lambda_2 B_2, \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{4.}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & -\alpha_1 z_1 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & -\alpha_2 z_2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & -\alpha_3 z_3 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & -\alpha_4 z_4 \end{vmatrix}$$

und $\varkappa_i, \lambda_i$ aus Δ hervorgehen, wenn man die $i+1^{\text{te}}$ Verticalreihe resp. durch z_1, z_2, z_3, z_4 und $\alpha_1^2 z_1, \alpha_2^2 z_2, \alpha_3^2 z_3, \alpha_4^2 z_4$ ersetzt.

Die Bestimmung ist immer ausführbar, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ so gewählt werden, dass Δ nicht verschwindet, was immer möglich ist.

Es seien w und w_1 zwei Werthe von w, welchen dasselbe z zugehört, so folgt aus Gleichung (1.) mit Rücksicht auf (3.)

$$B_0 - B_2 w w_1 = 0. \tag{5.}$$

Beschreibt daher w um den Nullpunkt einen Kreis mit dem Radius r, so beschreibt w_1 ebenfalls einen Kreis, dessen Radius gleich $\frac{1}{r} \bmod \frac{B_0}{B_2}$.

Hieraus folgt, ähnlich wie in No. 3, dass innerhalb des Kreises K mit dem Radius

$$R = \sqrt{\bmod \frac{B_0}{B_2}} \tag{6.}$$

nicht zwei verschiedenen Werthen w gleiche Werthe z entsprechen können.

Dieser Kreis ist also der zur Function (1.) gehörige Grenzkreis in dem Sinne der No. 1.

Durch Substitution der Werthe von A_0 und A_2 aus (4.) in (3.) erhält man:

$$\varkappa_2 B_0^2 + (\lambda_2 - \varkappa_0) B_0 B_2 - \lambda_0 B_2^2 = 0. \tag{7.}$$

Nun ergiebt sich aber

$$\lambda_0 = -\varkappa_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \tag{8.}$$

also

$$\bmod \lambda_0 = \bmod \varkappa_2. \tag{9.}$$

Demnach ist der Modul des Products der beiden Wurzeln $\frac{B_0}{B_2}$ der Gleichung [200 (7.) gleich Eins, also die eine grösser und die andere kleiner als Eins, oder beide gleich Eins.

Die beiden Werthe w_1 und w_2, für welche z unendlich wird, sind durch die Gleichung

$$w^2 + \frac{B_1}{B_2} w + \frac{B_0}{B_2} = 0 \tag{10.}$$

gegeben. Da hiernach

$$\bmod w_1 w_2 = \bmod \frac{B_0}{B_2} = R^2, \tag{11.}$$

so ist

$$\bmod w_1 \geqq R, \quad \bmod w_2 \leqq R,$$

d. h. von diesen beiden Werthen befindet sich der eine innerhalb, der andere ausserhalb des Grenzkreises, oder beide auf dem Umfange desselben.

Es sei C diejenige geschlossene Curve in der z-Ebene, welche dem Grenzkreise K entspricht, und F' derjenige Flächentheil der von derselben zerschnittenen unendlichen z-Ebene, welcher den Punkt $z_0 = \frac{A_0}{B_0}$ enthält, so ist das Innere von K eine Abbildung von F'. Aus Gleichung (5.) ergiebt sich, dass auch das Äussere von K Abbildung von F' ist.

Wenn $R \geqq 1$, so wollen wir das Innere von K, wenn $R < 1$, das Äussere mit φ bezeichnen.

Es sei ferner E der mit dem Radius Eins um den Nullpunkt der w beschriebene Kreis, so fällt die zugehörige Curve C_0 in der z-Ebene ganz in F'. Je nachdem $R \geqq 1$ oder $R < 1$, bezeichnen wir das Innere oder das Äussere des Kreises E mit ψ, während der von C_0 abgegrenzte Flächentheil von F', welcher den Punkt $z_0 = \frac{A_0}{B_0}$ enthält, mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet werden soll.

Die Flächentheile ψ und $\mathfrak{e}$, so wie die Reste $F' - \mathfrak{e}$ und $\varphi - \psi$ sind Abbildungen von einander.

In dem Falle, dass w_2 innerhalb ψ sich befindet, entspricht ein excentrischer Punkt w_2 der Fläche ψ dem Unendlichkeitspunkte von z. Allein man kann durch Anwendung einer linearen Substitution die Fläche ψ und einen daran anstossenden Ringflächentheil, welcher einen Theil des von K und E gebildeten Ringes ausmacht und seinerseits von E und einem den Nullpunkt umgebenden excentrischen Kreise begrenzt wird, so abbilden, dass der Fläche ψ eine Kreisfläche E', dem Punkte w_2 der Mittelpunkt des letzteren Kreises, endlich dem Ringflächentheile ein Kreisring entspricht, der vom Kreise E' 201] und einem ihn umgebenden concentrischen Kreise gebildet wird. Dieses wollen wir in der folgenden Nummer nachweisen.

15.

Setzen wir

$$w = w_2 + \frac{t}{a + bt} \tag{1.}$$

und bestimmen a und b so, dass, wenn t sich auf der Peripherie eines um den Nullpunkt der complexen Variablen t mit dem Radius Eins beschriebenen Kreises E' bewegt, w die Peripherie des Kreises E beschreibt.

Aus (1.) folgt:

$$t = \frac{-aw_2 + aw}{1 + bw_2 - bw}. \tag{2.}$$

Bezeichnet man die conjugirten complexen Werthe mit oberen Accenten, so ist für solche t, die auf der Peripherie E' liegen:

$$tt' = 1. \tag{3.}$$

Für die zugehörigen Werthe w ergiebt sich aus den Gleichungen (2.) und (3.)

$$\left\{\begin{array}{l}(aa'-bb')ww'-[(aa'-bb')w_2'-b]w-[(aa'-bb')w_2-b']w' \\ \qquad +(aa'-bb')w_2w_2'-bw_2-b'w_2'-1 = 0.\end{array}\right. \tag{4.}$$

Die Forderung, dass diese Gleichung den Kreis E darstellen soll, liefert die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}(aa'-bb')w_2'-b = 0, \\ (aa'-bb')w_2w_2'-bw_2-b'w_2'-1 = bb'-aa'.\end{array}\right. \tag{5.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen in Verbindung mit den sich daraus durch Vertauschung von i mit $-i$ ergebenden folgt:

$$b = \frac{w_2'}{1-w_2w_2'}, \qquad aa' = \frac{1}{(1-w_2w_2')^2}. \tag{6.}$$

Die erste Gleichung liefert für b einen endlichen Werth, da in unserem Falle

$$w_2w_2' = (\mathrm{mod}\, w_2)^2 \leqq 1.$$

Die zweite Gleichung (6.) liefert den Modul von a, während das Argument dieser Grösse unbestimmt bleibt.

Da für $t = 0$, $w = w_2$ einen Punkt im Inneren von ψ darstellt, so ist das Innere des Kreises E' das Bild der Fläche ψ.

Irgend einem um den Anfang der t mit dem Radius r beschriebenen Kreise in der t-Ebene entspricht nach den Relationen (1.) und (6.) ein Kreis in der w-Ebene, dessen Gleichung: [202

$$(1-r^2w_2w_2')ww'-(1-r^2)w_2'w-(1-r^2)w_2w'+w_2w_2'-r^2 = 0, \tag{7.}$$

welcher mit dem Kreise E excentrisch ist und denselben nicht schneidet.

Ist $R > 1$, so ist $r > 1$, ist $R < 1$, so ist $r < 1$, und in beiden Fällen so gross zu wählen, dass der Kreis (7.) noch ganz in der Fläche φ befindlich ist, damit der Ring zwischen dem Kreise E' und dem mit r beschriebenen Kreise K' die Abbildung des vom Kreise K und von dem durch die Gleichung (7.) dargestellten Kreise gebildeten excentrischen Ringes wird.

Man kann übrigens $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ stets so wählen, dass die Wurzeln der Gleichung (7.) vor. Nummer nicht gleich werden. Nimmt man alsdann für $\frac{B_0}{B_3}$ diejenige Wurzel, deren Modul grösser als Eins, so ist auch der Radius des Grenzkreises grösser als Eins (s. Gleichung (6.) vor. Nummer).

II. Abtheilung.

1.

Es sei $f(z)$ eine Function, welche nur eine endliche Anzahl von Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkten enthält. Soll dieselbe von einem Punkte A bis zu einem Punkte B der z-Ebene fortgesetzt werden, so geschieht dieses bekanntlich vermittelst des TAYLORschen Satzes angewendet auf eine Reihe von Kreisen, welche den Unstetigkeits- und Verzweigungspunkten ausweichen und zusammen das zwischen A und B sich erstreckende Curvenstück enthalten. Dieses Verfahren ist, abgesehen von seiner Beschwerlichkeit in praktischer Beziehung, nicht geeignet a priori über den Zusammenhang der Werthe der Function in den beiden Grenzen des von A nach B sich erstreckenden Weges eine Vorstellung zu verschaffen.

Theilt man die Ebene in eine gewisse Anzahl Gebiete G derart, dass eine einheitliche, für alle Fortsetzungswege direct brauchbare analytische Darstellung innerhalb eines jeden derselben und gleichzeitig das Gesetz des Überganges aus einem Gebiete in das andere bekannt ist, so kann man den Werth in B angeben, sobald der in A und der Weg L, der von A nach B führt, gegeben ist, ohne erst alle Zwischenstufen von Werthen, welche den übrigen Punkten von L angehören, zu bestimmen.

Die einfachste Art einer solchen Darstellung würde im Allgemeinen 203] diejenige sein, für welche die Anzahl der Gebiete G den kleinsten Werth hat. Diese kleinste Zahl ist Zwei.

Wir wollen in der That zeigen, wie man die Ebene z in zwei Gebiete G_1 und G_2 zerlegen kann derart, dass innerhalb eines jeden dieser Gebiete eine einheitliche analytische Darstellungsweise der angegebenen Art vorhanden ist, und ihr Zusammenhang durch die analytische Natur der Function $f(z)$ vermittelt wird.

2.

Sind nämlich $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ die endlichen Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte (singulären Punkte) der Function $f(z)$ und

$$z = F(w), \tag{1.}$$

wo $F(w)$ die in No. 11, Abth. I angeführten Eigenschaften besitzt, so wird der zur Substitution (1.) zugehörige Absonderungsschnitt C_0 die sämmtlichen Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ in sich aufnehmen und die Ebene z in zwei einfach zusammenhängende Gebiete G_1, G_2 theilen, wovon das erstere sich ins Unendliche erstreckt, das letztere von endlicher Ausdehnung ist.

Der Punkt $z = \infty$ ist im Allgemeinen auch ein singulärer Punkt der Function $f(z)$, demnach auch der Punkt $w = 0$ im Allgemeinen ein singulärer Punkt von

$$f(F(w)) = f_1(w),$$

ausserdem sind in der Fläche des Kreises E nur noch die auf der Peripherie desselben liegenden $m+1^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ singuläre Punkte der Function $f_1(w)$.

Es werde nun vorausgesetzt, dass es in der Umgebung von $w = 0$ eine Darstellung der Function $f_1(w)$ gebe,

$$f_1(w) = \psi_0(w), \tag{2.}$$

so ist diese innerhalb E gültig.

Ist alsdann w_0 diejenige Wurzel der Gleichung (1.), welche für $z = \infty$ verschwindet, so ist

$$f(z) = \psi_0(w_0) \tag{3.}$$

eine Darstellung der Function $f(z)$ für das Gebiet G_1, da die Kreisfläche E und das Gebiet G_1 Abbildungen von einander sind.

Innerhalb des Gebietes G_2 ist die Function $f(z)$ eindeutig, endlich und continuirlich. Es ist demnach [204

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \tag{4.}$$

das Integral erstreckt über den inneren Rand des Absonderungsschnittes C_0. Da der Ring zwischen C_0 und der ganz von C_0 umschlossenen Grenzcurve C

und der Kreisring zwischen E und dem Grenzkreise K Abbildungen von einander sind, so ist auch

$$(5.) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f_1(w)}{F(w)-z} F'(w)\,dw,$$

das Integral über den äusseren Rand des Kreises E erstreckt.

Die Function $f_1(w)$ ist innerhalb des Kreisringes zwischen K und E eindeutig, endlich und continuirlich, ist also in diesem Gebiete nach ganzen positiven und negativen Potenzen von w entwickelbar. Die Bestimmung der Coefficienten dieser Entwickelung ist namentlich von dem Verhalten von $f_1(w)$ in der Umgebung der singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ abhängig.

Da die Function $f_1(w)$ am inneren Rande von E durch die Entwickelung (2.) berechenbar ist, so kann ihre Bestimmung am äusseren Rande auch erfolgen vermittelst der Entwickelung (2.) unter Zuhülfenahme der Beziehungen, welche für den Umlauf von w um je einen Punkt α sich ergeben.

Es sind demnach auf die eine oder andere Weise die Functionswerthe am äusseren Rande von E bekannt, und der Ausdruck (5.) giebt die Entwickelung von $f(z)$ im Gebiete G_2.

Wird die Function $f(z)$ aus dem einen der Gebiete G_1 und G_2 in das andere fortgesetzt, so lässt sich zu dem Werthe der Function am Anfang des Weges der Werth am Ende desselben resp. vermittelst der Entwickelungen (3.) und (5.) bestimmen, ohne dass die Functionswerthe für die Zwischenpunkte des Weges zu berechnen wären, wenn nur das Verhalten der Function in der Umgebung der singulären Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ bekannt ist.

3.

Die Entwickelung (2.) vor. Nummer ist mit Hülfe der algebraischen Function w_0 von z gebildet. Die Entwickelbarkeit im Gebiete G_1 ist also von der Kenntniss der Function w_0 innerhalb desselben Gebietes abhängig. Die algebraischen Functionen dürfen jedoch bei der Darstellung transcendenter Functionen mit Recht als bekannte Elemente vorausgesetzt und verwendet werden. 205] In gewissen besonderen Fällen lässt sich w_0 durch die LAGRANGEsche Reihe bestimmen.

Ist nämlich r der kleinste Radius der um den Anfang der z beschriebenen Kreise, welche die sämmtlichen Werthe von z einschliessen, für die

die Gleichung (1.) vor. Nummer gleiche Wurzeln w besitzt, so ist w_0 mit Hülfe der LAGRANGEschen Reihe für die Fläche ausserhalb des Kreises mit dem Radius r nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelbar. Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich nach den CAUCHYschen Principien (man vergl. die elegante Abhandlung des Herrn ROUCHÉ: sur la série de LAGRANGE, Journ. de l'École Polytechn., cah. 39, p. 193 sqq., auch aufgenommen in SERRET, Cours d'algèbre supérieure, 3. édition, p. 462 sqq.).

Gelingt es nun in besonderen Fällen die Function $F(w)$ so zu bestimmen, dass der Absonderungsschnitt C_0 ganz in dieses Gebiet, für welches die LAGRANGEsche Reihe gilt, hineinfällt, so gilt dieselbe a potiori im Gebiete G_1, welches alsdann ein Theil jenes ersteren Gebietes ist.

4.

Wir machen nunmehr von den vorhergehenden Principien Anwendung auf die Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Es sei gegeben die Differentialgleichung

$$p_n \frac{d^n y}{dz^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + p_0 y = 0, \tag{1.}$$

deren Coefficienten $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_0$ ganze rationale Functionen von z sind. Alsdann sind ausser $z = \infty$ die einzigen singulären Punkte der Integrale derselben die Wurzeln der Gleichung:

$$p_n = 0 \tag{2.}$$

(vergl. meine Abh., dieses Journal Bd. 66[1]), No. 1). Dieselben seien $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$.

Es sei

$$z = F(w), \tag{3.}$$

wo $F(w)$ die in No. 11, Abth. I charakterisirte rationale Function bedeutet, und es werde durch die singulären Punkte die zur Substitution (3.) gehörige Absonderungscurve C_0 gelegt und dadurch die z-Ebene in die beiden in No. 2 charakterisirten Gebiete G_1 und G_2 getheilt.

Es sollen folgende Aufgaben gelöst werden: [206

I. Eine analytische Darstellung eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung (1.): $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gültig für das Gebiet G_1 zu finden.

[1]) Abh. VI, S. 159 ff. dieses Bandes. Sch.

II. Eine analytische Darstellung eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung (1.): $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ gültig innerhalb des Gebietes G_2 anzugeben.

III. Den Übergang von dem einen der beiden Systeme zu dem anderen längs einer vorgeschriebenen den Absonderungsschnitt überschreitenden Linie zu bestimmen.

5.

Substituirt man für z den Werth aus Gleichung (3.) vor. Nummer in die Differentialgleichung vor. Nummer, so erhält man:

$$(1.)\quad \Psi(w)^{n-1}[wg(w)]^{\lambda} R(w)\frac{d^n y}{dw^n} + q_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dw^{n-1}} + q_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dw^{n-2}} + \cdots + q_0 y = 0,$$

worin die Coefficienten der Ableitungen von y ganze rationale Functionen von w sind, und zwar ist $R(w)$ der Zähler des Resultats der Substitution von z aus Gleichung (3.) vor. Nummer in p_n, ferner

$$(2.)\qquad \Psi(w) = wg(w)f'(w) - f(w)[g(w) + wg'(w)],$$

wo $f(w)$ und $g(w)$ die in No. 5—10 Abth. I bestimmten Functionen und $f'(w)$, $g'(w)$ ihre Ableitungen bedeuten. Der Exponent λ ist abhängig vom Grade der Functionen $p_n, p_{n-1}, \cdots, p_0$.

Die endlichen singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) sind:

1) die Wurzeln der Gleichung:

$$\Psi(w) = 0$$

oder, was dasselbe bedeutet, die Wurzeln der Gleichung:

$$(3.)\qquad F'(w) = 0;$$

2) der Punkt $w = 0$ und die Wurzeln der Gleichung

$$(4.)\qquad g(w) = 0;$$

3) die Werthe w, für welche z einen der Werthe $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ erhält.

Der Definition des Grenzkreises K gemäss befindet sich innerhalb desselben keiner der singulären Punkte No. 1), folglich enthält um so weniger die Kreisfläche E einen derselben.

Da ferner der Definition des Grenzkreises gemäss nicht zwei ver- [207
schiedenen Punkten innerhalb desselben ein und derselbe Werth z entspricht, so folgt, dass von den verschiedenen Werthen w, welche je einem Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ entsprechen, nur je einer, nämlich die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ auf der Peripherie des Kreises E sich innerhalb K befinden.

Endlich ist von den singulären Punkten No. 2) nur der Punkt $w = 0$ innerhalb K gelegen, da die Wurzeln der Gleichung (4.) ausserhalb K befindlich sind (s. No. 1 Abth. I.).

In meinen Abhandlungen, dieses Journal, Bd. 66[1]), No. 3 und Bd. 68[2]), No. 1, ist gezeigt, dass es ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ von der Beschaffenheit giebt, dass sein Ausdruck in der Umgebung von $w = 0$ ist:

$$\eta_\alpha = w^{k_\alpha} \varphi_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.}$$

wo k_α das $\frac{1}{2\pi i}$fache des Logarithmus der α^{ten} Wurzel der dort (Bd. 66, No. 3) als Fundamentalgleichung charakterisirten Gleichung n^{ten} Grades und φ_α eine in der Umgebung von $w = 0$ eindeutige Function bedeutet, wenn nämlich die Wurzeln der Fundamentalgleichung sämmtlich verschieden sind.

Sind dagegen λ Wurzeln $k_1, k_2, \ldots, k_\lambda$ gleich k, so treten an die Stelle der Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\lambda$ in Gleichung (5.) die folgenden:

$$\eta_\alpha = w^k \sum_1^\alpha{}_\beta \varphi_{\alpha\beta} (\log w)^{\beta - 1}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda) \tag{5a.}$$

wo $\varphi_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $w = 0$ ebenfalls eindeutig ist.

Die Umgebung des Punktes $w = 0$ ist im vorliegenden Falle die ganze Kreisfläche E, die Begrenzung ausgeschlossen. Deshalb sind die Ausdrücke (5.) und (5a.) für diese ganze Fläche gültig.

Bekanntlich lassen sich die Functionen φ_α und $\varphi_{\alpha\beta}$ nach ganzen positiven und negativen Potenzen von w entwickeln. Substituirt man also nach Vorschrift der No. 2 für w die Wurzel w_0 in die Ausdrücke (5.) und (5a.), so erhält man eine analytische Darstellung eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung (1.) No. 4, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, gültig für das Gebiet G_1, wie es in der Aufgabe I. No. 4 verlangt wurde.

---

[1]) Abh. VI, S. 159 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Abh. VII, S. 205 ff. dieses Bandes. Sch.

6.

Wie in meinen oben erwähnten Abhandlungen l. c. nachgewiesen, giebt es ebenso wie zum Punkte $w = 0$ zu den singulären Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ 208] je ein zugehöriges Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) vor. Nummer, dessen Darstellung in der Umgebung des zugehörigen singulären Punktes analog den Formen (5.) und (5a.) vor. Nummer ist. Das zum singulären Punkte $\alpha_\varkappa$ zugehörige Fundamentalsystem werde mit $\eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \ldots, \eta_{\varkappa n}$ bezeichnet.

Da sich jedes Integral linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch die Elemente eines Fundamentalsystems darstellen lässt, so hat man Gleichungen von folgender Form:

$$\eta_a = \sum_1^n{}_c b_{ac}^{(\varkappa)} \eta_{\varkappa c}. \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, n \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m+1 \end{pmatrix} \tag{1.}$$

Es ist unsere Aufgabe, die Grössen $b_{ac}^{(\varkappa)}$ zu bestimmen.

Es sei $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ irgend ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) vor. Nummer, und man setze:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}\zeta_1}{dw^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\zeta_1}{dw^{n-2}} & \cdots & \zeta_1 \\ \frac{d^{n-1}\zeta_2}{dw^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\zeta_2}{dw^{n-2}} & \cdots & \zeta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1}\zeta_n}{dw^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\zeta_n}{dw^{n-2}} & \cdots & \zeta_n \end{vmatrix} = D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \tag{2.}$$

und

$$e^{-\int \frac{q_{n-1}}{\Psi(w)^{n-1}[wg(w)]^\lambda R(w)} dw} = \chi(w), \tag{3.}$$

so ist

$$D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = C\chi(w), \tag{4.}$$

wo C von w unabhängig ist (vergl. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2).

Nachdem über die additive Constante des in Gleichung (3.) enthaltenen Integrals ein für allemal verfügt worden, ist die Constante C in Gleichung (4.) vollständig bestimmt, wenn das Fundamentalsystem $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ gegeben ist. Der Werth dieser Constanten für das Fundamentalsystem $\eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \ldots, \eta_{\varkappa n}$ sei

$C^{(\varkappa)}$; man hat alsdann die Gleichung:

$$(5.) \qquad D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}) = C^{(\varkappa)}\chi(w).$$

Die Constanten $C^{(\varkappa)}$ sind von Null verschieden, und die Function $\chi(w)$ wird für Werthe von w, die nicht zu den singulären gehören, weder Null noch unendlich (vergl. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2).

Ersetzt man in $D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n})$ das Element $\mathfrak{y}_{\varkappa c}$ durch $\mathfrak{y}_a$, so erhält [209 man aus Gleichung (1.) und den $n-1$ ersten Ableitungen derselben:

$$(6.) \qquad D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa,c-1}, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{y}_{\varkappa,c+1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}) = \mathfrak{b}_{ac}^{(\varkappa)} D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}).$$

Setzt man

$$(7.) \qquad D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa,c-1}, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{y}_{\varkappa,c+1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}) = C_{ca}^{(\varkappa)}\chi(w),$$

so ist $C_{ca}^{(\varkappa)}$ eine Constante, die Null oder von Null verschieden ist, je nachdem $\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa,c-1}, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{y}_{\varkappa,c+1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}$ kein Fundamentalsystem darstellt oder ein solches darstellt (s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2).

Dividirt man die Gleichung (7.) durch die Gleichung (5.), so folgt:

$$(8.) \qquad D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa,c-1}, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{y}_{\varkappa,c+1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}) C^{(\varkappa)} = D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}) C_{ca}^{(\varkappa)}.$$

7.

Es sei um $\alpha_\varkappa$ ein Kreis $(\varkappa)$ beschrieben, welcher ganz in der Fläche des Grenzkreises K sich befindet, und keinen der übrigen singulären Punkte enthält, so sind die oben (vor. Nummer) erwähnten Reihenentwicklungen des Fundamentalsystems $\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}$ innerhalb des Kreises $(\varkappa)$ gültig, also für jeden Punkt seiner Fläche ausser $\alpha_\varkappa$ diese Functionen nebst ihren Ableitungen bestimmbar. Ist α ein von $\alpha_\varkappa$ verschiedener Punkt des gemeinsamen Flächentheils von $(\varkappa)$ und E, so sind für diesen Punkt nach den beiden vorhergehenden Nummern sowohl die Reihenentwicklungen für $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$, als auch die für $\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}$ gültig.

Setzt man daher in Gleichung (8.) vor. Nummer α statt w, und deutet dieses durch Hinzufügung des Index α an, so liefern die Gleichungen:

$$(1.) \qquad D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n})_\alpha C_{ca}^{(\varkappa)} = D(\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa,c-1}, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{y}_{\varkappa,c+1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n})_\alpha C^{(\varkappa)},$$
$$(a = 1, 2, \ldots, n, \quad c = 1, 2, \ldots, n, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, m+1)$$

die Verhältnisse $C_{ca}^{(\varkappa)} : C^{(\varkappa)}$.

Setzt man ebenso in Gleichung (6.) vor. Nummer α für w, so folgt:

$$(2.) \qquad D(\eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \dots, \eta_{\varkappa n})_\alpha b_{ac}^{(\varkappa)} = D(\eta_{\gamma 1}, \dots, \eta_{\varkappa, c-1}, \eta_a, \eta_{\varkappa, c+1}, \dots, \eta_n)_\alpha.$$

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) ergiebt sich:

$$(3.) \qquad C^{(\varkappa)} b_{ac}^{(\varkappa)} = C_{ca}^{(\varkappa)}, \quad (a = 1, 2, \dots, n, \ c = 1, 2, \dots, n, \ \varkappa = 1, 2, \dots, m+1).$$

Aus No. 6 folgt auch, dass die Verhältnisse $C_{ca}^{(\varkappa)} : C^{(\varkappa)}$ von α unabhängig sind.

8.

Gehört die Differentialgleichung (1.) No. 4 zur Klasse derjenigen, die ich in meiner Abhandlung, Bd. 66, No. 4 dahin charakterisirt habe, dass ihre 210] Integrale für irgend einen singulären Punkt a nach Multiplication mit einer bestimmten Potenz von $z-a$ und für $z = \infty$ nach Multiplication mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ nicht mehr unendlich sind, so kann die Bestimmung der Grössen $b_{ac}^{(\varkappa)}$ vereinfacht werden.

Es sei wiederum $\alpha_\varkappa$ einer der auf der Peripherie von E liegenden singulären Punkte, $r_1, r_2, \dots, r_n$ die n Wurzeln der zu diesem gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.) No. 5, sowie $\eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \dots, \eta_{\varkappa n}$ das Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung, dessen Elemente der Reihe nach zu den obigen Wurzeln als Exponenten gehören (s. meine Abhandlung, Bd. 66 No. 4 und Bd. 68 No. 4), und es werde vorausgesetzt, dass die Grössen r so geordnet sind, dass der reelle Theil von $r_\mathfrak{b}$ nicht kleiner ist als der reelle Theil von $r_\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$. Man hat alsdann innerhalb $(\varkappa)$:

$$(1.) \qquad \eta_{\varkappa a} = (w - \alpha_\varkappa)^{r_a} G_a(w),$$

wo $G_a(w)$ die Form hat:

$$(2.) \quad G_a(w) = \psi_0 + \psi_1 \log(w-\alpha_\varkappa) + \psi_2 [\log(w-\alpha_\varkappa)]^2 + \dots + \psi_\lambda [\log(w-\alpha_\varkappa)]^\lambda,$$

in welcher $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_\lambda$ nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w-\alpha_\varkappa$ fortschreitende Reihen vorstellen, welche für $w = \alpha_\varkappa$ nicht gleichzeitig verschwinden (s. meine Abhandlung, Bd. 66).

Ebenso seien die Wurzeln der zum singulären Punkte $w = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_n$, so ist innerhalb E

$$(3.) \qquad \eta_a = w^{\mathfrak{r}_a} H_a,$$

wo H_a die Form hat

$$H_a = \tau_0 + \tau_1 \log w + \tau_2 (\log w)^2 + \cdots + \tau_\lambda (\log w)^\lambda, \tag{4.}$$

in welcher $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_\lambda$ nach positiven ganzzahligen Potenzen fortschreitende Reihen sind, die für $w = 0$ nicht sämmtlich verschwinden.

9.

Multiplicirt man die 1te, 2te, ..., n^{te} Horizontalreihe der Determinante $D(\mathfrak{y}_{\chi 1}, \mathfrak{y}_{\chi 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi n})$ resp. mit $(w-\alpha_\chi)^{-r_1}, (w-\alpha_\chi)^{-r_2}, \ldots, (w-\alpha_\chi)^{-r_n}$, ferner die 1te, 2te, ..., n^{te} Verticalreihe resp. mit $(w-\alpha_\chi)^{n-1}, (w-\alpha_\chi)^{n-2}, \ldots, (w-\alpha_\chi)^0$, so sind die einzelnen Elemente der transformirten Determinante für $w = \alpha_\chi$ nur unendlich wie ein Ausdruck

$$L = a + b \log (w-\alpha_\chi) + \cdots + l[\log (w-\alpha_\chi)]^s,$$

(s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 6), und der Ausdruck [211

$$D(\mathfrak{y}_{\chi 1}, \mathfrak{y}_{\chi 2}, ,.., \mathfrak{y}_{\chi n}) (w-\alpha_\chi)^{-\sum_i r_i + \frac{n(n-1)}{2}} \tag{1.}$$

für $w = \alpha_\chi$ weder Null noch unendlich (s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 4).

Hieraus folgt auch, dass zur Berechnung des Ausdruckes (1.) für $w = \alpha_\chi$ nicht die Kenntniss der gesammten Reihenentwicklungen von $\mathfrak{y}_{\chi 1}, \mathfrak{y}_{\chi 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi n}$ nöthig ist, dass es vielmehr genügt, von jeder derselben nur die n ersten Glieder zu ermitteln, und dass die übrigen Glieder, da sie zum Ausdrucke (1.) für $w = \alpha_\chi$ nichts beitragen, bei der Berechnung desselben wegzulassen sind.

Der Werth des Ausdruckes (1.) für $w = \alpha_\chi$ heisse $\Gamma^{(\chi)}$.

Aus Gleichung (8.) No. 6 und vor. Nummer ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$D(\mathfrak{y}_{\chi 1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi,c-1}, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{y}_{\chi,c+1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi n}) (w-\alpha_\chi)^{-\sum_i r_i + \frac{n(n-1)}{2}} \tag{2.}$$

für $w = \alpha_\chi$ nicht unendlich wird.

Multiplicirt man aber die 1te, 2te, $c-1^{te}$, $c+1^{te}$, ..., n^{te} Horizontalreihe von $D(\mathfrak{y}_{\chi 1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi,c-1}, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{y}_{\chi,c+1}, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi n})$ resp. mit

$$(w-\alpha_\chi)^{-r_1}, (w-\alpha_\chi)^{-r_2}, \ldots, (w-\alpha_\chi)^{-r_{c-1}}, (w-\alpha_\chi)^{-r_{c+1}}, \ldots, (w-\alpha_\chi)^{-r_n},$$

ferner die 1te, 2te, ..., n^{te} Verticalreihe resp. mit $(w-\alpha_\chi)^{n-1}, (w-\alpha_\chi)^{n-2}, \ldots, (w-\alpha_\chi)^0$,

so ist also die so transformirte Determinante mit $(w-\alpha_\varkappa)^{-r_c}$ multiplicirt für $w=\alpha_\varkappa$ endlich. Die einzelnen Elemente dieser Determinante ausser denen der c^{ten} Horizontalreihe sind für $w=\alpha_\varkappa$ nur unendlich wie ein Ausdruck L. — Nach der zwischen η_a und den $\eta_{\varkappa c}$ bestehenden Beziehung (1.) No. 6 und vor. Nummer enthalten die einzelnen Glieder der c^{ten} Horizontalreihe mit $(w-\alpha_\varkappa)^{-r_1}$ multiplicirt nur Potenzen von $w-\alpha_\varkappa$, deren Exponenten in ihrem reellen Theile nicht negativ sind. Sind daher $U_1, U_2, \ldots, U_n$ die Unterdeterminanten der transformirten Determinante nach der c^{ten} Horizontalreihe, so liefern nur diejenigen Anfangsglieder der Reihenentwickelungen für $\eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \ldots, \eta_{\varkappa n}$ zum Ausdrucke (2.) für $w=\alpha_\varkappa$ nicht verschwindende Beiträge, welche in den Entwickelungen der $U_1, U_2, \ldots, U_n$ Potenzen von $w-\alpha_\varkappa$ hervorbringen, deren Exponenten nicht grösser sind als der reelle Theil von r_c-r_1.

Die Potenzen von $w-\alpha_\varkappa$ und $\log(w-\alpha_\varkappa)$ lassen sich innerhalb E in Reihen, welche nach positiven ganzen Potenzen von w fortschreiten, entwickeln, weil $\operatorname{mod} w < \operatorname{mod}\alpha_\varkappa$ innerhalb E.

Ebenso gelten für die Integrale η_a in der Umgebung von $w=0$, also 212] innerhalb E Reihenentwicklungen nach Potenzen von w und $\log w$ von der in Gleichung (3.) vor. Nummer angegebenen Form.

Man behalte nun zur Berechnung des Ausdruckes (2.) für $w=\alpha_\varkappa$ von den Reihenentwickelungen der Integrale $\eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \ldots, \eta_{\varkappa n}$ nur so viele Anfangsglieder bei, dass die Exponenten der Potenzen von $w-\alpha_\varkappa$ in den Entwickelungen der $U_1, U_2, \ldots, U_n$ nicht grösser sind als der reelle Theil von r_c-r_1, entwickele alsdann die sämmtlichen im Ausdrucke (2.) verbleibenden Potenzen von $w-\alpha_\varkappa$ und die Potenzen von $\log(w-\alpha_\varkappa)$ nach Potenzen von w, und setze auch für η_a die Reihe (3.) vor. Nummer, so nimmt der Ausdruck (2.) folgende Form an:

$$\text{(3.)} \qquad \varphi_{ac}^{(0)}(w) + \varphi_{ac}^{(1)}(w)\log w + \cdots + \varphi_{ac}^{(i)}(w)[\log w]^i,$$

wo $\varphi_{ac}^{(0)}(w), \varphi_{ac}^{(1)}(w), \ldots, \varphi_{ac}^{(i)}(w)$ nach Potenzen von w fortschreitende Reihen bedeuten, die innerhalb E convergent sind. Da aber der Ausdruck (2.) für $w=\alpha_\varkappa$ endlich ist, so folgt, dass auch die Form (3.) für $w=\alpha_\varkappa$ endlich ist.

Multiplicirt man daher die Gleichung (8.) No. 6 beiderseits mit

$$(w-\alpha_\varkappa)^{-\sum_i r_i + \frac{n(n-1)}{2}},$$

und setzt $w = \alpha_\varkappa$, so ergiebt sich:

$$(4.) \qquad \frac{C_{ca}^{(\varkappa)}}{C^{(\varkappa)}} = \frac{\varrho_{ac}^{(0)}(\alpha_\varkappa) + \varrho_{ac}^{(1)}(\alpha_\varkappa)\log\alpha_\varkappa + \cdots + \varrho_{ac}^{(i)}(\alpha_\varkappa)(\log\alpha_\varkappa)^i}{\Gamma^{(\varkappa)}}.$$

Aus den Gleichungen (5.), (6.), (7.) No. 6 folgt aber

$$(5.) \qquad b_{ac}^{(\varkappa)} = \frac{C_{ca}^{(\varkappa)}}{C^{(\varkappa)}},$$

so dass der Ausdruck (4.) den Werth von $b_{ac}^{(\varkappa)}$ liefert.

10.

Die durch Gleichung (1.) No. 6 festgestellten Relationen zwischen den $\mathfrak{y}_a$ und den $\mathfrak{y}_{\varkappa c}$ lassen sich unmittelbar als Relationen zwischen dem zum singulären Punkte $z = \infty$ zugehörigen Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) No. 4 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und dem zum singulären Punkte $z = z_\varkappa$ zugehörigen Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung $y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \ldots, y_{\varkappa n}$ darstellen.

Setzt man in der That in Gleichung (1.) No. 6 für w die Wurzel w_0 der Gleichung (3.) No. 4, welche für $z = \infty$ verschwindet, so gehen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ über, welche innerhalb G_1 dargestellt sind (s. No. 5 am Ende). Durch dieselbe Substitution für w gehen aber auch die in der Umgebung von $\alpha_\varkappa$ dargestellten Integrale $\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \ldots, \mathfrak{y}_{\varkappa n}$ in $y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \ldots, y_{\varkappa n}$ über, und es verwandeln sich die Darstellungen der ersteren in der Umgebung von $\alpha_\varkappa$ [213 in Darstellungen der letzteren in der Umgebung von $z_\varkappa$, da die erstere Umgebung ganz innerhalb des Grenzkreises K, die letztere innerhalb F' fällt.

Die Gleichungen (1.) No. 6 geben also:

$$(1.) \qquad y_a = \sum_1^n{}_c\, b_{ac}^{(\varkappa)} y_{\varkappa c}, \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, n \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m+1 \end{pmatrix}$$

wo die Grössen $b_{ac}^{(\varkappa)}$ durch die Gleichung (3.) No. 7, oder in dem Falle, dass die Differentialgleichung zu der in No. 8 erwähnten Klasse gehört, durch die Gleichungen (4.) und (5.) vor. Nummer bestimmt sind.

11.

Wir gehen nun dazu über, innerhalb G_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) No. 4 zur Darstellung zu bringen.

Zu dem Ende setzen wir das System y_α, welches innerhalb G_1 dargestellt worden, über die Absonderungscurve fort, und zwar längs eines zwischen zwei beliebigen der singulären Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ liegenden Theiles derselben, z. B. zwischen z_1 und z_2. Nennen wir einen zwischen $z_\varkappa$ und $z_{\varkappa+1}$ liegenden Theil der Absonderungscurve $l_\varkappa$, so haben die Integrale y_α auf beiden Seiten von l_1 unendlich wenig von einander verschiedene Werthe, also sind die Werthe der y_α längs l_1 innerhalb G_2 durch dieselben Reihen No. 5 gegeben wie innerhalb G_1.

Um die Ausdrücke für die y_α längs $l_\varkappa$ innerhalb G_2 zu erhalten, verfahren wir folgendermassen:

Es gehe $y_{\varkappa\alpha}$ nach einem Umlaufe um $z_\varkappa$ über in:

$$(1.) \qquad y'_{\varkappa\alpha} = \pi^{(1)}_{\varkappa\alpha} y_{\varkappa 1} + \pi^{(2)}_{\varkappa\alpha} y_{\varkappa 2} + \cdots + \pi^{(n)}_{\varkappa\alpha} y_{\varkappa n}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

so sind die Grössen π bestimmbar, nachdem das System $y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \ldots, y_{\varkappa n}$ aufgestellt ist. Bezeichnen wir die Substitution

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} \pi^{(1)}_{\varkappa 1} & \pi^{(2)}_{\varkappa 1} & \cdots & \pi^{(n)}_{\varkappa 1} \\ \pi^{(1)}_{\varkappa 2} & \pi^{(2)}_{\varkappa 2} & \cdots & \pi^{(n)}_{\varkappa 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi^{(1)}_{\varkappa n} & \pi^{(2)}_{\varkappa n} & \cdots & \pi^{(n)}_{\varkappa n} \end{array} \right\}$$

mit $\Pi_\varkappa$ und die Substitution:

$$(3.) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} b^{(\varkappa)}_{11} & b^{(\varkappa)}_{12} & \cdots & b^{(\varkappa)}_{1n} \\ b^{(\varkappa)}_{21} & b^{(\varkappa)}_{22} & \cdots & b^{(\varkappa)}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b^{(\varkappa)}_{n1} & b^{(\varkappa)}_{n2} & \cdots & b^{(\varkappa)}_{nn} \end{array} \right\}$$

214] mit $B_\varkappa$, so wie die inverse Substitution der letzteren mit $B^{(-1)}_\varkappa$. Wendet man nunmehr auf $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Substitution

$$(4.) \qquad B_2 \Pi_2 B_2^{(-1)} B_3 \Pi_3 B_3^{(-1)} \ldots B_\varkappa \Pi_\varkappa B_\varkappa^{(-1)} = S_\varkappa$$

an, so erhält man die Werthe des fortgesetzten Fundamentalsystems längs $l_\varkappa$ innerhalb G_2, wenn man in den erhaltenen n linearen Functionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ für die letzteren Functionen die Werthe der Reihen aus No. 5 für die Punkte längs $l_\varkappa$ innerhalb G_1 setzt.

Hiermit sind die Werthe der y_α längs der Absonderungscurve innerhalb G_2 vermittelst der in No. 5 für das Gebiet G_1 bestimmten Reihen ausdrückbar.

12.

Da die Integrale der Differentialgleichung (1.) No. 4 innerhalb G_2 eindeutig, endlich und continuirlich sind, so ergiebt sich als Darstellung der Fortsetzungen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ innerhalb G_2:

$$(1.) \qquad y_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{y_\alpha(t)}{t-s}\,dt, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

das Integral erstreckt über den innerhalb G_2 befindlichen Rand der Absonderungscurve C_ϱ. Es bedeutet hierbei $y_\alpha(t)$ die Function y_α, wenn statt der Variablen s die Variable t gesetzt wird.

Substituirt man in (1.)

$$(2.) \qquad t = F(w) \quad \text{(s. No. 4 Gleichung (3.))},$$

so erhält man

$$(3.) \qquad y_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\mathfrak{y}_\alpha(w)}{F(w)-s}F'(w)\,dw,$$

das Integral über den äusseren Rand des Kreises E erstreckt.

Zur wirklichen Berechnung des Integrals (3.) zerlegt man dasselbe in Theilintegrale, erstreckt längs je eines Theiles $\lambda_\varkappa$ der Peripherie, der zwischen $\alpha_\varkappa$ und $\alpha_{\varkappa+1}$ befindlich ist, so dass, wenn man ein solches Theilintegral mit $\Lambda_\varkappa$ bezeichnet:

$$(4.) \qquad y_\alpha = \frac{1}{2\pi i}[\Lambda_1 + \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_{m+1}].$$

In der vor. Nummer ist aber gezeigt worden, wie $y_\alpha(t)$ längs des Theiles $l_\varkappa$ innerhalb G_2, also, was dasselbe ist, $y_\alpha(w)$ längs $\lambda_\varkappa$ ausserhalb E mit Hülfe der Reihen, die in No. 5 für $y_1, y_2, \ldots, y_n$ oder, was dasselbe ist, für $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ [215 gegeben worden, ausdrückbar ist. Diese Ausdrücke sind auch in die bezüglichen $\Lambda_\varkappa$ zu substituiren. Alsdann liefert Gleichung (4.) das in No. 4, II. geforderte Fundamentalsystem $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

13.

Nachdem wir nun in No. 5 und 12 für jedes der Gebiete G_1 und G_2 einheitliche analytische Darstellungen eines Fundamentalsystems von Integralen

der Differentialgleichung (1.) No. 4 gegeben, von der Beschaffenheit, dass jede innerhalb des ganzen Gebietes G_1 oder G_2 gültig ist und innerhalb G_1 die den verschiedenen Umläufen um $z = \infty$ entsprechenden Werthe wie eine Potenzreihe liefert, muss noch, wie in No. 4, III. gefordert wurde, gezeigt werden, wie von dem einen Gebiete zu dem anderen übergegangen wird. Es ist demnach folgende Aufgabe zu lösen. Eine Curve L führe von einem Punkte A_1 innerhalb G_1 zu einem Punkte A_2 innerhalb G_2, nachdem sie ein oder mehrere Mal die Absonderungscurve überschritten. Gegeben seien die Indices der Curventheile $l_\varkappa$, welche überschritten werden, die Werthe der y_α in A_2 sollen unmittelbar berechnet werden, ohne die Werthe derselben für die Continuität der Zwischenwerthe der Curve L zu berechnen.

Es überschreite L der Reihe nach die Absonderungscurve in den Theilen $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma, l_\delta, \ldots, l_\mu$, wo auch zwei oder mehrere Indices einander gleich sein können, wodurch das mehrfache Überschreiten eines Theiles einbegriffen ist. Hierbei wird L abwechselnd in G_2 ein- und austreten, und zuletzt längs l_μ eintreten. Nach No. 11 ist beim Eintritt aus G_1 in G_2 längs $l_\varkappa$ auf das System $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Substitution $S_\varkappa$ anzuwenden, also umgekehrt beim Austritt aus G_2 in G_1 die inverse Substitution $S_\varkappa^{(-1)}$. Demnach hat man auf $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Substitution:

$$S_\alpha S_\beta^{(-1)} S_\gamma S_\delta^{(-1)} \ldots S_\mu \tag{1.}$$

anzuwenden, in den erhaltenen linearen Functionen für die y_α ihre Darstellungen aus vor. Nummer zu setzen, und aus den so erhaltenen Ausdrücken unmittelbar die Werthe der y_α in A_2 zu berechnen.

14.

Ist ein beliebiges Integral y der Differentialgleichung (1.) No. 4 dadurch gegeben, dass für $z = A_1$, y nebst seinen $n-1$ ersten Ableitungen vorgeschriebene Werthe annehmen, so ist zunächst auf bekannte Weise (s. meine Abhandlung, 216] Bd. 66, No. 2) y als lineare homogene Function des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \ldots, y_n$ darzustellen, wodurch sein Ausdruck für das Gebiet G_1 determinirt ist. Es sei

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \cdots + K_n y_n, \tag{1.}$$

so ist in vor. Nummer bestimmt worden, welche Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in A_2 erhalten. Die Relation (1.) ist aber sowohl für das Gebiet G_2 als für das Gebiet G_1 gültig, folglich sind nur die nach vor. Nummer für die y_n eruirten Werthe in (1.) einzusetzen, um den Werth von y in A_2 zu erhalten.

15.

Wir wollen das Vorhergehende durch das Beispiel einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier endlichen singulären Punkten erläutern. Es sei nämlich:

$$(1.)\quad (z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)\frac{d^2y}{dz^2}+\mu(z-z_1)(3z^2+2z_1z-z_2^2)\frac{dy}{dz}-\mu(3z^2+2z_1z-z_2^2)y=0,$$

wo μ positiv und keine ganze Zahl.

Diese Differentialgleichung hat das Integral

$$(2.)\qquad y_1=z-z_1.$$

Bezeichnet η ein zweites Integral, welches mit y_1 ein Fundamentalsystem bildet, so ist

$$\begin{vmatrix} \frac{d\eta}{dz} & \eta \\ \frac{dy_1}{dz} & y_1 \end{vmatrix} = \frac{C}{P^\mu},$$

wo

$$P=(z+z_1)(z^2-z_2^2)$$

und C eine von Null verschiedene Constante ist (s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2, Gleichung (3.)). Hieraus folgt

$$\eta = Cy_1\int\frac{dz}{(z-z_1)^2P^\mu}+C'y_1,$$

wo C' eine neue Constante.

Daher ist

$$(3.)\qquad y_2=(z-z_1)\int_\infty^z\frac{dz}{(z-z_1)^2P^\mu}$$

ein Integral der Differentialgleichung (1.).

Da eine Gleichung der Form

$$K_1y_1+K_2y_2=0,$$

217] wo K_1, K_2 Constanten bedeuten, nicht identisch besteht, so bilden y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem.

16.

Es werde zunächst vorausgesetzt, dass die vier Punkte $\pm z_1$, $\pm z_2$ nicht in gerader Linie liegen, und auf die Differentialgleichung (1.) vor. Nummer die Substitution aus No. 12, Abth. I, Gleichung (1.) angewendet:

$$z = \frac{1}{2w}(\gamma w^2 + \delta), \tag{1.}$$

wo

$$\gamma = z_1 - z_2 i, \quad \delta = z_1 + z_2 i,$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$\left\{ \begin{array}{l} w^2(\gamma^4 w^4 - \delta^4)(w^4-1)(\gamma w^2 - \delta)\frac{d^2y}{dw^2} + [-2\delta(w^4-1)(\gamma^4 w^4 - \delta^4) + \\ \qquad H_4(w)\mu(w-1)(\gamma w - \delta)(\gamma w^2 - \delta)^2]w\frac{dy}{dw} - \mu H_4(w)(\gamma w^2 - \delta)^2 y = 0, \end{array} \right. \tag{2.}$$

wo

$$H_4(w) = 3\gamma^2 w^4 + 4\gamma z_1 w^3 + (6\gamma\delta - 4z_2^2)w^2 + 4\delta z_1 w + 3\delta^2.$$

Macht man dieselbe Substitution in y_1, y_2, so erhält man ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (2.):

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{(w-1)(\gamma w - \delta)}{2w}, \\ \eta_2 = 2^{2\mu+1}\eta_1 \int_0^w \frac{w^{2\mu}(\gamma w^2 - \delta)\,dw}{(w-1)^2(\gamma w - \delta)^2 q^\mu}, \end{array} \right. \tag{3.}$$

wo

$$q = \frac{(w^4-1)(\gamma^4 w^4 - \delta^4)}{(w-1)(\gamma w - \delta)}.$$

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) vor. Nummer sind ausser $z = \infty : z = \pm z_1$, $z = \pm z_2$, die der Differentialgleichung (2.) dieser Nummer sind ausser $w = 0$, dem Mittelpunkte des Grenzkreises K, die Punkte $\pm 1, \pm i$, welche innerhalb K auf der Peripherie von E liegen, und die Punkte $\pm\frac{\delta}{\gamma}, \pm i\frac{\delta}{\gamma}, \pm\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, wovon die vier ersten ausserhalb K, die beiden letzten auf der Peripherie von K liegen, wie sich aus No. 12 Abth. I ergiebt, wenn z_1, z_2 so geordnet sind, dass

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 > 0.$$

Die zum singulären Punkte $w = 0$ gehörige determinirende Fundamental- [218
gleichung der Differentialgleichung (2.) ist:

$$r^2 + (1-3\mu)r - 3\mu = 0. \tag{4.}$$

Es sind daher η_1, η_2 resp. die zu den Wurzeln derselben -1, 3μ als Exponenten gehörigen Integrale derselben.

Die Absonderungscurve C_ε ist in diesem Falle eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Anfange der z, deren grosse Axe in die Richtung der Geraden (Gleichung (10.) No. 12, Abth. I) fällt, und deren Axenlängen sich aus den Gleichungen (6.) ebendas. ergeben, wenn man $r = 1$ setzt.

17.

Um die Darstellung von y_2 innerhalb G_1 zu erhalten, beschränke man w in η_2 Gleichung (3.) vor. Nummer auf die Fläche von E, so ist der Factor von $w^{2\mu}$ unter dem Integralzeichen innerhalb E nach positiven ganzzahligen Potenzen von w entwickelbar, da $\mod \frac{\gamma}{\delta} < 1$. Es sei demnach

$$\frac{\gamma w^2 - \delta}{(w-1)^2(\gamma w - \delta)^2 q^\mu} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 w + \varepsilon_2 w^2 + \cdots, \tag{1.}$$

so ergiebt sich innerhalb E:

$$\eta_2 = 2^{2\mu+1}\eta_1 w^{2\mu+1}\left[\frac{\varepsilon_0}{3\mu+1} + \frac{\varepsilon_1}{3\mu+2}w + \frac{\varepsilon_2}{3\mu+3}w^2 + \cdots\right]. \tag{2.}$$

Nach No. 2 ist hierin w_0 statt w zu setzen, um y_2 innerhalb G_1 darzustellen. Nun ist nach Gleichung (1.) vor. Nummer

$$w_0 = \frac{z - \sqrt{z^2 - \gamma\delta}}{\gamma}, \tag{3.}$$

wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse innerhalb G_1 dadurch bestimmt ist, dass für $z = \infty$, $w_0 = 0$ ist. Denn innerhalb G_1 ist die Wurzelgrösse von Null verschieden, weil dem Werthe $z = \sqrt{\gamma\delta}$ der Werth $w_0 = \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ entspricht, und da dieser Punkt sich ausserhalb E befindet, so ist auch $z = \sqrt{\gamma\delta}$ ausserhalb G_1 zu suchen.

Demnach ist innerhalb G_1:

$$y_2 = 2^{2\mu+1}(z-\varepsilon_1)\left(\frac{z-\sqrt{z^2-\gamma\delta}}{\gamma}\right)^{2\mu+1}\sum_0^\infty{}_\alpha \frac{\varepsilon_\alpha}{3\mu+\alpha+1}\left(\frac{z-\sqrt{z^2-\gamma\delta}}{\gamma}\right)^\alpha. \tag{A.}$$

219] 18.

In der Umgebung von $w = 1$ ist

$$(1.) \qquad S = \frac{w^{2\mu}(\gamma w^2 - \delta)}{(w-1)^2(\gamma w - \delta)^2 q^\mu}$$

in einer Reihe der Form:

$$(2.) \qquad S = \frac{\zeta_{-2}}{(w-1)^2} + \frac{\zeta_{-1}}{w-1} + \zeta_0 + \zeta_1(w-1) + \cdots$$

darstellbar, wo

$$(3.) \qquad \zeta_{-1} = \left[\frac{d}{dw}(w-1)^2 S\right]_{w=1}.$$

Es sei daher ε ein fester Punkt in der Umgebung von $w = 1$, so ist in derselben Umgebung nach Gleichung (3.) No. 16:

$$(4.) \quad \eta_2 = 2^{2\mu+1}\eta_1 \int_0^\varepsilon S dw - 2^{2\mu+1}\eta_1 E + 2^{2\mu+1}\eta_1 \left[\frac{-\zeta_{-2}}{w-1} + \zeta_{-1}\log(w-1) + \sum_0^\infty{}_a \frac{\zeta_a}{a+1}(w-1)^{a+1}\right],$$

wo E ein Constante ist, deren Werth:

$$E = \frac{-\zeta_{-2}}{\varepsilon - 1} + \zeta_{-1}\log(\varepsilon - 1) + \sum_0^\infty{}_a \frac{\zeta_a}{a+1}(\varepsilon-1)^{a+1}.$$

Ist η_2' der Werth von η_2, in welchen dasselbe nach einem Umlaufe um 1 übergeht, so folgt aus Gleichung (3.), dass

$$(5.) \qquad \eta_2' = 2^{2\mu+2}\pi i \zeta_{-1}\eta_1 + \eta_2.$$

19.

Die zum singulären Punkte $w = i$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.) No. 16 ist

$$(1.) \qquad r(r-1) + \mu r = 0.$$

Es sei η_{21}, η_{22} das zu den Wurzeln $0, 1-\mu$ derselben als Exponenten gehörige Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung, so ist in der Umgebung von $w = i$

$$(2.) \qquad \eta_{21} = \eta_1, \quad \eta_{22} = (w-i)^{1-\mu}\psi_{22},$$

wo ψ_{22} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w-i$ fortschreitende Reihe ist. Es ist für $w = i$, $\eta_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$; ferner nehmen wir $\psi_{22}(i) = 1$ an.

Es sei η_2 wie bisher dadurch fixirt, dass sein Ausdruck innerhalb E durch Gleichung (2.) No. 17 gegeben ist, so ist in dem Flächentheile, [220 welcher der Umgebung von $w = i$ und der Fläche von E gemeinschaftlich ist:

$$\eta_2 = b_1^{(2)}\eta_1 + b_2^{(2)}(w-i)^{1-\mu}\psi_{22}. \tag{3.}$$

Dividirt man diese Gleichung durch η_1 und differentiirt nach w, so erhält man:

$$2^{2\mu+1}S = b_2^{(2)}(w-i)^{-\mu}\chi_{22}(w), \tag{4.}$$

wo $\chi_{22}(w)$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w-i$ fortschreitende Reihe bedeutet, welche für $w = i$ den Werth $\frac{1-\mu}{z_2-z_1}$ hat. Die Gleichung (4.) giebt daher, nachdem man beiderseits mit $(w-i)^\mu$ multiplicirt, für $w = i$

$$b_2^{(2)} = \frac{i^{2\mu}z_1}{2^\mu(1-\mu)(z_2-z_1)[z_1z_2(z_1+z_2)]^\mu}. \tag{5.}$$

Setzen wir

$$\frac{1}{1.2\ldots\alpha}\left[\frac{d^\alpha S(w-i)^\mu}{dw^\alpha}\right]_{w=i} = s_{2\alpha},$$

mit der Nebenbestimmung, dass

$$s_{20} = [S(w-i)^\mu]_{w=i}$$

oder

$$s_{20} = 0,$$

je nachdem $m > 0$ oder $m = 0$, wenn m die grösste ganze in μ enthaltene Zahl bedeutet, so dass

$$\mu = m + \lambda, \quad 0 < \lambda < 1,$$

so ist

$$\int\left[S - (w-i)^{-\mu}\sum_0^m{}_\alpha s_{2\alpha}(w-i)^\alpha\right]dw$$

für $w = i$ endlich. Es folgt daher aus Gleichung (3.), dass ebenso

$$b_2^{(2)}(w-i)^{1-\mu}\psi_{22} - 2^{2\mu+1}\eta_1(w-i)^{1-\mu}\sum_0^m{}_\alpha\frac{s_{2\alpha}(w-i)^\alpha}{\alpha+1-\mu}$$

für $w = i$ endlich ist, und demnach von der Form

$$(w-i)^{1-\varepsilon}\tilde{\omega}_{22}$$

ist, wo $\tilde{\omega}_{22}$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w-i$ fortschreitende Reihe bedeutet.

Es ergiebt sich daher aus Gleichung (3.)

$$(6.)\quad \begin{cases} 2^{2\mu+1}\mathfrak{y}_1 \int_0^w \Big[S-(w-i)^{-\mu}\sum_0^m{}_a s_{2a}(w-i)^a\Big]dw \\ \qquad = b_1^{(2)}\mathfrak{y}_1 + (w-i)^{1-\mu}\tilde{\omega}_{22} + 2^{2\mu+1}\mathfrak{y}_1(-i)^{1-\mu}\sum_0^m{}_a \frac{s_{2a}(-i)^a}{a+1-\mu}. \end{cases}$$

221] Für $w=i$ giebt diese Gleichung

$$(7.)\quad b_1^{(2)} = 2^{2\mu+1}\int_0^i \Big[S-(w-i)^{-\mu}\sum_0^m{}_a s_{2a}(w-i)^a\Big]dw - 2^{2\mu+1}(-i)^{1-\mu}\sum_0^m{}_a \frac{(-i)^a s_{2a}}{a+1-\mu}.$$

Das Integral in dieser Gleichung erstreckt sich innerhalb E, und die Berechnung desselben ist auszuführen, indem sowohl S als auch die Potenzen $(w-i)^{-\mu+a}$ nach Potenzen von w entwickelt werden, wodurch der Ausdruck unter dem Integralzeichen in eine nach Potenzen von w fortschreitende Reihe verwandelt wird, die eine Integration bis $w=i$ zulässt.

20.

Die Gleichung (1.) vor. Nummer ist auch die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.) No. 16 für die singulären Punkte $w=-1$, $w=-i$. Bezeichnen wir die zugehörigen Fundamentalsysteme resp. mit $\mathfrak{y}_{21}, \mathfrak{y}_{22}$ und $\mathfrak{y}_{41}, \mathfrak{y}_{42}$, so dass

$$(1.)\qquad \mathfrak{y}_{21} = \mathfrak{y}_1, \quad \mathfrak{y}_{22} = (w+1)^{1-\mu}\psi_{22},$$

$$(2.)\qquad \mathfrak{y}_{41} = \mathfrak{y}_1, \quad \mathfrak{y}_{42} = (w+i)^{1-\mu}\psi_{42},$$

wo ψ_{22}, ψ_{42} nach positiven ganzzahligen Potenzen resp. von $w+1$ und $w+i$ fortschreitende Reihen sind, die resp. für $w=-1$ und $w=-i$ den Werth Eins haben.

Es ist alsdann analog der Gleichung (3.) vor. Nummer

$$(3.)\qquad \mathfrak{y}_2 = b_1^{(2)}\mathfrak{y}_1 + b_2^{(2)}(w+1)^{1-\mu}\psi_{22},$$

$$(4.)\qquad \mathfrak{y}_2 = b_1^{(4)}\mathfrak{y}_1 + b_2^{(4)}(w+i)^{1-\mu}\psi_{42}.$$

Es ergiebt sich analog der Gleichung (5.) vor. Nummer

$$(5.)\qquad b_2^{(2)} = \frac{i^{\mu+1}z_1z_2}{2(1-\mu)z_1^2[z_2(z_2^2-z_1^2)]^\mu},$$

$$(6.)\qquad b_2^{(4)} = \frac{-i^{2\mu}z_1}{(1-\mu)2^\mu(z_1+z_2)[z_1(z_2-z_1)]^\mu},$$

und wenn man:

$$\frac{1}{1.2\ldots\alpha}\left[\frac{d^\alpha S(w+1)^\mu}{dw^\alpha}\right]_{w=-1} = s_{3\alpha},$$

$$\frac{1}{1.2\ldots\alpha}\left[\frac{d^\alpha S(w+i)^\mu}{dw^\alpha}\right]_{w=-i} = s_{4\alpha}$$

setzt, so ist analog der Gleichung (7.) vor. Nummer

$$(7.)\quad b_1^{(3)} = 2^{3\mu+1}\int_0^{-1}\left[S-(w+1)^{-\mu}\sum_0^m{}_\alpha\, s_{3\alpha}(w+1)^\alpha\right]dw - 2^{3\mu+1}\sum_0^m{}_\alpha\frac{s_{3\alpha}}{\alpha+1-\mu}, \qquad [222$$

$$(8.)\quad b_1^{(4)} = 2^{3\mu+1}\int_0^{-i}\left[S-(w+i)^{-\mu}\sum_0^m{}_\alpha\, s_{4\alpha}(w+i)^\alpha\right]dw - 2^{3\mu+1}i^{1-\mu}\sum_0^m{}_\alpha\frac{i^\alpha s_{4\alpha}}{\alpha+1-\mu},$$

worin die Integrale innerhalb E zu erstrecken und wie das Integral in Gleichung (7.) zu berechnen sind.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{y}_2^{(2)}, \mathfrak{y}_2^{(3)}, \mathfrak{y}_2^{(4)}$ die Werthe, in welche $\mathfrak{y}_2$ nach einem Umlauf resp. um $i, -1, -i$ übergeht, so folgen aus den Gleichungen (3.) vor. Nummer und (3.) und (4.) dieser Nummer die der Gleichung (4.) No. 18 analogen Gleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} \mathfrak{y}_2^{(2)} = b_1^{(2)}[1-\alpha]\mathfrak{y}_1 + \alpha\mathfrak{y}_2, \\ \mathfrak{y}_2^{(3)} = b_1^{(3)}[1-\alpha]\mathfrak{y}_1 + \alpha\mathfrak{y}_2, \\ \mathfrak{y}_2^{(4)} = b_1^{(4)}[1-\alpha]\mathfrak{y}_1 + \alpha\mathfrak{y}_2, \end{cases}$$

wo

$$\alpha = e^{2\pi i(1-\mu)}$$

gesetzt ist.

Die Bestimmung der Grössen $b_1^{(\varkappa)}, b_2^{(\varkappa)}$ hätte nach Vorschrift der No. 9 erfolgen können, wenn man aus der Differentialgleichung (2.) No. 16 für $\mathfrak{y}_2$ und die $\mathfrak{y}_{\varkappa c}$ die hinreichende Anzahl von Gliedern ihrer Reihenentwickelungen abgeleitet hätte. Wir zogen es aber bei unserem Beispiele vor, die Berechnung dieser Grössen direct an die Form des Integrals $\mathfrak{y}_2$ Gleichung (3.) No. 16 anzuknüpfen.

21.

Nach No. 12 ist innerhalb G_2

$$(1.)\qquad y_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\mathfrak{y}_2(\gamma w^2-\delta)}{w(\gamma w^2-2\varepsilon w+\delta)}dw,$$

das Integral über den äusseren Rand des Kreises E erstreckt. Wir haben nach der dortigen Vorschrift dasselbe in vier Integrale zu zerlegen, erstreckt über den äusseren Rand der vier Quadranten, in welche die singulären Punkte ± 1, $\pm i$ die Peripherie zerfällen.

Setzen wir

$$\frac{\gamma w^2 - \delta}{w(\gamma w^2 - 2\varepsilon w + \delta)} = R, \tag{2.}$$

so ist

$$y_2 = \frac{1}{2\pi i}\Big[\int_1^i \eta_2 R dw + \int_i^{-1} \eta_2 R dw + \int_{-1}^{-i} \eta_2 R dw + \int_{-i}^{1} \eta_2 R dw\Big], \tag{3.}$$

223] die sämmtlichen Integrale längs des äusseren Randes des entsprechenden Quadranten erstreckt.

Nach den Gleichungen (9.) vor. Nummer und den Vorschriften der No. 11—12 ist

$$\left\{\begin{aligned} \int_i^{-1} \eta_2 R dw &= \int_i^{-1} [b_1^{(2)}(1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2] R dw, \\ \int_{-1}^{-i} \eta_2 R dw &= \int_{-1}^{-i} [(b_1^{(2)} + b_1^{(3)}\alpha)(1-\alpha)\eta_1 + \alpha^2\eta_2] R dw, \\ \int_{-i}^{1} \eta_2 R dw &= \int_{-i}^{1} [(b_1^{(2)} + b_1^{(3)}\alpha + b_1^{(4)}\alpha^2)(1-\alpha)\eta_1 + \alpha^3\eta_2] R dw, \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

wo die Integrale linkerhand längs des äusseren, die entsprechenden rechterhand längs des inneren Randes des von den beiden Grenzen des Integrals abgetheilten Quadranten zu erstrecken sind. Werden die Werthe (4.) in Gleichung (3.) substituirt, so kann man in jedem der vier Integrale für η_2 die Entwickelung nach Potenzen von w aus Gleichung (2.) No. 17 setzen, und die Integrationen vollziehen.

Man besitzt also in der Gleichung (3.) nach dieser Substitution eine einfach berechenbare Entwickelung gültig im ganzen Gebiete G_2.

Der Übergang aus dem einen Gebiete G_1 in das andere G_2 geschieht mit Hülfe der in No. 18—20 enthaltenen Formeln nach Vorschrift von No. 13 und 14.

Liegen die vier Punkte $\pm z_1$, $\pm z_2$ in gerader Linie, so ist die Differentialgleichung (1.) No. 15 nach No. 13 Abth. I zu transformiren.

Greifswald, den 30. Juli 1872.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 364, Zeile 2 würden statt würde,
„ 365, „ 10 v. u. so ist, da statt so ist auch, da,
„ 366, Gleichung (4.) $w_1 i \frac{d\varphi_1}{dr}$ statt $w_1 \frac{d\varphi_1}{dr}$,
„ 371, Zeile 10 Function $\psi(w)$ von w statt Function von w,
„ 372, „ 14 v. u. und auf dessen statt und dessen,
„ 379, „ 8 v. u. $m+1^{\text{ten}}$ statt $m+1$,
„ 386, „ 3 welcher statt welche, z_0 statt z,
„ 394, „ 7 ist statt sind,
„ 398, „ 5 Horizontalreihe statt Verticalreihe,
„ 402, „ 4 liefert statt liefern,
„ „ , „ 14 v. u. hat man statt ist.

2) Wie zuerst Herr NEKRASSOFF bemerkt hat (siehe die in russischer Sprache abgefasste Abhandlung des Herrn ANISSIMOFF „Die Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen“ in den Wissenschaftlichen Berichten der Universität Moskau, Mathematische Abtheilung, Ausgabe IX, 1889) ist die in dem Satze am Schlusse der No. 3 (S. 369) enthaltene Regel für die Bestimmung des Radius des Grenzkreises nicht allgemein gültig. Vergl. hierzu die Abhandlungen:

FUCHS, Bemerkung zu der Arbeit im Bande 75, S. 177 dieses Journals, Journal für die reine u. angew. Mathematik, Bd. 106 (1890), S. 1—4;

NEKRASSOFF, Über den FUCHSschen Grenzkreis, Mathematische Sammlung (Zeitschrift der Moskauer mathematischen Gesellschaft) Bd. 14, 4 (1890) S. 537—548 (russisch);

— , Über den FUCHSschen Grenzkreis, Mathematische Annalen, Bd. 38 (1890), S. 82—90;

FUCHS, Über eine Abbildung durch eine rationale Function, Journal für die reine u. angew. Mathematik, Bd. 108 (1891), S. 181—192;

ANISSIMOFF, Über den FUCHSschen Grenzkreis, Mathematische Annalen, Bd. 40 (1892), S. 145—147;

Anmerkung der Annalen-Redaction, ebenda S. 147—148;

ANISSIMOFF, Der FUCHSsche Grenzkreis, Warschau, 1892 (russisch);

— , Bemerkung über den FUCHSschen Grenzkreis, Mathematische Sammlung, Bd. 16 (1892), S. 234—235 (russisch);

NEKRASSOFF, Erklärungen, veranlasst durch die Abhandlung des Herrn Prof. FUCHS im CVIII. Bande des Journals für Mathematik, Mathematische Sammlung, Bd. 16 (1892), S. 219—227 (russisch);

FUCHS, Über eine besondere Gattung von rationalen Curven mit imaginären Doppelpunkten, Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissensch. 1900, S. 74—78.

Auf den Gegenstand der ersten Abtheilung der vorstehenden Arbeit beziehen sich noch die Abhandlungen XV, XVII, XVIII dieses Bandes.

Der Schluss auf S. 398, Zeile 4, 3 v. u. bedarf noch einer genaueren Begründung, da aus der Thatsache, dass eine Function in einem Punkte der Peripherie des Convergenzkreises, der zu einer ein Element dieser Function darstellenden Potenzreihe gehört, einen endlichen Werth besitzt, nicht ohne Weiteres gefolgert werden kann, dass diese Potenzreihe in jenem Punkte auch convergirt. Für den hier vorliegenden Fall und noch für gewisse Fälle allgemeinerer Natur, hat Herr THOMÉ (Journal für die reine u. angew. Mathematik, Bd. 87 (1879), S. 247—257 und 331—349, vergl. Bd. 95 (1883), S. 97, Bd. 100 (1887), S. 167 ff.) die Frage der Convergenz, der in Betracht kommenden Potenzreihen in den Punkten der Peripherie ihres Convergenzkreises mit Hülfe der Theorie der FOURIERschen Reihen erledigt; man vergl. auch die Darstellung und Anwendung der THOMÉschen Untersuchungen im »Handbuche der Theorie der linearen Differentialgleichungen«, Bd. I (1895), S. 228 ff. und S. 454 ff. SCH.

XV.

ÜBER DIE DARSTELLUNG DER FUNCTIONEN COMPLEXER VARIABLEN.

Anhang zur Abhandlung Bd. 75 dieses Journals S. 177 ff.[1]).

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76, 1874, S. 175—176.)

Um eine Function $f(z)$ der complexen Variablen z innerhalb des in [175 obiger Abhandlung mit G_1 bezeichneten Gebietes darzustellen, ging ich (s. S. 203[2]) der Abh.) von der Entwickelung aus, welche für die durch die rationale Substitution

$$z = F(w) \tag{1.}$$

transformirte Function

$$f(F(w)) = f_1(w) \tag{2.}$$

in der Umgebung von $w = 0$, demnach innerhalb E gültig ist. Dieselbe sei:

$$f_1(w) = \phi_0(w). \tag{3.}$$

Um nun für jeden Punkt z der Fläche G_1 den Werth $f(z)$ der Function zu bestimmen, muss man den zu z gehörigen Werth $w = w_0$ berechnen, und in die Gleichung (2.) substituiren.

Es wurde dort (S. 204[3]), No. 3) bemerkt, dass die Entwickelbarkeit von $f(z)$ innerhalb G_1 von der Kenntniss des Verlaufes des Zweiges w_0 der alge-

---

[1]) Abh. XIV, S. 361—410 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 389 dieses Bandes. Sch.

[3]) S. 390 dieses Bandes. Sch.

braischen Function w von z aus Gleichung (1.) abhängig sei, und hinzugefügt, dass die algebraischen Functionen bei der Darstellung transcendenter Functionen mit Recht als bekannte Elemente vorausgesetzt und verwerthet werden dürften. Auf diese Bemerkung ist auch auf S. 178[1]) in der Einleitung hingewiesen worden.

Der Zweck dieser Notiz ist nachzuweisen, dass die ausgesprochene Voraussetzung der allgemeinen Kenntniss des Verlaufes der Zweige algebraischer Functionen für unseren Zweck überflüssig sei, und damit eine Schwierigkeit, welche der Anwendung der dort entwickelten Principien entgegenstehen könnte, als eine nur scheinbare erkennen zu lassen.

In der That ist dort (s. S. 194[2])) nachgewiesen, dass die Flächen G_1 und E durch die Substitution (1.) vermittelte Abbildungen von einander sind, dass demnach jedem Punkte z innerhalb G_1 ein und nur ein Punkt w der Fläche E nach Gleichung (1.) entspricht.

176] Da der Kreis E die Einheit zum Radius hat, so ergiebt sich, dass unter den Wurzeln w der Gleichung (1.) für jedes z innerhalb G_1 stets eine und nur eine vorhanden ist, deren Modul kleiner oder gleich Eins.

Diese Wurzel ist der gesuchte Werth $w = w_0$.

Man kann demnach zu jedem z innerhalb G_1 den zugehörigen Werth $w = w_0$ eindeutig finden, und alsdann mit Hülfe der Gleichung (3.) den Werth von $f(z)$ berechnen.

So würde in dem Beispiele S. 218[3]) Gleichung (3.) ebendaselbst für ein bestimmtes z das Vorzeichen der Quadratwurzel so zu wählen sein, dass der Modul von w_0 kleiner oder gleich Eins. Der andere Wurzelwerth der Gleichung

$$\gamma w^2 - 2zw + \delta = 0$$

hat dann in der That einen die Einheit übertreffenden Modul, weil

$$\mathrm{mod}\,\frac{\delta}{\gamma} > 1.$$

Greifswald im April 1873.

1) S. 362 dieses Bandes. Sch.
2) S. 379 dieses Bandes. Sch.
3) S. 405 dieses Bandes. Sch.

XVI.

ÜBER RELATIONEN, WELCHE FÜR DIE ZWISCHEN JE ZWEI SINGULÄREN PUNKTEN ERSTRECKTEN INTEGRALE DER LÖSUNGEN LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN STATTFINDEN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76, 1874, S. 177—213.)

Den Satz über die Vertauschung von Parameter und Argument bei [177 der dritten Gattung der hyperelliptischen Transcendenten, aus welchem Herr WEIERSTRASS (Programm des Braunsberger Gymnasiums 1848/49[1]) die seiner Theorie dieser Transcendenten zu Grunde liegende Verallgemeinerung der LEGENDRESchen Gleichung für die Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung hergeleitet, hatte bereits ABEL (Oeuvres complètes t. II., p. 54—65[2]) auf lineare Differentialgleichungen ausgedehnt. JACOBI (dieses Journal B. 32 und mathematische Werke B. I, S. 363[3]) hat den Entwickelungen ABELS eine übersichtlichere Gestalt gegeben und sie weiter ausgeführt. Es war jedoch — wie er am Schlusse der eben erwähnten Abhandlung bemerkt — unmöglich, den entwickelten Theoremen eine wohlbestimmte Form zu geben, weil zur Zeit für die Ergründung des Charakters der Functionen, welche linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten genügen, noch wenig geschehen war. —

Die Resultate meiner Untersuchungen über die Natur dieser Functionen haben mir nunmehr auch die Mittel gewährt, in der folgenden Arbeit die

---

1) Weierstrass' Werke, Bd. I (1894), S. 111 ff. Sch.

2) Nouvelle édition, t. II (1881), S. 47—54. Sch.

3) Jacobis gesammelte Werke, Bd. II (1882), S. 121 ff. Sch.

ABEL-JACOBIschen Theoreme zu präcisiren. Gleichzeitig gestatteten sie, aus denselben Relationen für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen Relationen herzuleiten, analog denjenigen, welche LEGENDRE für die Periodicitätsmoduln der elliptischen und Herr WEIERSTRASS für die der hyperelliptischen Integrale gefunden.

1.

Sind $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ Functionen von x, und setzt man mit JACOBI

$$[y]_1 = A_0 y + A_1 y' + A_2 y^{(2)} + \cdots + A_n y^{(n)}, \tag{1.}$$

wo $y^{(i)}$ die i^{te} Ableitung einer Function y von x bedeutet, ferner

$$\left\{\begin{aligned} [y]_2 &= B_0 y + B_1 y' + B_2 y^{(2)} + \cdots + B_n y^{(n)}, \\ &= -A_0 y + \frac{d}{dx}(A_1 y) - \frac{d^2}{dx^2}(A_2 y) + \cdots \pm \frac{d^n}{dx^n}(A_n y), \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

178] so ist auch

$$[y]_1 = -B_0 y + \frac{d}{dx}(B_1 y) - \frac{d^2}{dx^2}(B_2 y) + \cdots \pm \frac{d^n}{dx^n}(B_n y), \tag{3.}$$

und für zwei beliebige Functionen y und z von x

$$z[y]_1 + y[z]_2$$

ein vollständiger Differentialquotient (s. J. M. W. B. I, S. 367[1]). Wir bezeichnen mit JACOBI

$$\int \{z[y]_1 + y[z]_2\}\, dx = [y, z]. \tag{4.}$$

Um die durch das Integral eingeführte unbestimmte Constante zu fixiren, soll im Folgenden immer sein:

$$[y, z] = \sum_1^n{}_\lambda H_\lambda, \tag{5.}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} H_\lambda &= \sum_0^{\lambda-1}{}_\alpha (-1)^\alpha y^{(\lambda-\alpha-1)} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(A_\lambda z) \\ &= \sum_0^{\lambda-1}{}_\alpha (-1)^\alpha z^{(\lambda-\alpha-1)} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(B_\lambda y). \end{aligned}\right. \tag{5a.}$$

Sind y und z resp. Integrale der Differentialgleichungen

$$[y]_1 = 0, \quad [z]_2 = 0,$$

1) Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 128, Sch.

so wird nach Gleichung (4.) der Ausdruck $[y, z]$ eine von x unabhängige Grösse.

Es werde jetzt vorausgesetzt, dass $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ganze rationale Functionen von x seien. Nennt man alsdann mit JACOBI $\mathfrak{A}_i$ die Function von α, welche aus A_i erhalten wird, wenn man α für x substituirt, und setzt:

$$\frac{A_i - \mathfrak{A}_i}{x-\alpha} = P_i,$$

so ist P_i eine ganze rationale Function von x und α.

Vertauscht man die unabhängige Variable x in $[y]_1$, $[y]_2$, $[y, z]$ mit der Variablen α, und nennt die Functionen, in welche y und z dadurch übergehen, $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so wollen wir die Resultate resp. mit $[\mathfrak{y}]_1^{(\alpha)}$, $[\mathfrak{y}]_2^{(\alpha)}$, $[\mathfrak{y}, \mathfrak{z}]^{(\alpha)}$ bezeichnen, während im Gegensatz hierzu für die unveränderten Ausdrücke resp. die Zeichen $[y]_1^{(x)}$, $[y]_2^{(x)}$, $[y, z]^{(x)}$ eintreten. Man hat alsdann nach JACOBI

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} = U, \tag{6.}$$

wo [179

$$U = -P_0 + \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \cdots \pm \frac{\partial^n P_n}{\partial x^n} \tag{6a.}$$

eine ganze rationale Function von x und α ist. Setzt man

$$U = \sum C_{mp} \alpha^m x^p, \tag{7.}$$

so zeigt JACOBI, dass C_{mp} den Coefficienten von x^p in dem Ausdrucke $[x^{-m-1}]_2^{(x)}$, oder auch den Coefficienten von α^m in dem Ausdrucke $[-\alpha^{-p-1}]_1^{(\alpha)}$ darstellt.

Es seien y und $\mathfrak{z}$ zwei Integrale resp. der Differentialgleichungen

$$[y]_1^{(x)} = 0, \quad [\mathfrak{z}]_2^{(\alpha)} = 0, \tag{8.}$$

so ist nach Gleichung (4.)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[y, \dfrac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} = y\left[\dfrac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left[\dfrac{1}{\alpha-x}, \mathfrak{z}\right]^{(\alpha)} = \mathfrak{z}\left[\dfrac{1}{\alpha-x}\right]_1^{(\alpha)}. \end{cases} \tag{9.}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\mathfrak{z}$, die zweite mit y und subtrahirt, so erhält man, mit Rücksicht darauf, dass

$$\left[\frac{1}{\alpha-x}\right]_1^{(\alpha)} = -\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)},$$

nach Gleichung (6.)

$$(A.) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[y, \frac{\eta}{x-\alpha}\right]^{(\omega)} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{y}{\alpha-x}, \eta\right]^{(\omega)} = U y_\eta.$$

2.

Es gehöre die Differentialgleichung

$$(1.) \qquad [y]_1^{(\omega)} = 0$$

zu der Klasse derjenigen, welche ich in früheren Arbeiten dahin charakterisirt habe, dass ihre Integrale für einen singulären Punkt a mit einer Potenz von $x-a$ und für $x=\infty$ mit einer Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt nicht mehr unendlich werden. — Sind $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ die singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) und setzt man

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho),$$

so hat dieselbe alsdann die Form:

$$(B.) \qquad [y]_1^{(\omega)} = \sum_0^n{}_\alpha F_{(\omega-\alpha)(\varrho-1)}(x)\, F(x)^\alpha y^{(\alpha)} = 0,$$

180] wo $F_k(x)$ eine ganze rationale Function des k^{ten} Grades bedeutet, siehe meine Abh. Bd. 66 dieses Journals, S. 139 ff.[1]).

Die Differentialgleichung

$$(2.) \qquad [z]_2^{(\omega)} = 0$$

wird alsdann:

$$(C.) \qquad [z]_2^{(\omega)} = \sum_0^n{}_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left\{F_{(\omega-\alpha)(\varrho-1)}(x)\, F(x)^\alpha z\right\} = 0.$$

Entwickelt man die Differentialquotienten in dieser Gleichung, so ergiebt sich, dass dieselbe die Form hat:

$$(3.) \qquad [z]_2^{(\omega)} = \sum_0^n{}_\alpha G_{(\omega-\alpha)(\varrho-1)}(x)\, F(x)^\alpha z^{(\alpha)} = 0,$$

wo wiederum $G_k(x)$ eine ganze rationale Function von x des k^{ten} Grades bedeutet.

Es gehört daher die Differentialgleichung (C.) ebenfalls zu der erwähnten Klasse von Differentialgleichungen, und sie hat dieselben singulären Punkte wie die Differentialgleichung (B.).

1) S. 176 ff. dieses Bandes. Sch.

Es sei a einer der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$, so ist nach der in meiner oben citirten Abh. S. 147[1]) gegebenen Vorschrift, wenn man in der Differentialgleichung (B.) y durch $(x-a)^r u$ ersetzt, der Coefficient von $(x-a)^r u$ im Resultate der Substitution, für $x = a$, die linke Seite der zum singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.). Dieselbe lautet also:

$$(D.) \qquad \sum_0^{n-1}{}_\lambda F_{\lambda(\varrho-1)}(a) F'(a)^{n-\lambda} r(r-1)\ldots(r-n+\lambda+1) + F_{n(\varrho-1)}(a) = 0.$$

Substituirt man ebenso $(x-a)^s u$ für z in die Differentialgleichung (C.), so ist der Coefficient von $(x-a)^s u$ im Resultate der Substitution, für $x = a$,

$$(E.) \quad \sum_0^{n-1}{}_\lambda (-1)^{n-\lambda-1} F_{\lambda(\varrho-1)}(a) F'(a)^{n-\lambda}(n-\lambda+s)(n-\lambda+s-1)\ldots(s+1) - F_{n(\varrho-1)}(a) = 0.$$

Dieses ist die zum singulären Punkte a gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C.) oder (3.).

Setzt man in derselben

$$(4.) \qquad s = -r-1,$$

so verwandelt sie sich in die Gleichung (D.).

Es findet also zwischen den zu demselben singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen (B.) und (C.) die Beziehung statt, dass die Wurzeln der einen die entgegengesetzten Werthe der um Eins vermehrten Wurzeln der anderen sind.

3. [181

Es sei

$$(1.) \qquad A_\lambda = F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x) F(x)^\lambda,$$

so hat die Differentialgleichung (B.) wieder die Form:

$$(2.) \qquad \sum_0^n{}_\alpha A_\alpha y^{(\alpha)} = 0.$$

Setzt man

$$n(\varrho-1) = p,$$

so ist A_λ eine ganze rationale Function vom Grade $p+\lambda$.

[1]) S. 187 dieses Bandes. Sch.

Substituirt man $\frac{1}{u}$ für x in A_λ, so wird

$$A_\lambda = \frac{C_\lambda}{u^{p+\lambda}}, \tag{3.}$$

wo C_λ eine ganze rationale Function von u vom Grade $p+\lambda$ bedeutet.

Setzt man den Werth (3.) in die Differentialgleichung (2.) ein, so wird dieselbe:

$$\sum_0^n{}_\alpha C_\alpha u^{n-\alpha} y^{(\alpha)} = 0. \tag{4.}$$

Substituirt man hierin

$$y = u^r v, \tag{5.}$$

wo v eine Reihe der Form

$$v = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots \tag{6.}$$

bedeutet, so erhält man:

$$\sum_0^n{}_\alpha P_\alpha u^{n-\alpha} v^{(\alpha)} = 0, \tag{7.}$$

wo

$$P_\lambda = \sum_0^{n-\lambda}{}_\alpha (-1)^\alpha (\lambda+\alpha)_\alpha r(r+1)\dots(r+\alpha-1) C_{\lambda+\alpha}$$

und insbesondere:

$$P_0 = \sum_0^n{}_\alpha (-1)^\alpha r(r+1)\dots(r+\alpha-1) C_\alpha.$$

Setzt man in (7.) $\frac{1}{x}$ für u und die Reihe (6.) für v, so ist die niedrigste Potenz von $\frac{1}{x}$ im Resultate der Substitution die n^{te}, und zwar ist der Coefficient von $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ der Werth von $P_0 a_0$ für $u = 0$. Bezeichnet man daher mit $\mathfrak{C}_\alpha$ den Werth von C_α für $u = 0$ oder den Coefficienten der höchsten Potenz 182] von x in A_α, so folgt daraus, dass P_0 für $u = 0$ verschwindet:

$$\sum_0^n{}_\alpha (-1)^\alpha r(r+1)\dots(r+\alpha-1) \mathfrak{C}_\alpha = 0 \tag{8.}$$

als determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.) für den Punkt $x = \infty$.

Die linke Seite der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.) wird daher gefunden, wenn man in (2.) $\left(\frac{1}{x}\right)^r v$ für y substituirt, den Coefficienten von v in der transformirten Differentialgleichung herstellt, denselben mit x^{r-p} multiplicirt und im Resultat $x = \infty$ setzt.

Substituirt man daher in der Differentialgleichung (2.) voriger Nummer, welche gleichbedeutend ist mit:

$$\sum_0^n{}_a (-1)^{a-1} \frac{d^a}{dx^a} \{A_a s\} = 0, \tag{9.}$$

worin der Grad des Coefficienten von s ebenfalls der p^{ten} ist,

$$s = \left(\frac{1}{x}\right)^s w,$$

so erhält man:

$$\sum_0^n{}_a (-1)^{a-1} \frac{d^a}{dx^a} \{C_a x^{p-s+a} w\} = 0. \tag{10.}$$

Da $C_0, C_1, \ldots, C_n$ für $x = \infty$ oder $u = 0$ endlich sind, ferner die Ableitungen k^{ter} Ordnung derselben mit x^k multiplicirt noch Null, so ergiebt sich als Coefficient von w in Gleichung (10.) mit x^{s-p} multiplicirt für $x = \infty$

$$\sum_0^n{}_a (-1)^{a-1} (p-s+a)(p-s+a-1)\ldots(p-s+1)\mathfrak{C}_a.$$

Demnach ist die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (9.):

$$\sum_0^n{}_a (-1)^{a-1} (p-s+a)(p-s+a-1)\ldots(p-s+1)\mathfrak{C}_a = 0. \tag{11.}$$

Setzt man hierin

$$p-s+1 = r \quad \text{oder} \quad s = p-r+1, \tag{12.}$$

so verwandelt sich dieselbe in die Gleichung (8.). Man hat daher als Ergänzung zu dem Satze am Schlusse der vorigen Nummer den Satz:

Es findet zwischen den zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen (2.) und (9.) die Beziehung statt, dass die Wurzeln der einen aus denen der anderen er- [183
halten werden, wenn man die letzteren der Reihe nach von $p+1$ subtrahirt.

Wir wollen im Folgenden Differentialgleichungen, welche zu einander in derselben Beziehung stehen wie die Differentialgleichungen (B.) und (C.) adjungirte Differentialgleichungen, die Wurzeln der zu demselben singulären Punkte oder zum Punkte $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen je einer dieser Differentialgleichungen, welche resp. durch die

Gleichung (4.) voriger Nummer oder Gleichung (12.) dieser Nummer mit einander verknüpft sind, adjungirte Wurzeln, endlich die Elemente der zu demselben singulären Punkte oder zum Punkte $x = \infty$ gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen je einer dieser Differentialgleichungen, welche adjungirten Wurzeln als Exponenten entsprechen, adjungirte Elemente nennen.

4.

Sind die Coefficienten der Functionen $F_{\mu(\varrho-1)}(x)$ in Gleichung (B.) unbestimmt, so kann man dieselben so wählen, dass sie für die einzelnen singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ beliebige vorgeschriebene Werthe annehmen. In der That seien $\varepsilon_1^{(\mu)}, \varepsilon_2^{(\mu)}, \ldots, \varepsilon_\varrho^{(\mu)}$ willkürliche Werthe, die $F_{\mu(\varrho-1)}(x)$ resp. für $x = a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ erhalten soll, so kann man:

$$(1.) \qquad F_{\mu(\varrho-1)}(x) = F(x)\sum_1^\varrho{}_i \frac{\varepsilon_i^{(\mu)}}{F'(a_i)} \frac{1}{x-a_i} + F(x)\,E^{(\mu)}(x)$$

wählen, wo $E^{(\mu)}(x)$ eine unbestimmte ganze rationale Function des Grades $\mu(\varrho-1)-\varrho$ bedeutet.

Setzt man andererseits in Gleichung (D.) für r successive die beliebigen aber von einander verschiedenen Werthe $r_1, r_2, \ldots, r_n$, so liefern die so gebildeten n linearen Gleichungen mit den Grössen

$$F_{\varrho-1}(a),\ F_{2(\varrho-1)}(a),\ \ldots,\ F_{n(\varrho-1)}(a)$$

als Unbekannten für dieselben bestimmte Werthe, weil die Determinante des Systems gleichbedeutend ist mit dem Producte der Differenzen der Grössen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ multiplicirt mit einer Potenz von $F'(a)$.

Wenn also in der Differentialgleichung (B.) die Coefficienten $F_{\mu(\varrho-1)}(x)$ unbestimmt sind, so können sie so gewählt werden, dass die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen beliebige vorgeschriebene Werthe erhalten.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass die sämmtlichen Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden 184] Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B.) von einander verschieden und in ihrem reellen Theile negativ und absolut kleiner als Eins sind.

Nach dem Satze am Schlusse der No. 2 sind alsdann auch die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der adjungirten Differentialgleichung (C.) von einander verschieden und in ihrem reellen Theile negativ und absolut kleiner als Eins.

5.

Wir wollen zeigen, dass es ausserdem möglich ist, die Coefficienten der Functionen $F_{\mu(\varrho-1)}(x)$ so zu bestimmen, dass für jede der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sowohl der Differentialgleichung (B.) als ihrer adjungirten die Wurzeln von einander verschieden und in ihrem reellen Theile positiv und grösser als Eins sind.

In der That ist in der Gleichung (1.) voriger Nummer $E^{(\mu)}(x)$ unbestimmt geblieben. Der Grad dieser ganzen rationalen Function wird durch die Zahl:

$$\mu(\varrho-1)-\varrho$$

angegeben, welche für $\varrho>1$, $\mu>1$ nicht negativ ist. Der Coefficient der höchsten Potenz von x in $F_{\mu(\varrho-1)}(x)$ stimmt daher nach Gleichung (1.) voriger Nummer mit dem Coefficienten der höchsten Potenz von x in $E^{(\mu)}(x)$ überein, wenn $\mu>1$. Man kann demnach $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{n-2}$ beliebig wählen, während nach Gleichung (1.) voriger Nummer

$$(1.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{C}_{n-1} = \sum_1^\varrho {}_i \dfrac{\varepsilon_i^{(1)}}{F'(a_i)}, \\ \mathfrak{C}_n = 1. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$ die Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.), so ist nach Gleichung (D.) No. 2:

$$\frac{\varepsilon_i^{(1)}}{F'(a_i)} = -(r_{i1}+r_{i2}+\cdots+r_{im})+\frac{n(n-1)}{2},$$

also

$$(2.)\qquad \mathfrak{C}_{n-1} = -\Sigma r + \varrho\frac{n(n-1)}{2},$$

wo Σr die Summe sämmtlicher Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B.) bedeutet.

185] Bezeichnen wir andererseits mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ die Wurzeln der zum Punkte $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ist nach Gleichung (8.) No. 3

$$\frac{n(n-1)}{2} - \mathfrak{C}_{n-1} = -\sum_1^n{}_\alpha \sigma_\alpha. \tag{3.}$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) folgt:

$$\sum_1^n{}_\alpha \sigma_\alpha = -\Sigma r + (\varrho - 1)\frac{n(n-1)}{2}. \tag{4.}$$

Nun sieht man, ähnlich wie in vor. Nummer, dass die Grössen $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{n-1}$ in Gleichung (8.) No. 3 so bestimmt werden können, dass dieser n beliebige von einander verschiedene Werthe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ genügen. Demnach können die Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ beliebig gewählt werden, wenn sie nur verschieden sind und der Gleichung (4.) genügen.

Es sei

$$\sigma_\alpha = 1 + k_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5.}$$

von der Beschaffenheit, dass, wenn $\varkappa_\alpha$ der reelle Theil von k_α ist,

$$p - 1 > \varkappa_\alpha > 0. \tag{6.}$$

Ist ferner r irgend eine Wurzel einer zu einem singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, und setzen wir:

$$r = -1 + t, \tag{7.}$$

so ist nach unserer Voraussetzung in vor. Nummer der reelle Theil τ von t positiv und kleiner als Eins. Nach Gleichung (4.) ist

$$\sigma_n = 1 + n(\varrho - 1) + \frac{(\varrho - 1)\, n(n-1)}{2} - \Sigma t - \sum_1^{n-1}{}_\alpha k_\alpha. \tag{8.}$$

Wir bestimmen nun die Grössen t und $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ so, dass

$$n(\varrho - 1) + (\varrho - 1)\frac{n(n-1)}{2} > \Sigma\tau + \sum_1^{n-1}{}_\alpha \varkappa_\alpha > (\varrho - 1)\frac{n(n-1)}{2} + 1. \tag{9.}$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllbar, wenn $\varrho > 1$ ist. Es ergiebt sich alsdann auch

$$\sigma_n = 1 + k_n, \tag{10.}$$

wo der reelle Theil $\varkappa_n$ von k_n der Bedingung genügt

(6a.) $$p-1>\varkappa_n>0.$$

Aus den Ungleichungen (6.) und (6a.) folgt mit Hülfe des Satzes am Schlusse der No. 3, dass auch die Wurzeln der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der zur Gleichung (B.) adjungirten Differential- [186 gleichung (C.) in ihrem reellen Theile positiv und grösser als Eins sind.

Wir wollen jedoch im Folgenden nur voraussetzen, dass für jede der beiden zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B.) und ihrer adjungirten die Wurzeln untereinander verschieden sind.

6.

Für die Differentialgleichung (B.) ist der Ausdruck H_λ in No. 1 Gleichung (5a.)

(1.) $$H_\lambda=\sum_0^{\lambda-1}{}_\alpha(-1)^\alpha y^{(\lambda-\alpha-1)}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x)\,F(x)^\lambda z].$$

Es sei y ein Integral der Differentialgleichung (B.), so ist in der Umgebung eines singulären Punktes a, dessen zugehörige determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ hat,

(2.) $$y=\sum_1^n{}_\beta(x-a)^{r_\beta}K_\beta(x),$$

wo $K_\beta(x)$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen bedeuten (s. meine Abh. B. 66 dieses Journals S. 139 ff.[1]).

Setzt man

$$z=\frac{1}{x-\alpha},$$

wo α von a verschieden, so ist in der Umgebung von a

(3.) $$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x)\,F(x)^\lambda z]=\frac{(x-a)^{\lambda-\alpha}}{(x-\alpha)^{\alpha+1}}X_\alpha(x),$$

wo $X_\alpha(x)$ wie $K_\beta(x)$ beschaffen ist. — Andererseits ist:

(4.) $$y^{(\lambda-\alpha-1)}=\sum_1^n{}_\beta(x-a)^{r_\beta-\lambda+\alpha+1}K'_\beta(x),$$

[1]) S. 178 ff. dieses Bandes. Sch.

wo $K_\beta'(x)$ wie $K_\beta(x)$ beschaffen ist. Aus den Gleichungen (3.) und (4.) folgt:

$$(5.) \qquad H_\lambda = \frac{1}{(x-\alpha)^\lambda} \sum_1^n{}_\beta (x-a)^{r_\beta+1} \psi_\beta(x),$$

wo $\psi_\beta(x)$ wie $K_\beta(x)$ beschaffen ist.

Nach den in No. 4 gemachten Voraussetzungen ist demnach H_λ für $x=a$ Null, folglich auch nach No. 1

$$(6.) \qquad \left[y, \frac{1}{x-\alpha}\right]_a^{(\infty)} = 0 \qquad (\alpha \text{ von } a \text{ verschieden}).$$

187] Setzt man in der Differentialgleichung (C.) α für x und bezeichnet ein Integral dieser Differentialgleichung mit η, so findet man ebenso, vermittelst des zweiten Ausdrucks für H_λ in Gleichung (5a.) No. 1, und mit Rücksicht auf die Voraussetzungen in No. 4:

$$(7.) \qquad \left[\frac{1}{x-\alpha}, \eta\right]_a^{(\alpha)} = 0 \qquad (x \text{ von } a \text{ verschieden}).$$

7.

Nimmt man in meiner Abhandlung Bd. 75 dieses Journals S. 177[1]) für $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ die singulären Punkte der Differentialgleichung (B.), so zerfällt die x-Ebene durch den Absonderungsschnitt in zwei Gebiete G_1 und G_2, wovon G_1 den Unendlichkeitspunkt enthält. Wir haben daselbst gezeigt, wie man innerhalb eines jeden dieser Gebiete gültige Darstellungen der Integrale herstellen und den Übergang aus dem einen Gebiete in das andere vollführen kann. Die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ seien so bezeichnet, dass sie beim Fortschreiten längs des Absonderungsschnittes innerhalb G_1 in der eben angegebenen Reihenfolge aufeinander folgen. Wir ziehen innerhalb G_1 einen beliebigen Querschnitt von ∞ bis a_1, welcher weder sich selbst noch die Absonderungscurve in einem Punkte ausser a_1 schneidet, und setzen fest, dass innerhalb G_1 vorzunehmende Integrationen diesen Querschnitt nicht überschreiten.

Für den Fall, dass die Wurzeln der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen (B.) und (C.) in ihrem

[1]) Abh. XIV, S. 361 ff. dieses Bandes. Sch.

reellen Theile grösser sind als die positive Einheit (s. No. 5), soll im Folgenden der Punkt $x = \infty$ als Punkt a_0 den singulären Punkten angereiht werden.

Sind y und $\mathfrak{z}$ respective Integrale der Differentialgleichungen (B.) und (C.), und zwar letzterer, nachdem in derselben die Variable x mit α vertauscht worden, so ist nach Gleichung (A.):

$$(1.) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[y, \frac{\mathfrak{z}}{x-\alpha}\right]^{(\infty)} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{y}{\alpha - x}, \mathfrak{z}\right]^{(\alpha)} = Uy\mathfrak{z}.$$

Bedeutet nunmehr, wie in meiner oben citirten Abhandlung Bd. 75 S. 213[1]), l_a den Theil des Absonderungsschnittes zwischen a_a und a_{a+1}, ferner l_0 den Querschnitt, und integriren wir die Gleichung (1.) in Bezug auf x von a_μ bis $a_{\mu+1}$ längs l_μ und in Bezug auf α von a_ν bis $a_{\nu+1}$ längs l_ν, beidemal innerhalb G_1, so ist, wenn $\nu > \mu + 1$ oder $\nu < \mu - 1$ [188

$$(2.) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left[y, \frac{\mathfrak{z}}{x-\alpha}\right]^{(\infty)} = \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha \left\{\left[y, \frac{\mathfrak{z}}{x-\alpha}\right]_{a_{\mu+1}}^{(\infty)} - \left[y, \frac{\mathfrak{z}}{x-\alpha}\right]_{a_\mu}^{(\infty)}\right\},$$

$$(3.) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{y}{\alpha - x}, \mathfrak{z}\right]^{(\alpha)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \left\{\left[\frac{y}{\alpha - x}, \mathfrak{z}\right]_{a_{\nu+1}}^{(\alpha)} - \left[\frac{y}{\alpha - x}, \mathfrak{z}\right]_{a_\nu}^{(\alpha)}\right\},$$

da die Integrationswege von α und x sich nicht schneiden.

Nach Gleichung (6.) und (7.) voriger Nummer verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen (2.) und (3). Man hat daher:

$$(4.) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha Uy\mathfrak{z} = 0, \quad \mu > \nu + 1 \text{ oder } \mu < \nu - 1,$$

die Integrale in dem oben angegebenen Sinne erstreckt.

Die Integrale in (4.) können auch ersetzt werden durch Integrale erstreckt längs des inneren Randes des der Absonderungscurve entsprechenden Kreises E (s. meine Abh. Bd. 75 S. 203 ff.[2])), indem man für x und α die rationalen Substitutionen in w macht und für y und $\mathfrak{z}$ die nach Potenzen von w fortschreitenden Reihen substituirt.

8.

Wir untersuchen jetzt:

$$(1.) \qquad P^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha Uy\mathfrak{z},$$

[1]) S. 400 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 389 ff. dieses Bandes. Sch.

die Integrale wieder erstreckt innerhalb G_1 resp. längs l_μ und $l_{\mu+1}$, oder auch, wenn man x und α als rationale Functionen von w darstellt, längs den entsprechenden Abschnitten λ_μ und $\lambda_{\mu+1}$ des inneren Randes von E. Wenn der Punkt $x = \infty$ als a_0 einzuführen ist, so soll die Integration längs der Seite von l_0 ausgeführt werden, von welcher aus man vom Treffpunkte von l_0 mit dem Absonderungsschnitte längs des letzteren zum Punkte a_2 gelangt, ohne vorher einen anderen singulären Punkt passirt zu haben.

Das Integral $P^{(\mu)}$ hat einen endlichen Werth. Denn es werden zwar y und $\mathfrak{z}$ für die Grenzen der Integrale unendlich. Bezeichnet aber a eine 189] dieser Grenzen, so sind y und $\mathfrak{z}$ mit Potenzen resp. $(x-a)^\varepsilon$, $(\alpha-a)^\zeta$, deren Exponenten in ihren reellen Theilen positiv und kleiner als Eins, multiplicirt für $x = a$ nicht mehr unendlich. Dasselbe gilt für den singulären Punkt a_0.

Es seien a' und b' zwei Punkte resp. von l_μ und $l_{\mu+1}$, welche beide der Umgebung von $a_{\mu+1}$ angehören. Die Umgebung wird, wie immer in meinen Abhandlungen, dadurch bestimmt, dass daselbst für die zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichungen (B.) und (C.) die nach Potenzen von $x-a_{\mu+1}$ und $\alpha-a_{\mu+1}$ fortschreitenden Reihen gültig sind (s. meine Abh. Bd. 66 dieses Journals S. 122[1]). Es ist alsdann:

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} P^{(\mu)} = &\int_{a_\mu}^{a'} dx \int_{a_{\mu+1}}^{b'} d\alpha U y_{\mathfrak{z}} + \int_{a_\mu}^{a'} dx \int_{b'}^{a_{\mu+2}} d\alpha U y_{\mathfrak{z}} \\ &+ \int_{a'}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{b'} d\alpha U y_{\mathfrak{z}} + \int_{a'}^{a_{\mu+1}} dx \int_{b'}^{a_{\mu+2}} d\alpha U y_{\mathfrak{z}}, \end{aligned}\right.$$

die Integrale auf denselben Wegen erstreckt wie in Gleichung (1.).

Nennen wir G_1' die durch den Querschnitt l_0 zerschnittene Fläche G_1, und integriren die Gleichung (1.) voriger Nummer innerhalb G_1' in Bezug auf x von a bis x, in Bezug auf α von b bis α, wo a und b zwei von einander verschiedene singuläre Punkte sind, x und α willkürliche aber von einander verschiedene Werthe bedeuten, und nehmen beide Wege der Integration so, dass sie sich nicht schneiden, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (6.) und (7.) No. 6:

$$(3.)\qquad \left[y, \int_b^\alpha \frac{\mathfrak{z}\, d\alpha}{x-\alpha}\right]^{(x)} - \left[\int_a^x \frac{y\, dx}{\alpha-x}, \mathfrak{z}\right]^{(\alpha)} = \int_a^x dx \int_b^\alpha d\alpha U y_{\mathfrak{z}}.$$

[1]) S. 161 dieses Bandes. Sch.

Hiernach ist

$$(4.)\quad \begin{cases} \int_{a_\mu}^{a'} dx \int_{a_{\mu+1}}^{b'} d\alpha U y_\vartheta &= \Big[y, \int_{a_{\mu+1}}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{a'}^{(\alpha)} - \Big[\int_{a_\mu}^{a'} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{b'}^{(\alpha)} \\ \int_{a_\mu}^{a'} dx \int_{b'}^{a_{\mu+2}} d\alpha U y_\vartheta &= -\Big[y, \int_{a_{\mu+2}}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{a'}^{(\alpha)} + \Big[\int_{a_\mu}^{a'} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{b'}^{(\alpha)} \\ \int_{a'}^{a_{\mu+1}} dx \int_{b'}^{a_{\mu+2}} d\alpha U y_\vartheta &= \Big[y, \int_{a_{\mu+2}}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{a'}^{(\alpha)} - \Big[\int_{a_{\mu+1}}^{a'} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{b'}^{(\alpha)}. \end{cases}$$

Addirt man die Gleichungen (2.) und (4.), so folgt

$$(5.)\quad P^{(\mu)} = \int_{a'}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{b'} d\alpha U y_\vartheta + \Big[y, \int_{a_{\mu+1}}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{a'}^{(\alpha)} - \Big[\int_{a_{\mu+1}}^{a'} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{b'}^{(\alpha)}.$$

Sind ξ und ϑ zwei Punkte resp. auf l_μ und $l_{\mu+1}$, der erstere zwischen a' [190 und $a_{\mu+1}$, der letztere zwischen b' und $a_{\mu+1}$, so ist

$$(6.)\quad \int_{a'}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{b'} d\alpha U y_\vartheta = \lim \int_{a'}^{\xi} dx \int_{\vartheta}^{b'} d\alpha U y_\vartheta,$$

die Integrale längs l_μ und $l_{\mu+1}$ erstreckt, wenn ξ und ϑ in $a_{\mu+1}$ hineinrücken.

Nun folgt durch Integration der Gleichung (1.) No. 7:

$$(7.)\quad \begin{cases} \int_{a'}^{\xi} dx \int_{\vartheta}^{b'} d\alpha U y_\vartheta = \Big[y, \int_{\vartheta}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{\xi}^{(\alpha)} - \Big[y, \int_{\vartheta}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{a'}^{(\alpha)} \\ \qquad\qquad - \Big[\int_{a'}^{\xi} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{b'}^{(\alpha)} + \Big[\int_{a'}^{\xi} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{\vartheta}^{(\alpha)}, \end{cases}$$

also:

$$(8.)\quad \begin{cases} \lim \int_{a'}^{\xi} dx \int_{\vartheta}^{b'} d\alpha U y_\vartheta = \lim \Big\{\Big[y, \int_{\vartheta}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{\xi}^{(\alpha)} + \Big[\int_{a'}^{\xi} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{\vartheta}^{(\alpha)}\Big\} \\ \qquad\qquad - \Big[y, \int_{a_{\mu+1}}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{a'}^{(\alpha)} - \Big[\int_{a'}^{a_{\mu+1}} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{b'}^{(\alpha)}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (5.), (6.), (8.) folgt:

$$(9.)\quad P^{(\mu)} = \lim \Big\{\Big[y, \int_{\vartheta}^{b'} \frac{\vartheta d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{\xi}^{(\alpha)} + \Big[\int_{a'}^{\xi} \frac{y\,dx}{\alpha - x}, \vartheta\Big]_{\vartheta}^{(\alpha)}\Big\}$$

für $\xi = a_{\mu+1}$, $\vartheta = a_{\mu+1}$.

9.

Es sei $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ das zum Punkte $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.), dessen Entwickelung ich in meiner Arbeit dieses Journal Bd. 75, S. 205 ff.[1]) innerhalb G_1 gegeben habe; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ das entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (C.), derart dass η_a und ζ_a adjungirte Integrale darstellen. Ferner bedeute $\eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}, \ldots, \eta_{n\mu}$ das zum singulären Punkte $a_{\mu+1}$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.), $\zeta_{1\mu}, \zeta_{2\mu}, \ldots, \zeta_{n\mu}$ das zu demselben singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (C.). (Über die Definition dieser Integrale s. meine Arbeiten Bd. 66, S. 139 ff.[2]) u. Bd. 68, S. 364 ff.[3]). — Man hat alsdann die Gleichungen:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \eta_a = \sum_1^n{}_c\, b_{ac}\, \eta_{c\mu}, \\ \zeta_a = \sum_1^n{}_c\, c_{ac}\, \zeta_{c\mu}. \end{cases}$$

191] In meiner Abhandlung Bd. 75, S. 210 ff.[4]) habe ich gezeigt, wie die Grössen b_{ac}, c_{ac} zu berechnen sind.

Setzt man in Gleichung (9.) voriger Nummer $y = \eta_k$ und $\delta = \delta_l$, wo δ_l aus ζ_l durch Vertauschung von x mit α erhalten wird, und bezeichnet mit $\delta_{\mu a}$ die aus $\zeta_{\mu a}$ durch Vertauschung von x mit α hervorgehende Function, so folgt:

$$(F.) \qquad \begin{cases} P_{kl}^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U \eta_k \delta_l \\ \qquad = \lim \sum_1^n{}_c \sum_1^n{}_b\, b_{kc}\, c_{lb} \left\{ \left[\eta_{c\mu}, \int_\vartheta^{b'} \frac{\delta_{b\mu}\, d\alpha}{x-\alpha} \right]_\xi^{(x)} + \left[\int_{a'}^{\xi} \frac{\eta_{c\mu}\, dx}{\alpha - x}, \delta_{b\mu} \right]_\vartheta^{(\alpha)} \right\} \end{cases}$$

für $\xi = a_{\mu+1}$, $\vartheta = a_{\mu+1}$.

Die Grössen c lassen sich durch die Grössen b vermittelst eines Systems linearer Gleichungen berechnen, wie nunmehr gezeigt werden soll.

---

1) S. 391 ff. dieses Bandes. Sch.
2) S. 178 ff. dieses Bandes. Sch.
3) S. 216 ff. dieses Bandes. Sch.
4) S. 396 ff. dieses Bandes. Sch.

10.

Es sei a einer der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ das ihm zugehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.), $g_1, g_2, \ldots, g_n$ das zu demselben singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (C.), derart, dass f_α und g_α adjungirte Integrale bedeuten, endlich seien $r_1, r_2, \ldots, r_n$ resp. die Exponenten, zu welchen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gehören. Es ist alsdann (s. meine Abh. Bd. 66, S. 139 ff.[1]), in der Umgebung von a

$$f_\alpha = (x-a)^{r_\alpha}\varphi_\alpha(x) \tag{1.}$$

und nach dem Satze am Schlusse der No. 2

$$g_\alpha = (x-a)^{-1-r_\alpha}\psi_\alpha(x), \tag{1a.}$$

wo $\varphi_\alpha(x)$ und $\psi_\alpha(x)$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen und $\varphi_\alpha(a)$, sowie $\psi_\alpha(a)$ von Null verschieden sind.

Setzt man

$$[f_\alpha, g_\beta] = \sum_1^n{}_\lambda H_\lambda', \tag{2.}$$

so ist nach Gleichung (5a.) No. 1

$$H_\lambda' = \sum_0^{\lambda-1}{}_c (-1)^c f_\alpha^{(\lambda-c-1)} \frac{d^c}{dx^c}[F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x)\,F(x)^\lambda g_\beta]. \tag{3.}$$

Aus den Gleichungen (1.) und (1a.) folgt, dass in der Umgebung von a:

$$f_\alpha^{(\lambda-c-1)} = (x-a)^{r_\alpha-\lambda+c+1}\varphi_\alpha'(x),$$

$$\frac{d^c}{dx^c}[F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x)\,F(x)^\lambda g_\beta] = (x-a)^{-1-r_\beta+\lambda-c}\psi_\beta'(x),$$

wo $\varphi_\alpha'(x)$ und $\psi_\beta'(x)$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende [192 Reihen bedeuten. Demnach hat H_λ' die Form:

$$H_\lambda' = (x-a)^{r_\alpha-r_\beta}X_\lambda(x), \tag{4.}$$

wo $X_\lambda(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe ist. Demnach ist in der Umgebung von a auch:

$$[f_\alpha, g_\beta] = (x-a)^{r_\alpha-r_\beta}X(x), \tag{5.}$$

wo $X(x)$ eine wie $X_\lambda(x)$ beschaffene Reihe ist.

[1]) S. 178 ff. dieses Bandes. Sch.

Nun ist nach No. 1 die linke Seite der Gleichung (5.) eine von x unabhängige Grösse. Dieselbe hat einen endlichen Werth, weil der Werth von $[f_a, g_b]$ für von den singulären Punkten verschiedene Werthe von x endlich ist.

Für $a \gtrless b$ ist nach den Voraussetzungen der No. 4 r_a von r_b verschieden, es müssen daher die sämmtlichen Coefficienten der Reihe $X(x)$ verschwinden, d. h. es ist

$$[f_a, g_b] = 0 \quad \text{für} \quad a \gtrless b. \tag{G.}$$

Ist dagegen $a = b$, d. h. $r_a = r_b$, so müssen alle Coefficienten der Reihe $X(x)$ bis auf den ersten verschwinden, und man erhält

$$[f_a, g_a] = X(a). \tag{6.}$$

Nun aber ist

$$X(a) = \sum_1^n{}^{\lambda} X_\lambda(a)$$

und für $a = b$

$$X_\lambda(a) = \varphi_a(a)\,\psi_a(a)\,F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\,F'(a)^\lambda \sum_0^{\lambda-1}{}^{c} \frac{r_a(r_a-1)\dots(r_a-\lambda+1)}{r_a-\lambda+c+1}$$

oder

$$X_\lambda(a) = \varphi_a(a)\,\psi_a(a)\,F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\,F'(a)^\lambda \frac{d}{dr_a}[r_a(r_a-1)\dots(r_a-\lambda+1)];$$

demnach

$$X(a) = \varphi_a(a)\,\psi_a(a)\,\frac{d}{dr_a} \sum_1^n{}^{\lambda} F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\,F'(a)^\lambda\, r_a(r_a-1)\dots(r_a-\lambda+1).$$

Bezeichnen wir die linke Seite der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.), Gleichung (D.), mit $D(r)$ und ihre Ableitung nach r mit $D'(r)$, so folgt:

$$X(a) = \varphi_a(a)\,\psi_a(a)\,D'(r_a).$$

Es ist demnach

$$[f_a, g_a] = \varphi_a(a)\,\psi_a(a)\,D'(r_a). \tag{7.}$$

193] Da nach den Voraussetzungen der No. 4 die Gleichung (D.) keine gleichen Wurzeln hat, so ist $D'(r_a)$ von Null verschieden. Demnach ist der Ausdruck in Gleichung (7.) ebenfalls von Null verschieden. Wir bestimmen die willkürlichen constanten Factoren von f_a und g_a so, dass

$$\varphi_a(a)\,\psi_a(a)\,D'(r_a) = 1, \tag{8.}$$

alsdann ist:

$$(H.) \qquad [f_a, g_a] = 1.$$

11.

Für die zum Punkte $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.), Gleichung (8.) No. 3, ist nach No. 5 nur vorausgesetzt, dass die Wurzeln derselben unter einander verschieden sind. Es ist hiernach nicht ausgeschlossen, dass sich zwei derselben nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, also die Integrale $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ der No. 9 in ihren für die Umgebung von $x = \infty$ gültigen Entwickelungen Logarithmen enthalten (s. meine Abh. Bd. 66, S. 157[1]), Bd. 68, S. 364 ff.[2])). Es seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ die Wurzeln der Gleichung (8.) No. 3, und es gehöre η_a zur Wurzel σ_a als Exponenten, so gehört nach dem Satze am Schlusse der No. 3 das Element ζ_a des adjungirten Fundamentalsystems in No. 9 zum Exponenten $p+1-\sigma_a$, und man hat in der Umgebung von $x = \infty$

$$(1.) \qquad \begin{cases} \eta_a = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_a} G_a(x), \\ \zeta_a = \left(\frac{1}{x}\right)^{p+1-\sigma_a} H_a(x), \end{cases}$$

wo $G_a(x)$ und $H_a(x)$ wie F beschaffene Functionen sind (s. meine Abh. Bd. 66, S. 155[3])).

Wie in voriger Nummer ergiebt sich:

$$\eta_a^{(\lambda-\mathfrak{b}-1)} = x^{-\sigma_a-\lambda+\mathfrak{b}+1} G'_a(x),$$
$$\frac{d^{\mathfrak{b}}}{dx^{\mathfrak{b}}}[F_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x)\, F(x)^{\lambda}\, \zeta_{\mathfrak{b}}] = x^{\sigma_{\mathfrak{b}}+\lambda-\mathfrak{b}-1} H'_a(x),$$

wo $G'_a(x)$ und $H'_a(x)$ wie F beschaffene Functionen bedeuten, und es ergiebt sich wie dort:

$$(2.) \qquad [\eta_a, \zeta_{\mathfrak{b}}] = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_a-\sigma_{\mathfrak{b}}} K'(x),$$

wo $K'(x)$ ebenfalls eine wie F beschaffene Function ist. Wie dort folgt auch,

1) S. 198 dieses Bandes. Sch.
2) S. 216 ff. dieses Bandes. Sch.
3) S. 196 dieses Bandes. Sch.

dass der Ausdruck linker Hand in dieser Gleichung einer nicht unendlichen Constanten gleich ist.

194] Ist daher $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$, also $\sigma_\mathfrak{a}$ und $\sigma_\mathfrak{b}$ von einander verschieden, so muss $K'(x)$ identisch verschwinden, demnach

$$[\eta_\mathfrak{a}, \zeta_\mathfrak{b}] = 0. \qquad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}) \tag{3.}$$

Für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ setzen wir:

$$[\eta_\mathfrak{a}, \zeta_\mathfrak{a}] = e_\mathfrak{a} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.}$$

und werden zeigen, dass $e_\mathfrak{a}$ von Null verschieden ist.

12.

Nach No. 9 Gleichung (1.) ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_\mathfrak{a} = \sum_{i}^{n} b_{\mathfrak{a}i}\, \eta_{i\mu}, \\ \zeta_\mathfrak{a} = \sum_{i}^{n} c_{\mathfrak{a}i}\, \zeta_{i\mu}. \end{array} \right. \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.}$$

Hieraus folgt:

$$[\eta_\mathfrak{a}, \zeta_\mathfrak{b}] = \sum_{1}^{n} {}_{ik} b_{\mathfrak{a}i}\, c_{\mathfrak{b}k} [\eta_{i\mu}, \zeta_{k\mu}].$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (G.), (H.) und die Gleichungen (3.) und (4.) voriger Nummer ergiebt sich hieraus:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i}^{n} b_{\mathfrak{a}i}\, c_{\mathfrak{b}i} = 0, & \left(\begin{array}{l}\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n, \\ \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, n,\end{array} \quad \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}\right) \\ \sum_{i}^{n} b_{\mathfrak{a}i}\, c_{\mathfrak{a}i} = e_\mathfrak{a}. & (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right. \tag{2.}$$

Gesetzt, dass für irgend einen Werth von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = \nu$, $e_\mathfrak{a} = 0$ wäre, so hätte man die Gleichungen:

$$\sum_{i}^{n} b_{\nu i}\, c_{\mathfrak{b}i} = 0, \qquad (\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, n).$$

Dieselben repräsentiren n lineare Gleichungen mit den n Unbekannten $b_{\nu 1}, b_{\nu 2}, \ldots, b_{\nu n}$. Die Determinante derselben

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

kann nicht verschwinden, weil $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ein Fundamentalsystem ist und daher ζ_μ eine wohlbestimmte lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ist (s. meine Abh. Bd. 66, S. 128[1])). Es müssten [195 demnach $b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn}$ Null sein, folglich auch η_r identisch verschwinden, was gegen unsere Voraussetzung ist.

Da hiermit erwiesen ist, dass die sämmtlichen Grössen e_a von Null verschieden sind, so kann man die in η_a, ζ_a enthaltenen willkürlichen Factoren so bestimmen, dass

$$e_a = 1 \tag{3.}$$

wird.

Die n^2 Gleichungen:

$$\text{(J.)} \quad \begin{cases} \sum_1^n{}_i b_{ai} c_{bi} = 0, & \begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, n, \\ b = 1, 2, \ldots, n, \end{pmatrix} \quad a \gtrless b \\ \sum_1^n{}_i b_{ai} c_{ai} = 1, & (a = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

gestatten die Grössen c durch die Grössen b auszudrücken, da die Determinante:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, weil die Integrale η_a ein Fundamentalsystem bilden und demgemäss die Integrale $\eta_{i\mu}$ wohlbestimmte lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sind.

13.

Um den Ausdruck für $P_k^{(\mu)}$ aus Gleichung (F.) weiter zu berechnen, bezeichnen wir zur Abkürzung $a_{\mu+1}$ mit a, und irgend zwei Elemente der beiden Systeme $\eta_{i\mu}, \zeta_{i\mu}$ mit y, z, so wie mit ζ die aus z durch Vertauschung von x mit α hervorgehende Function, endlich mit r_1 und $-r_2-1$ die Exponenten, zu welchen resp. y und z gehören. Man kann alsdann in der Umgebung von a setzen:

$$\text{(1.)} \quad \begin{cases} y = f_0(x-a)^{r_1} + (x-a)^{r_1+1}\varphi(x), \\ \zeta = g_0(\alpha-a)^{-r_2-1} + (\alpha-a)^{-r_2}\psi(\alpha), \end{cases}$$

[1]) S. 167 dieses Bandes. Sch.

wo $\varphi(x)$ und $\psi(\alpha)$ nach ganzen positiven Potenzen resp. von $x-a$ und $\alpha-a$ fortschreitende Reihen und f_0, g_0 Constanten bedeuten. Es ist alsdann

$$(2.) \qquad \left[y, \int_\vartheta^{b'} \frac{\vartheta\, d\alpha}{x-\alpha}\right]_\xi^{(\infty)} = f_0 g_0 A + f_0 B + g_0 C + D,$$

196] wo

$$A = \left[(x-a)^{r_1}, \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}\, d\alpha\right]_\xi^{(\infty)},$$

$$B = \left[(x-a)^{r_1}, \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2}\psi(\alpha)}{x-\alpha}\, d\alpha\right]_\xi^{(\infty)},$$

$$C = \left[(x-a)^{r_1+1}\varphi(x), \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}\, d\alpha\right]_\xi^{(\infty)},$$

$$D = \left[(x-a)^{r_1+1}\varphi(x), \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2}\psi(\alpha)}{x-\alpha}\, d\alpha\right]_\xi^{(\infty)}.$$

Setzen wir nun

$$(3.) \qquad \left[(x-a)^{r_1+\beta}, \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{x-\alpha}\, d\alpha\right]_\xi^{(\infty)} = \sum_1^m {}_\lambda H_\lambda'',$$

wo β und γ positive ganze Zahlen oder Null bedeuten, so folgt aus No. 1 Gleichung (5.) und (5a.), und Gleichung (3.) No. 2:

$$(4.) \quad H_\lambda'' = (-1)^{\lambda-1} \sum_0^{\lambda-1} {}_\alpha\, 1.2\ldots(\lambda-\alpha-1) \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{(\xi-\alpha)^{\lambda-\alpha}}\, d\alpha \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x) F(x)^\lambda (x-a)^{r_1+\beta}\right)\right]_\xi.$$

Nun ist

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(x) F(x)^\lambda (x-a)^{r_1+\beta}\right] = (x-a)^{r_1+\beta+\lambda-\alpha} G'(x),$$

wo $G'(x)$ eine ganze rationale Function von x bedeutet. Ferner ist:

$$(\xi-a)^{\lambda-\alpha} \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{(\xi-\alpha)^{\lambda-\alpha}}\, d\alpha = \int_\vartheta^{b'} \frac{(\xi-\alpha+\alpha-a)^{\lambda-\alpha}}{(\xi-\alpha)^{\lambda-\alpha}} (\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}\, d\alpha$$

$$= \int_\vartheta^{b'} \left[1+\frac{\alpha-a}{\xi-\alpha}\right]^{\lambda-\alpha} (\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}\, d\alpha.$$

Daher ist, weil $-r_2-1$ in seinem reellen Theile > -1 ist,

$$(\xi-a)^{\lambda-\alpha} \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{(\xi-\alpha)^{\lambda-\alpha}}\, d\alpha$$

für $\xi = a$ für keinen Werth von ϑ unendlich.

Ist nun $\beta > 0$, so ist $r_1+\beta$ in seinem reellen Theile positiv, folglich

$$(\xi-a)^{r_1+\beta+\lambda-\alpha}\int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{(\xi-\alpha)^{\lambda-\alpha}}d\alpha = 0 \quad \text{für} \quad \xi = a.$$

Ist $\gamma > 0$, so ist

$$(\xi-a)^{\lambda-\alpha-1}\int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{(\xi-\alpha)^{\lambda-\alpha}}d\alpha = \int_\vartheta^{b'}\left(1+\frac{\alpha-a}{\xi-\alpha}\right)^{\lambda-\alpha-1}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{\xi-\alpha}d\alpha$$

für $\xi = a$ nicht unendlich, und folglich, weil der reelle Theil von $r_1 > -1$ ist, [197

$$(\xi-a)^{r_1+\beta+\lambda-\alpha}\int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{(\xi-\alpha)^{\lambda-\alpha}}d\alpha = 0 \quad \text{für} \quad \xi = a.$$

Demnach ist

$$H_\lambda'' = 0 \quad \text{für} \quad \xi = a, \qquad \text{wenn} \quad \beta > 0 \quad \text{oder} \quad \gamma > 0$$

und folglich:

$$(5.)\quad \lim\left[(x-a)^{r_1+\beta}, \int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1+\gamma}}{x-\alpha}d\alpha\right]_\xi^{(x)} = 0 \text{ für } \xi = a,\ \beta > 0 \text{ oder } \gamma > 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass für $\xi = a$

$$B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0,$$

also:

$$(K.)\quad \lim\left[y, \int_\vartheta^{b'}\frac{\eta\, d\alpha}{x-\alpha}\right]_\xi^{(x)} = f_0 g_0 . \lim\left[(x-a)^{r_1}, \int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}d\alpha\right]_\xi^{(x)}.$$

Setzt man wieder

$$(6.)\qquad \left[(x-a)^{r_1}, \int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}d\alpha\right]_\xi^{(x)} = \sum_1^n{}_\lambda H_\lambda^{(\alpha)},$$

und

$$(7.)\qquad G_{(n-\lambda)(Q-1)}(x)\,F(x)^\lambda = G_{(n-\lambda)(Q-1)}(a)\,F'(a)^\lambda(x-a)^\lambda + (x-a)^{\lambda+1}G''(x),$$

wo $G''(x)$ eine ganze rationale Function von x bedeutet, so ist:

$$(8.)\qquad H_\lambda^{(\alpha)} = H_\lambda^{(a)} + H_\lambda^{(\alpha)},$$

wo

$$(9.)\quad \begin{cases} H_\lambda^{(a)} = (-1)^{\lambda-1}G_{(n-\lambda)(Q-1)}(a)\,F'(a)^\lambda\sum_0^{\lambda-1}{}_a(r_1+\lambda)_a\,a!\,(\lambda-a-1)!\,(x-a)^{r_1+\lambda-a}\int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{(x-\alpha)^{\lambda-a}}d\alpha, \\ H_\lambda^{(\alpha)} = (-1)^{\lambda-1}\sum_0^{\lambda-1}{}_a(\lambda-a-1)!\,\frac{d^a}{dx^a}\left[G''(x)(x-a)^{r_1+\lambda+1}\right]\int_\vartheta^{b'}\frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{(x-\alpha)^{\lambda-a}}d\alpha, \end{cases}$$

indem wir, wie es vielfach geschieht, zur Abkürzung:

$$1.2.3\ldots m = m!, \quad \frac{t(t-1)\ldots(t-m+1)}{m!} = t_m$$

setzen.

Nun ist wie oben zu ersehen, dass

$$H_\lambda^{(\delta)} = 0 \quad \text{für} \quad x = a,$$

und es folgt:

$$\text{(L.)} \quad \lim\left[(x-a)^{r_1}, \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}\,d\alpha\right]_\xi^{(\omega)} = \lim \sum_1^n{}_\lambda H_\lambda^{(\alpha)} \quad \text{für} \quad \xi = a.$$

198] Hieraus ist ersichtlich, dass zur Berechnung des Grenzwerthes auf der linken Seite der Gleichung (K.) oder (L.) an Stelle der Differentialgleichung (C.) die einfachere Differentialgleichung:

$$\text{(C'.)} \qquad \sum_0^n{}_\alpha G_{(n-\alpha)(\varrho-1)}(a)\,F'(a)^\alpha (x-a)^\alpha \frac{d^\alpha z}{dx^\alpha} = 0$$

zu Grunde zu legen ist.

Ebenso ergiebt sich

$$\text{(K'.)} \quad \lim\left[\int_{a'}^{\xi} \frac{y\,dx}{\alpha-x}, \vartheta\right]_\vartheta^{(\omega)} = f_0 g_0 \lim\left[\int_{a'}^{\xi} \frac{(x-a)^{r_1}}{\alpha-x}dx,\ (\alpha-a)^{-r_2-1}\right]_\vartheta^{(\omega)},$$

und dass bei der Berechnung des Grenzwerthes rechterhand wiederum an Stelle der Differentialgleichung (C.) die Differentialgleichung (C'.) zu Grunde zu legen ist.

14.

Da an die Stelle der Gleichung (C.) die Gleichung (C'.) getreten ist, so tritt an die Stelle der zu (C.) adjungirten (B.) die folgende:

$$\text{(B'.)} \qquad \sum_0^n{}_\alpha F_{(n-\alpha)(\varrho-1)}(a)\,F'(a)^\alpha (x-a)^\alpha \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = 0.$$

Es ist leicht zu ersehen, dass (C'.) und (B'.) einander adjungirte Differentialgleichungen sind.

In diesem Falle wird die Function U in No. 1 Gleichung (6a.) Null, und es ist nach Gleichung (A.):

$$\text{(1.)} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-a)^{r_1}, \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}\right]^{(\omega)} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{(x-a)^{r_1}}{\alpha-x}, (\alpha-a)^{-r_2-1}\right]^{(\alpha)} = 0.$$

Integrirt man diese Gleichung in Beziehung auf x von a' bis ξ und in Beziehung auf α von ϑ bis b', indem man die in No. 8 fixirten Integrationswege beibehält, so folgt:

$$(2.)\quad \begin{cases} \Big[(x-a)^{r_1}, \displaystyle\int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}d\alpha}{x-\alpha}\Big]_\xi^{(x)} + \Big[\displaystyle\int_{a'}^{\xi} \frac{(x-a)^{r_1}dx}{\alpha-x},\ (\alpha-a)^{-r_2-1}\Big]_\vartheta^{(\alpha)} \\ = \Big[(x-a)^{r_1}, \displaystyle\int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}d\alpha}{x-\alpha}\Big]_{a'}^{(x)} + \Big[\displaystyle\int_{a'}^{\xi} \frac{(x-a)^{r_1}dx}{\alpha-x},\ (\alpha-a)^{-r_2-1}\Big]_{b'}^{(\alpha)}. \end{cases}$$

Nach den Gleichungen (K.) und (K'.) ist:

$$(3.)\quad \begin{cases} \lim q^{(\mu)} = \lim\left\{\Big[y, \displaystyle\int_\vartheta^{b'} \frac{\eta\, d\alpha}{x-\alpha}\Big]_\xi^{(x)} + \Big[\displaystyle\int_{a'}^{\xi} \frac{y\,dx}{\alpha-x}, \eta\Big]_\vartheta^{(\alpha)}\right\} \\ \quad = f_0 g_0 \lim\left\{\Big[(x-a)^{r_1}, \displaystyle\int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}d\alpha\Big]_\xi^{(x)} + \Big[\displaystyle\int_{a'}^{\xi} \frac{(x-a)^{r_1}}{\alpha-x}dx,\ (\alpha-a)^{-r_2-1}\Big]_\vartheta^{(\alpha)}\right\}. \end{cases}$$

Demnach ist nach Gleichung (2.): [199

$$(4.)\quad \lim q^{(\mu)} = f_0 g_0 \lim\left\{\Big[(x-a)^{r_1}, \int_\vartheta^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{x-\alpha}d\alpha\Big]_{a'}^{(x)} + \Big[\int_{a'}^{\xi} \frac{(x-a)^{r_1}}{\alpha-x}dx,\ (\alpha-a)^{-r_2-1}\Big]_{b'}^{(\alpha)}\right\}.$$

Setzt man daher:

$$(5.)\quad M_\lambda = (-1)^{\lambda-1} G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\, F'(a)^\lambda \sum_0^{\lambda-1}{}_\alpha (\lambda-\alpha-1)!\,(r_1+\lambda)_\alpha\, \alpha!\,(a'-a)^{r_1+\lambda-\alpha} \int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{(a'-\alpha)^{\lambda-\alpha}}d\alpha,$$

$$(5a.)\quad M_\lambda' = (-1)^{\lambda-1} G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\, F'(a)^\lambda \sum_0^{\lambda-1}{}_\alpha (r_2+\lambda-\alpha-1)_{\lambda-\alpha-1}(\lambda-\alpha-1)!\,(b'-a)^{-r_2-\lambda+\alpha} \int_{a'}^{a} (x-a)^{r_1} \frac{\partial^\alpha}{\partial a^\alpha}\Big[\frac{(\alpha-a)^\lambda}{\alpha-x}\Big]dx$$

für $\alpha = b'$,

so ist nach No. 1 Gleichung (5a.)

$$(M.)\qquad \lim q^{(\mu)} = f_0 g_0 \sum_1^n{}_\lambda (M_\lambda + M_\lambda').$$

15.

Durch Reduction erhält man

$$(N.)\quad \begin{cases} M_\lambda = G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\, F'(a)^\lambda (-1)^{\lambda-1}(a'-a)^{r_1+1} \displaystyle\sum_1^{\lambda-1}{}_\nu \mathfrak{A}_\nu \frac{(b'-a)^{-r_2+\nu-1}}{(a'-b')^\nu} \\ \qquad + G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\, F'(a)^\lambda (-1)^{\lambda-1}(a'-a)^{r_1+1} \displaystyle\sum_0^{\lambda-1}{}_\nu \mathfrak{B}_\nu (r_2)_\nu \int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{a'-\alpha}d\alpha, \end{cases}$$

wo

$$\mathfrak{B}_\nu = \sum_1^{\lambda-\nu}{}_\varrho (\lambda-\varrho)!\,(\lambda-\varrho)_\nu (r_1+\lambda)_{\varrho-1}(\varrho-1)!, \tag{1.}$$

$$\mathfrak{A}_\nu = \sum_0^{\lambda-\nu-1}{}_s \mathfrak{B}_{\nu+s}\frac{(r_2-\nu)_s}{(\nu+s)_s\nu}, \tag{2.}$$

und

$$(\mathrm{N}'.)\quad \left\{\begin{aligned} M'_\lambda = {} & -G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\,F'(a)^\lambda(-1)^{\lambda-1}(a'-a)^{r_1+1}\sum_1^{\lambda-1}{}_\nu \mathfrak{A}'_\nu \frac{(b'-a)^{-r_2+\nu-1}}{(a'-b')^\nu} \\ & + G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\,F'(a)^\lambda(-1)^{\lambda-1}(b'-a)^{-r_2}\sum_0^{\lambda-1}{}_\nu \mathfrak{B}'_\nu(r_1)_\nu \int_{a'}^{a}\frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x}dx, \end{aligned}\right.$$

wo

$$\mathfrak{B}'_\nu = \sum_0^{\lambda-\nu-1}{}_\varrho (\nu+\varrho)!\,\lambda_\varrho(r_2+\lambda-\mu-\varrho-1)_{\lambda-\mu-\varrho-1}(\lambda-\mu-\varrho-1)!, \tag{3.}$$

$$\mathfrak{A}'_\nu = \sum_0^{\lambda-\nu-1}{}_s \mathfrak{B}'_{\nu+s}\frac{(r_1-\nu)_s}{(\nu+s)_s\nu}. \tag{4.}$$

200] 16.

Es sei

$$(\mathfrak{A}_\nu\nu)_{\nu=0} = \vartheta_\lambda, \tag{1.}$$

so folgt aus Gleichung (2.) vor. Nummer

$$\vartheta_\lambda = \sum_0^{\lambda-1}{}_s \mathfrak{B}_s(r_2)_s. \tag{2.}$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{B}_s$ seinen Werth aus Gleichung (1.) vor. Nummer, so ist:

$$\vartheta_\lambda = \sum_0^{\lambda-1}{}_\mathfrak{k} i_\mathfrak{k}(r_1+\lambda)_\mathfrak{k}\mathfrak{k}!, \tag{3.}$$

wo

$$i_\mathfrak{k} = (\lambda-\mathfrak{k}-1)!\sum_0^{\lambda-\mathfrak{k}-1}{}_\varepsilon (\lambda-\mathfrak{k}-1)_\varepsilon(r_2)_\varepsilon. \tag{4.}$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der Binomialcoefficienten folgt hieraus

$$i_\mathfrak{k} = (r_2+1)(r_2+2)\dots(r_2+\lambda-\mathfrak{k}-1), \tag{5.}$$

folglich ist

$$\vartheta_\lambda = \sum_0^{\lambda-1}{}_\mathfrak{k}(r_2+1)(r_2+2)\dots(r_2+\lambda-\mathfrak{k}-1)(r_1+\lambda)(r_1+\lambda-1)\dots(r_1+\lambda-\mathfrak{k}+1),$$

oder wenn man

$$\lambda-\mathfrak{k} = l$$

setzt,

$$(6.) \qquad \vartheta_\lambda = \sum_1^\lambda (r_2+1)(r_2+2)\dots(r_2+l-1)(r_1+\lambda)(r_1+\lambda-1)\dots(r_1+l+1).$$

Setzt man

$$(7.) \qquad P_\lambda(r) = (r+1)(r+2)\dots(r+\lambda),$$

so folgt aus Gleichung (6.):

$$(8.) \qquad \vartheta_{\lambda+1} = (r_1+\lambda+1)\,\vartheta_\lambda + P_\lambda(r_2).$$

Das Integral dieser Differenzengleichung ist:

$$(9.) \qquad \vartheta_\lambda = \frac{C(r_1-r_2)\,P_\lambda(r_1) - P_\lambda(r_2)}{r_1-r_2},$$

wo C von λ unabhängig. Da aber nach Gleichung (6.) ϑ_λ eine ganze rationale Function von r_1 und r_2 ist, so ergiebt sich:

$$C = \frac{1}{r_1-r_2}.$$

Daher erhält man:

$$(10.) \qquad \vartheta_\lambda = \frac{P_\lambda(r_1) - P_\lambda(r_2)}{r_1-r_2}.$$

Setzt man ebenso: [201

$$(11.) \qquad (\mathfrak{A}'_\nu v)_{\nu=0} = \vartheta'_\lambda,$$

so ist nach Gleichung (4.) voriger Nummer:

$$(12.) \qquad \vartheta'_\lambda = \sum_0^{\lambda-1} \mathfrak{B}'_s (r_1)_s,$$

und ergiebt sich wie vorhin:

$$(13.) \qquad \vartheta'_\lambda = \frac{P_\lambda(r_1) - P_\lambda(r_2)}{r_1-r_2}.$$

Demnach ist:

$$(14.) \qquad \vartheta_\lambda = \vartheta'_\lambda.$$

17.

Setzt man

$$(1.) \qquad \begin{cases} \nu\mathfrak{A}_\nu = f_\nu(r_1, r_2), \\ \mathfrak{B}_\nu = \varphi_\nu(r_1), \end{cases}$$

so folgt:

$$\frac{r_2-\nu}{\nu+1}f_{\nu+1}(r_1,r_2)-f_\nu(r_1,r_2)=-\varphi_\nu(r_1). \tag{2.}$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$r_2=\nu,$$

so folgt:

$$\varphi_\nu(r_1)=f_\nu(r_1,\nu). \tag{3.}$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) ergiebt sich:

$$f_{\nu+1}(r_1,r_2)=\frac{\nu+1}{r_2-\nu}[f_\nu(r_1,r_2)-f_\nu(r_1,\nu)]. \tag{4.}$$

Es sei ferner:

$$\left\{\begin{array}{l}\nu\mathfrak{A}'_\nu=f'_\nu(r_1,r_2),\\ \mathfrak{B}'_\nu=\varphi'_\nu(r_2),\end{array}\right. \tag{5.}$$

so folgt:

$$\frac{r_1-\nu}{\nu+1}f'_{\nu+1}(r_1,r_2)-f'_\nu(r_1,r_2)=-\varphi'_\nu(r_2). \tag{6.}$$

Setzt man

$$r_1=\nu,$$

so folgt:

$$\varphi'_\nu(r_2)=f'_\nu(\nu,r_2) \tag{7.}$$

202] und demnach

$$f'_{\nu+1}(r_1,r_2)=\frac{\nu+1}{r_1-\nu}[f'_\nu(r_1,r_2)-f'_\nu(\nu,r_2)]. \tag{8.}$$

Es sei nunmehr $f(r)$ eine beliebige ganze rationale Function von r, $f'(r)$ ihre Ableitung, und man setze:

$$\frac{f(r_1)-f(r_2)}{r_1-r_2}=F(r_1,r_2). \tag{9.}$$

Ist k eine beliebige ganze Zahl, so ergiebt sich

$$f(r)=f(k)+(r-k)f'(k)+(r-k)^2\psi(r), \tag{10.}$$

wo $\psi(r)$ eine ganze rationale Function von r bedeutet. Man erhält:

$$F(r_1,r_2)=\frac{(r_1-r_2)f'(k)+(r_1-k)^2\psi(r_1)-(r_2-k)^2\psi(r_2)}{r_1-r_2}, \tag{11.}$$

also:

$$\frac{F(r_1, r_2) - F(r_1, k)}{r_2 - k} = \frac{(r_1 - k)\psi(r_1) - (r_2 - k)\psi(r_2)}{r_1 - r_2}, \tag{12.}$$

$$\frac{F(r_1, r_2) - F(k, r_2)}{r_1 - k} = \frac{(r_1 - k)\psi(r_1) - (r_2 - k)\psi(r_2)}{r_1 - r_2}. \tag{13.}$$

Demnach ist:

$$\frac{F(r_1, r_2) - F(r_1, k)}{r_2 - k} = \frac{F(r_1, r_2) - F(k, r_2)}{r_1 - k}. \tag{14.}$$

Haben nun $f_\nu(r_1, r_2)$ und $f'_\nu(r_1, r_2)$ für irgend einen Werth von ν die Form der Function $F(r_1, r_2)$ (Gleichung (9.)), so folgt aus den Gleichungen (4.), (8.), (12.), (13.), dass sie für jeden Werth von ν dieselbe Form haben. Sind die Functionen $f_\nu(r_1, r_2)$, $f'_\nu(r_1, r_2)$ gleichzeitig für jenen Werth von ν identisch, so sind sie nach den Gleichungen (4.), (8.), (14.) für jeden Werth von ν identisch.

Nun haben nach den Gleichungen (10.) und (13.) voriger Nummer $f_0(r_1, r_2)$, $f'_0(r_1, r_2)$ die Form der Function $F(r_1, r_2)$ (Gleichung (9.)), und sie sind nach Gleichung (14.) voriger Nummer identisch.

Demnach ist für jeden Werth von ν

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}'_\nu. \tag{O.}$$

18.

Aus den Gleichungen (N.), (N'.), (O.) und den Gleichungen (10.), (13.) (14.) der No. 16 folgt:

$$\left\{\begin{aligned} M_\lambda + M'_\lambda &= (-1)^{\lambda-1} G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\, F'(a)^\lambda \frac{P_\lambda(r_1) - P_\lambda(r_2)}{r_1 - r_2} \\ &\asymp \left\{(a'-a)^{r_1+1} \int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_2-1}}{a'-\alpha}\, d\alpha + (b'-a)^{-r_2} \int_{a'}^{a} \frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x}\, dx\right\}. \end{aligned}\right. \tag{1.}$$

[203

Bezeichnen wir mit $E(r)$ die linke Seite der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C.), so ist:

$$E(r) = G_{n(\varrho-1)}(a) + \sum_1^n{}_\lambda G_{(n-\lambda)(\varrho-1)}(a)\, F'(a)^\lambda\, r(r-1)\dots(r-\lambda+1). \tag{2.}$$

Nach No. 2 ist

$$E(-r_\alpha - 1) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \tag{3.}$$

wenn $r_1, r_2, \dots, r_n$ die Wurzeln der zum singulären Punkte a gehörigen de-

terminirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) bedeuten. Ferner ist:

$$(4.) \qquad E(-r_\alpha-1) = G_{n(Q-1)}(a) - \sum_1^n{}_\lambda (-1)^{\lambda-1} G_{(n-\lambda)(Q-1)}(a) F'(a)^\lambda P_\lambda(r_\alpha).$$

Ist daher r_1 von r_2 verschieden, und setzt man in dieser Gleichung für α successive 1 und 2, und dividirt die Differenz der beiden entstandenen Gleichungen durch r_1-r_2, so folgt aus Gleichung (3.):

$$(5.) \qquad \sum_1^n{}_\lambda (-1)^{\lambda-1} G_{(n-\lambda)(Q-1)}(a) F'(a)^\lambda \frac{P_\lambda(r_1)-P_\lambda(r_2)}{r_1-r_2} = 0.$$

Es ergiebt sich demnach aus der Gleichung (M.) und den Gleichungen (1.) und (5.):

$$(P.) \qquad \lim q^{(\mu)} = 0$$

(r_1 von r_2 verschieden). Ist $r_1 = r_2$, so ist:

$$(6.) \qquad \frac{E(-r_1-1)-E(-r_2-1)}{-r_1+r_2} = E'(-r_1-1),$$

wo $E'(r)$ die Ableitung von $E(r)$ bedeutet. Bezeichnet man wie in No. 10 mit $D(r)$ die linke Seite der Gleichung (D.), so folgt aus No. 2, dass

$$(7.) \qquad E'(-r_1-1) = (-1)^{n-1} D'(r_1),$$

und es ergeben die Gleichungen (1.), (4.), (6.), (7.) und die Gleichung (M.):

$$\lim q^{(\mu)} = (-1)^{n-1} f_0 g_0 D'(r_1) \left\{ (a'-a)^{r_1+1} \int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_1-1}}{a'-\alpha} d\alpha + (b'-a)^{-r_1} \int_{a'}^{a} \frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x} dx \right\},$$

oder wenn man in Übereinstimmung mit Gleichung (8.) No. 10 die will-
[204] kürlichen Grössen f_0, g_0 so bestimmt, dass

$$f_0 g_0 D'(r_1) = 1,$$

$$(Q.) \quad \lim q^{(\mu)} = (-1)^{n-1} \left\{ (a'-a)^{r_1+1} \int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_1-1}}{a'-\alpha} d\alpha + (b'-a)^{-r_1} \int_{a'}^{a} \frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x} dx \right\}.$$

19.

In der Gleichung (Q.) ist gemäss No. 13 a für $a_{\mu+1}$ gesetzt. Nach den in No. 8 und 14 gemachten Festsetzungen sind die Integrale in derselben Gleichung innerhalb G_1, das erstere längs $l_{\mu+1}$, das letztere längs l_μ zu er-

strecken. Der Integrationsweg des ersteren führt also nicht durch a', der des letzteren nicht durch b', die Integrale haben demnach endliche Werthe. Diese Werthe bleiben ungeändert, wenn man für die genannten Integrationswege beliebige andere substituirt, die mit den ersteren Flächen einschliessen, welche resp. a' und b' nicht enthalten.

Substituirt man im ersten Integrale:

$$\alpha - a = (a' - a)u, \tag{1.}$$

so ist

$$(a'-a)^{r_1+1}\int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_1-1}}{a'-\alpha}\,d\alpha = \int_0^{\frac{b'-a}{a'-a}} \frac{u^{-r_1-1}}{1-u}\,du. \tag{2.}$$

Substituirt man im zweiten Integrale

$$x - a = \frac{b'-a}{u}, \tag{3.}$$

so ergiebt sich

$$(b'-a)^{-r_1}\int_{a'}^{a} \frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x}\,dx = \int_{\frac{b'-a}{a'-a}}^{\infty} \frac{u^{-r_1-1}}{1-u}\,du. \tag{4.}$$

Von den Integrationswegen der Integrale in u führt keiner durch den Punkt $u = 1$ hindurch. Es ist daher

$$(a'-a)^{r_1+1}\int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_1-1}}{a'-\alpha}\,d\alpha + (b'-a)^{-r_1}\int_{a'}^{a} \frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{u^{-r_1-1}}{1-u}\,du, \tag{5.}$$

wo in dem Integrale rechterhand der Integrationsweg ebenfalls den Punkt $u = 1$ vermeidet.

Für reelle Werthe von r_1 ist der Werth des Integrals auf der rechten Seite der Gleichung (5.) bekannt. Wendet man das bekannte CAUCHYsche Verfahren auf den vorliegenden allgemeinen Fall an, so erhält man zwar den Werth des Integrals, es macht jedoch die Bestimmung einer Potenz von [205 e einige Schwierigkeiten, die im Resultat als Factor auftritt. Deshalb ziehen wir es vor, eine directe Berechnung der Summe auf der rechten Seite der Gleichung (Q.) eintreten zu lassen:

Da für den Werth dieser Summe die Wahl der Werthe a' und b' gleichgültig ist, dieselbe auch von vorn herein (s. No. 8) willkürlich war, so mögen

die Punkte a' und b' von a gleichen Abstand haben. Es lassen alsdann

$$\frac{1}{a'-\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{1}{b'-x}$$

Entwickelungen resp. nach positiven ganzen Potenzen von $\alpha-a$ und $x-a$ zu, welche resp. für $\alpha = b'$ und $x = a'$ gültig sind, weil $\frac{b'-a}{a'-a}$ zwar den Modul Eins aber ein von Null verschiedenes Argument hat. Setzt man diese Entwickelungen in die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (Q.), so folgt:

$$(6.) \quad (a'-a)^{r_1+1}\int_a^{b'} \frac{(\alpha-a)^{-r_1-1}}{a'-\alpha}\,d\alpha = \sum_0^{\infty a}\left(\frac{b'-a}{a'-a}\right)^{-r_1+a} \frac{1}{-r_1+a},$$

$$(7.) \quad (b'-a)^{-r_1}\int_{a'}^{a} \frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x}\,dx = -\sum_0^{\infty a}\left(\frac{a'-a}{b'-a}\right)^{r_1+a+1} \frac{1}{r_1+a+1}.$$

Setzt man in der letzteren Gleichung

$$a+1 = -b,$$

so folgt

$$(7a.) \qquad (b'-a)^{-r_1}\int_{a'}^{a} \frac{(x-a)^{r_1}}{b'-x}\,dx = \sum_{-1}^{-\infty b}\left(\frac{b'-a}{a'-a}\right)^{-r_1+b} \frac{1}{-r_1+b}.$$

Aus den Gleichungen (6.) und (7a.) folgt

$$(8.) \qquad \lim q^{(\omega)} = (-1)^{a-1}\sum_{-\infty}^{\infty a} \tilde{\omega}^{-r_1+a}\,\frac{1}{-r_1+a},$$

wenn man

$$\frac{b'-a}{a'-a} = \tilde{\omega}$$

setzt.

Bildet man von der Summe die Ableitung nach $\tilde{\omega}$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{\tilde{\omega}-1}+\frac{1}{1-\tilde{\omega}} = 0,$$

wie es sein muss, da der Werth $\lim q^{(\omega)}$ von $\tilde{\omega}$ unabhängig sein muss. Man kann daher für $\tilde{\omega}$ einen beliebigen Werth $e^{\vartheta i}$ setzen, wo ϑ eine reelle positive Grösse ist.

206] Es sei

$$\vartheta = \pi,$$

so ergiebt sich

$$\lim q^{(\omega)} = (-1)^n e^{-\pi r_1 i} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^a}{r_1 - a}. \tag{9.}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\frac{\pi}{\sin \pi r_1} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^a}{r_1 - a}, \tag{10.}$$

daher

$$\lim q^{(\omega)} = (-1)^n e^{-\pi r_1 i} \frac{\pi}{\sin \pi r_1}; \quad (r_1 = r_2). \tag{R.}$$

Jetzt sind wir im Stande, den Werth der rechten Seite der Gleichung (F.) anzugeben.

Sind nämlich $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der zum singulären Punkte $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.), und bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit $D(r)$, ihre Ableitung nach r mit $D'(r)$, und belässt $\eta_{lk}, \vartheta_{li}, b_{kc}, c_{ib}$ ihre in No. 9 fixirte Bedeutung, und bestimmt endlich die willkürlichen Coefficienten f_{a0}, g_{a0} resp. von $(x-a)^{r_a}$ in $\eta_{a\mu}$ und von $(\alpha-a)^{-r_a-1}$ in $\vartheta_{a\mu}$ in Übereinstimmung mit Gleichung (8.) No. 10, so dass

$$f_{a0} g_{a0} D'(r_a) = 1, \tag{11.}$$

so ergeben die Gleichungen (P.) und (R.):

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha U \eta_{lk} \vartheta_{li} = (-1)^n \pi \sum_{1}^{n} b_{ka} c_{la} \frac{e^{-\pi r_a i}}{\sin \pi r_a}. \tag{S.}$$

Mit dieser Gleichung stellen wir die Gleichung (4.) No. 7 zusammen:

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha U \eta_{lk} \vartheta_{li} = 0, \quad \mu > \nu + 1 \text{ oder } \mu < \nu - 1. \tag{T.}$$

In Bezug auf das Integral (S.) gilt dasselbe, was am Schluss der Nummer (7.) in Betreff des Integrals T bemerkt wurde.

20.

Die in No. 4 gemachten Einschränkungen für den Werthbereich der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determi-

nirenden Fundamentalgleichungen haben im Wesentlichen den Zweck, dass die Integrale (S.) und (T.) endliche Werthe annehmen.

207] Letzteres ist nämlich im Allgemeinen nur dann der Fall, wenn η_k, δ_i für jeden der in den Integrationsgrenzen auftretenden singulären Punkte a resp. mit $x-a$ und $\alpha-a$ multiplicirt nicht unendlich werden. Da sich nun η_k, δ_i als lineare homogene Functionen der zu a gehörigen Fundamentalsysteme resp. der Differentialgleichungen (B.) und (C.) — letzterer nach Vertauschung von x mit α — darstellen lassen, so ergiebt sich, dass im Allgemeinen auch die reellen Theile der Exponenten, zu welchen die Elemente sowohl des einen als des anderen dieser Fundamentalsysteme gehören, grösser als die negative Einheit sein müssen. Letztere Bedingung ist aber ihrerseits nach dem Satze am Schlusse der No. 2 im Allgemeinen nur dann erfüllt, wenn die Bestimmungen der No. 4 über diese Exponenten statthaben.

In besonderen Fällen jedoch kann es sich ereignen, dass die reellen Theile der Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sowohl der Differentialgleichung (B.) als der adjungirten (C.) grösser als die negative Einheit sind, ohne dass die Bestimmungen der No. 4 erfüllt sind.

Es seien z. B. in der Differentialgleichung

$$\varphi_0(x)y + \varphi_1(x)y' + \varphi_2(x)y'' + \cdots + \varphi_n(x)y^{(n)} = 0 \tag{1.}$$

die Coefficienten $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_n(x)$ ganze rationale Functionen, und zwar sei

$$\varphi_\lambda(x) \text{ vom Grade } p+\lambda.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_n(x) = 0 \tag{2.}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{p+n}$ seien alle von einander verschieden. Ist a eine derselben, also ein singulärer Punkt der Differentialgleichung (1.), so ist die zu ihm gehörige determinirende Fundamentalgleichung derselben:

$$\varphi_n'(a)r(r-1)\ldots(r-n+1) + \varphi_{n-1}(a)r(r-1)\ldots(r-n+2) = 0 \tag{3.}$$

(s. meine Abh. Bd. 66 S. 147[1]).

[1]) S. 188 dieses Bandes. Sch.

Die Wurzeln derselben sind:

$$(4.) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2 \quad \text{und} \quad n-1-\frac{\varphi_{n-1}(a)}{\varphi_n'(a)}.$$

Die zur Differentialgleichung (1.) adjungirte Differentialgleichung lautet:

$$(5.) \qquad \sum_0^n (-1)^{a-1}\frac{d^a}{dx^a}[\varphi_a(x)z] = 0.$$

Ordnet man dieselbe nach den Ableitungen von z, so ergiebt sich: [208

$$(5a.) \qquad \psi_0(x)z + \psi_1(x)z' + \cdots + \psi_n(x)z^{(n)} = 0,$$

wo $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ ebenfalls ganze rationale Functionen von x sind, und zwar im Allgemeinen

$$\psi_\lambda(x) \text{ vom Grade } p+\lambda,$$

insbesondere

$$(6.) \qquad \psi_n(x) = (-1)^{n-1}\varphi_n(x), \quad \psi_{n-1}(x) = (-1)^{n-2}[\varphi_{n-1}(x) - n\varphi_n'(x)],$$

wo $\varphi_n'(x)$ die Ableitung von $\varphi_n(x)$ bedeutet.

Die zum singulären Punkt a gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (5.) ist daher:

$$(7.) \quad \varphi_n'(a)r(r-1)\ldots(r-n+1) - [\varphi_{n-1}(a) - n\varphi_n'(a)]r(r-1)\ldots(r-n+2) = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind:

$$(8.) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2 \quad \text{und} \quad -1+\frac{\varphi_{n-1}(a)}{\varphi_n'(a)}.$$

Ist daher der reelle Theil von $\frac{\varphi_{n-1}(a)}{\varphi_n'(a)}$ positiv und kleiner als n, so sind sowohl die Grössen (4.) als auch die Grössen (8.) in ihren reellen Theilen grösser als die negative Einheit.

21.

Wir wollen den Fall $n = 2$ einer näheren Betrachtung unterziehen. Die Differentialgleichung (1.) voriger Nummer lautet alsdann:

$$(1.) \qquad \varphi_0(x)y + \varphi_1(x)y' + \varphi_2(x)y'' = 0.$$

Die Wurzeln der zu einem singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind:

$$(r.) \qquad 0,\ 1-\gamma,$$

wo

$$\gamma = \frac{\varphi_1(a)}{\varphi_2'(a)} \qquad (2.)$$

gesetzt ist.

Es sei

$$y = \varphi_2(x)^\varepsilon W, \qquad (3.)$$

so ergiebt sich:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\varphi_0(x)\varphi_2(x) + \varepsilon\varphi_2'(x)\varphi_1(x) + \varepsilon(\varepsilon-1)\varphi_2'(x)^2 + \varepsilon\varphi_2(x)\varphi_2''(x)]W \\ \qquad + [\varphi_1(x) + 2\varepsilon\varphi_2'(x)]\varphi_2(x)W' + \varphi_2(x)^2 W'' = 0, \end{array} \right. \qquad (4.)$$

209] wo $\varphi_2''(x)$ die zweite Ableitung von $\varphi_2(x)$ und W', W'' resp. die erste und zweite Ableitung von W bedeuten.

Die zum singulären Punkte a gehörige determinirende Fundamentalgleichung dieser Differentialgleichung hat die Wurzeln:

$$-\varepsilon, \; -\varepsilon + 1 - \gamma. \qquad (s.)$$

Es sei

$$2 > \text{Reeller Theil von } \gamma > 0.$$

Wählt man für ε eine beliebige Grösse von der Art, dass der reelle Theil derselben positiv und kleiner als Eins und zwar grösser als Eins vermindert um den reellen Theil von γ und kleiner als Zwei vermindert um den reellen Theil von γ, so sind die Wurzeln (s.) in ihrem reellen Theile negativ und absolut kleiner als Eins.

Die Differentialgleichung (4.) gestattet alsdann die Anwendung der Formeln (S.) und (T.).

22.

Um ein Beispiel auszuführen, sei in voriger Nummer

$$\varphi_1(x) = \tfrac{1}{2}\varphi_2'(x), \qquad (1.)$$

so dass

$$\varphi_0(x)y + \tfrac{1}{2}\varphi_2'(x)y' + \varphi_2(x)y'' = 0 \qquad (2.)$$

die vorgelegte Differentialgleichung sei. Dieselbe ist eine Verallgemeinerung derjenigen, welcher die Laméschen Functionen der verschiedenen Ordnungen genügen (s. die Abh. des Herrn Heine, dieses Journal Bd. 60 S. 278, 299 ff.).

Die Wurzeln (r.) sind in diesem Falle:

(r.) $$0, \frac{1}{2},$$

die Wurzeln (s.):

(s.) $$-\varepsilon, -\varepsilon+\frac{1}{2}.$$

Man hat also zu wählen

(3.) $$1 > \text{Reeller Theil von } \varepsilon > \frac{1}{2}.$$

Die Differentialgleichung (4.) voriger Nummer wird:

(4.) $$[\varphi_0(x)\varphi_2(x)+\varepsilon(\varepsilon-\tfrac{1}{2})\varphi_2'(x)^2+\varepsilon\varphi_2(x)\varphi_2''(x)]W+(2\varepsilon+\tfrac{1}{2})\varphi_2'(x)\varphi_2(x)W'+\varphi_2(x)^2W''=0.$$

Die hierzu adjungirte Differentialgleichung lautet:

(5.) $$[-\varphi_0(x)\varphi_2(x)-(\varepsilon-1)(\varepsilon-\tfrac{3}{2})\varphi_2'(x)^2+(\varepsilon-\tfrac{3}{2})\varphi_2(x)\varphi_2''(x)]Z+(2\varepsilon-\tfrac{7}{2})\varphi_2(x)\varphi_2'(x)Z'-\varphi_2(x)^2Z''=0.$$ [210

Setzt man in derselben

(6.) $$Z = \varphi_2(x)^{\varepsilon-\frac{1}{2}}V,$$

so ergiebt sich für V die Differentialgleichung:

(7.) $$\varphi_0(x)V+\tfrac{1}{2}\varphi_2'(x)V'+\varphi_2(x)V''=0,$$

welche mit der Differentialgleichung (2.) identisch ist.

Ist daher y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (2.), so sind

$$1)\quad y_1\varphi_2(x)^{-\varepsilon},\quad y_2\varphi_2(x)^{-\varepsilon},$$
$$2)\quad y_1\varphi_2(x)^{\varepsilon-\frac{1}{2}},\quad y_2\varphi_2(x)^{\varepsilon-\frac{1}{2}}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen resp. der Differentialgleichungen (4.) und (5.).

Es sei demnach η_1, η_2 das zum Punkte $x=\infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (2.), so sind:

$$1)\quad w_1 = \eta_1\varphi_2(x)^{-\varepsilon},\quad w_2 = \eta_2\varphi_2(x)^{-\varepsilon},$$
$$2)\quad \zeta_1 = \eta_2\varphi_2(x)^{\varepsilon-\frac{1}{2}},\quad \zeta_2 = \eta_1\varphi_2(x)^{\varepsilon-\frac{1}{2}}$$

die zu $x=\infty$ gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen resp. der Differentialgleichungen (4.) und (5.), und zwar sind w_1 und ζ_1, sowie w_2 und ζ_2 adjungirte Integrale. Sind nämlich σ_1 und σ_2 die Exponenten, zu welchen

η_1 und η_2 resp. gehören, so ist nach Gleichung (4.) No. 5, da jetzt $\varphi_2(x)$ vom Grade $p+2$, also $\sum r = \frac{p+2}{2}$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{p+2}{2} + p + 1 = \frac{p}{2}. \tag{8.}$$

Die Integrale w_1, w_2 gehören resp. zu den Exponenten

$$\sigma_1 + (p+2)\varepsilon, \quad \sigma_2 + (p+2)\varepsilon \tag{9.}$$

und die Integrale ζ_1, ζ_2 resp. zu den Exponenten

$$\sigma_2 - (p+2)(\varepsilon - \tfrac{1}{2}), \quad \sigma_1 - (p+2)(\varepsilon - \tfrac{1}{2}). \tag{10.}$$

Die in derselben Verticalreihe befindlichen Grössen in (9.) und (10.) geben in Übereinstimmung mit dem Satze am Schlusse der No. 3 zur Summe die um Eins vermehrte Gradzahl des Coefficienten von W in Gleichung (4.).

211] Ist ferner $\eta_{\mu 1}, \eta_{\mu 2}$ das zum singulären Punkte $a_{\mu+1}$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (2.), welche resp. den Exponenten $0, \frac{1}{2}$ entsprechen, so sind

$$1)\quad w_{\mu 1} = \eta_{\mu 1}\varphi_2(x)^{-\varepsilon}, \quad w_{\mu 2} = \eta_{\mu 2}\varphi_2(x)^{-\varepsilon},$$
$$2)\quad \zeta_{\mu 1} = \eta_{\mu 2}\varphi_2(x)^{\varepsilon - \frac{1}{2}}, \quad \zeta_{\mu 2} = \eta_{\mu 1}\varphi_2(x)^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$$

resp. die zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (4.) und (5.), und zwar sind wieder, dem Satze am Schlusse der No. 2 entsprechend, die in derselben Verticalreihe untereinanderstehenden Elemente adjungirte Integrale.

Nun sei

$$\eta_\alpha = b_{\alpha 1}\eta_{\mu 1} + b_{\alpha 2}\eta_{\mu 2}, \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{11.}$$

so erhält man durch Multiplication dieser Gleichung mit $\varphi_2(x)^{-\varepsilon}$

$$w_\alpha = b_{\alpha 1}w_{\mu 1} + b_{\alpha 2}w_{\mu 2}, \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{12.}$$

und durch Multiplication der Gleichung (11.) mit $\varphi_2(x)^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$:

$$\begin{cases} \zeta_1 = b_{21}\zeta_{\mu 2} + b_{22}\zeta_{\mu 1}, \\ \zeta_2 = b_{11}\zeta_{\mu 2} + b_{12}\zeta_{\mu 1}. \end{cases} \tag{13.}$$

Setzt man

$$\zeta_\alpha = c_{\alpha 1}\zeta_{\mu 1} + c_{\alpha 2}\zeta_{\mu 2}, \tag{14.}$$

so ergiebt die Vergleichung mit Gleichung (13.):

$$(15.) \qquad c_{11} = b_{22}, \quad c_{12} = b_{21}, \quad c_{21} = b_{12}, \quad c_{22} = b_{11}.$$

Die Gleichungen (J.) ergeben daher folgende Relationen für die Grössen b:

$$(16.) \qquad b_{11}b_{12} = 0, \quad b_{21}b_{22} = 0, \quad b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} = 1,$$

folglich entweder:

$$(16a.) \qquad b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad b_{12}b_{21} = 1,$$

oder

$$(16b.) \qquad b_{12} = 0, \quad b_{21} = 0, \quad b_{11}b_{22} = 1.$$

Welcher von beiden Fällen erfüllt ist, kann nach den Vorschriften meiner Abhandlung Bd. 75 dieses Journals S. 212 ff.[1]), wo die Bestimmung der Grössen b gelehrt wird, entschieden werden.

Bezeichnet man die nach No. 1 für die Differentialgleichung (4.) dieser Nummer zu bildende Function U mit $U(\varepsilon, x, \alpha)$, und bezeichnet die durch Vertauschung von x mit α aus η_α hervorgehenden Functionen mit ϑ_α, so ergiebt die Gleichung (T.):

$$(17.) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha U(\varepsilon, x, \alpha)\eta_\alpha \varphi_2(x)^{-\varepsilon} \vartheta_\mathfrak{b} \varphi_2(\alpha)^{\varepsilon - \frac{1}{2}} = 0. \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2 \\ \mathfrak{b} = 1, 2 \\ \mu > \nu+1 \text{ oder } \mu < \nu-1 \end{pmatrix}$$

Setzt man [212

$$(18.) \qquad \tau_1 = -\frac{e^{\pi\varepsilon i}}{\sin \pi\varepsilon}, \qquad \tau_2 = -\frac{ie^{\pi\varepsilon i}}{\cos \pi\varepsilon},$$

so ergiebt sich aus der Gleichung (S.) und den Gleichungen (16.):

$$(19.) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha U(\varepsilon, x, \alpha)\eta_\alpha \varphi_2(x)^{-\varepsilon} \vartheta_\mathfrak{b} \varphi_2(\alpha)^{\varepsilon - \frac{1}{2}} = 0, \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, \mathfrak{b} = 2 \\ \mathfrak{a} = 2, \mathfrak{b} = 1 \end{pmatrix}$$

$$(20.) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha U(\varepsilon, x, \alpha)\eta_\alpha \varphi_2(x)^{-\varepsilon} \vartheta_\alpha \varphi_2(\alpha)^{\varepsilon - \frac{1}{2}} = \pi\tau_\mathfrak{b},$$

und zwar ist in Gleichung (20.):

im Falle (16a.) für $\mathfrak{a} = 1, \mathfrak{b} = 2$ für $\mathfrak{a} = 2, \mathfrak{b} = 1$,
im Falle (16b.) für $\mathfrak{a} = 1, \mathfrak{b} = 1$ für $\mathfrak{a} = 2, \mathfrak{b} = 2$

zu nehmen.

[1]) S. 398 ff. dieses Bandes. Sch.

Die Gleichungen (17.) bis (20.) sind gültig für alle Werthe von ε, welche der Bedingung genügen

(21.) $$1 > \text{Reeller Theil von } \varepsilon > \tfrac{1}{2}.$$

23.

Wenden wir das Vorhergehende auf die Laméschen Functionen m^{ter} Ordnung an, so ist (nach Herrn Heine, dieses Journal Bd. 60 S. 299) die Differentialgleichung, welcher diese genügen:

(1.) $$\varphi_0(x)\,y + \tfrac{1}{2}\varphi_1'(x)\,y' + \varphi_2(x)\,y'' = 0,$$

wo

(2.) $$\varphi_0(x) = -\tfrac{1}{4}[n(n+m-1)x^{m-1} + k_1 C_1 x^{m-2} - \cdots \pm k_{m-2} C_{m-2}\, x \mp k_{m-1} C_{m-1}].$$

In diesem Falle ist der Grad p der Function $\varphi_0(x)$ in Gleichung (2.) voriger Nummer

$$p = m-1.$$

Nennt man, wie in No. 20,

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m+1}$$

die Wurzeln der Gleichung

(3.) $$\varphi_2(x) = 0,$$

so lassen sich die Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ so bestimmen, dass die Differentialgleichung (1.) eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von

$$\sqrt{x-a_1},\ \sqrt{x-a_2},\ \ldots,\ \sqrt{x-a_{m+1}}$$

zum Integrale hat (s. Heine l. c.). Dieses Integral nennt Herr Heine eine [213] Lamésche Function erster Art und bezeichnet dasselbe mit $E(x)$. Ein zweites Integral $F(x)$, welches nach absteigenden Potenzen von x entwickelt mit $x^{\frac{-(n+m-1)}{2}}$ anfängt, nennt derselbe eine Lamésche Function zweiter Art. Beide heissen Lamésche Functionen m^{ter} Ordnung.

Nun hat die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.) die Wurzeln

$$-\frac{n}{2},\quad \frac{n+m-1}{2}.$$

Demnach ist in voriger Nummer

(4.) $$\begin{cases} \eta_1 = E(x), \\ \eta_2 = F(x) \end{cases}$$

zu setzen. Übrigens ergiebt sich auf bekannte Weise:

$$(5.) \qquad F(x) = E(x)\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{E(x)^2\sqrt{\varphi_2(x)}}.$$

Wenn man in die Gleichungen (17.) bis (20.) voriger Nummer

$$\eta_1 = E(x), \quad \eta_2 = F(x),$$
$$\mathfrak{y}_1 = E(\alpha), \quad \mathfrak{y}_2 = F(\alpha)$$

substituirt, so liefern die Gleichungen (17.) vier, die Gleichungen (19.) und (20.) je zwei Relationen für die LAMÉschen Functionen, welche für beliebige Werthe von ε gelten, von der Beschaffenheit, dass

$$1 > \text{Reeller Theil von } \varepsilon > \tfrac{1}{2}.$$

Greifswald, im März 1873.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 417, Gl. (6.) $\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(\infty)}$ statt $\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\infty)}$,
„ „ , Zeile 9 v. u. $[-\alpha^{-p-1}]_1^{(\alpha)}$ statt $[\alpha^{-p-1}]_1^{(\alpha)}$,
„ 418, „ 12 v. u. S. 139 ff. statt S. 139,
„ 422, „ 8, 4 Fundamentalsysteme statt Fundamentalsystemen,
„ 423, „ 7 v. u. (D.) statt (6.),
„ 424, „ 8 dieser statt diesen,
„ 427, „ 11 $\nu > \mu+1$ oder $\nu < \mu-1$ statt $\nu \gtrless \mu$,
„ „ , Gl. (4.) $\mu > \nu+1$ oder $\mu < \nu-1$ statt $\mu \gtrless \nu$,
„ 428, Zeile 10, y und $\mathfrak{z}$ statt dieselben,
„ 429, Gl. (8.) $\int_{\alpha'}^{\alpha_{\mu+1}} \frac{y\,dx}{\alpha-x}$ statt $\int_{\alpha'}^{\alpha_{\mu+1}} \frac{y\,dx}{x-\alpha}$,
„ 430, Zeile 11 S. 139 ff. statt S. 139,
„ „ , „ 8 v. u. x mit α statt α mit x,

S. 436, Gl. (4.) $[\ldots]_\xi$ statt $[\ldots]_\xi^{(x)}$,
„ 437, Zeile 6 $(\xi-\alpha)^{\lambda-q}$ statt $\xi-\alpha$,
„ „ , „ 8 und 10 $\beta>0$ oder $\gamma>0$ statt $\alpha>0$ oder $\beta>0$,
„ „ , Gl. (6.) $[\ldots]_\xi^{(x)}$ statt $[\ldots]^{(\infty)}$,
„ 438, Gl. (L.) $\xi = a$ statt $x = a$,
„ 439, Gl. (4.) $\left[\int_{a'}^{\xi}\cdots\right]_{b'}^{(a)}$ statt $\left[\int_{a}^{\xi}\cdots\right]_{b}^{(a)}$,
„ 444, Zeile 9 v. u. als obere Grenze des ersten Integrals b' statt a',
„ 447, Zeile 10 gehörigen statt gehörige,
„ „ , Gl. (T.) $\mu>\nu+1$ oder $\mu<\nu-1$ statt $\mu\gtrless\nu$,
„ 450, Zeile 6 und 4 v. u. $\frac{1}{2}\varphi_2'(x)$ statt $\frac{1}{2}\varphi_2(x)$ (Correctur des Verfassers in seinem Handexemplar),
„ 453, Gl. (17.) $\mu>\nu+1$ oder $\mu<\nu-1$ statt $\mu\gtrless\nu$.
„ „ , Zeile 7 v. u. den Gleichungen (16.) statt der Gleichung (16.),

Es wurde eingeschaltet:

S. 437, Zeile 2, S. 438, Gl. (L.), S. 439, Gl. (4.) da,
„ 454, „ 2 »genügen«.

2) Die S. 426, Zeile 2 v. u. bis S. 427, Zeile 2 unter gewissen Bedingungen als ausführbar bezeichnete Gleichstellung des Punktes $x=\infty$ mit den im Endlichen gelegenen singulären Punkten lässt sich thatsächlich nicht realisiren, da die Ausdrücke $\left[y, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)}$ für $x=\infty$ und ein endliches α und $\left[\frac{1}{x-\alpha}, y\right]^{(\alpha)}$ für $\alpha=\infty$ und ein endliches x nicht gleichzeitig verschwinden können.

S. 444, Gl. (7.) muss rechts vom Gleichheitszeichen der Factor $(-1)^{n-1}$ unterdrückt werden. Entsprechend ist dieselbe Änderung auf derselben Seite, Zeile 9 v. u. und Gl. (Q.), ferner S. 446, Gl. (2.) und S. 447 in den Gleichungen (9.), (R.), (S.) vorzunehmen. Es muss auch bemerkt werden, dass die S. 445, Zeile 2 v. u. bis S. 447, Gl. (R.) gegebene Ableitung des Werthes der rechten Seite von Gl. (Q.) nicht einwandfrei erscheint, da sie sich (abgesehen davon, dass S. 446, Zeile 6 v. u. links vom Gleichheitszeichen der Factor $\bar{\omega}^{-r_1}$ fehlt) auf die S. 446, Zeile 3–5 enthaltene irrthümliche Voraussetzung gründet, dass eine geometrische Reihe $\sum_0^\infty{}_q \bar{\omega}^q$ für Werthe von $\bar{\omega}$, deren Modul gleich Eins und deren Argument von Null verschieden ist, convergirt. Die Richtigkeit der Gl. (R.), S. 447 (mit der nach dem obigen erforderlichen Abänderung des Factors $(-1)^n$ in -1) lässt sich jedoch vermittelst des vom Verfasser selbst erwähnten CAUCHYschen Verfahrens (S. 445, Zeile 8–5 v. u.) leicht darthun.

Auf den Gegenstand dieser Abhandlung ist der Verfasser später, Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften, 1892, S. 1113 ff. zurückgekommen. Er bemerkt daselbst (S. 1125, 1126, Fussnote), dass sich in dem Beispiele S. 453 ein Rechenfehler eingeschlichen habe. Aus den Gleichungen (15.) ergeben sich nämlich nicht die Gleichungen (16.), (16a.), da bei der dortigen Bestimmung von ζ_1, ζ_2 (S. 451) und $\zeta_{\mu 1}, \zeta_{\mu 2}$ (S. 452)

$$[w_{\mu 2}, \zeta_{\mu 2}] = -[w_{\mu 1}, \zeta_{\mu 1}], \qquad [w_2, \zeta_2] = -[w_1, \zeta_1]$$

sein muss (vergl. S. 431–434) und demgemäss aus den für dieses Beispiel hiernach abzuändernden Gleichungen (J.) (S. 435) sich nur $b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}=1$ ergiebt.

Eine gedrängte Übersicht der vorstehenden Arbeit hat FUCHS im zweiten Abschnitte seiner zur Säcularfeier ABELs verfassten Abhandlung, Acta Mathematica, Bd. 26 (1902), S. 322–327 gegeben.

HIRSCH. SCH.

XVII.

ÜBER DIE ABBILDUNG DURCH ALGEBRAISCHE FUNCTIONEN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 77, 1874, S. 339—352.)

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Frage: Ist es möglich, [339 eine ganze Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie vermittelst einer algebraischen Function auf die Fläche eines Kreises eindeutig abzubilden? — Zu dieser Frage, welche an sich der Untersuchung nicht unwerth erscheint, wird man unter anderen auf folgendem Wege hingeleitet. In meiner Arbeit dieses Journ. Bd. 75 S. 177 ff.[1]) habe ich nachgewiesen, dass man durch die singulären Punkte einer Function einer complexen Variabeln $f(z)$ stets eine geschlossene sich selbst nicht schneidende Curve C_s (Absonderungsschnitt) in der z-Ebene legen kann, von der Beschaffenheit, dass für jeden der beiden dadurch gebildeten Bestandtheile der Ebene, G_1, G_2, durchweg gültige Reihenentwickelungen sich angeben lassen. Der unendlich grosse Theil G_1 ist nämlich durch eine rationale Function auf die Fläche eines Kreises E abgebildet, durch dessen Hülfe die Reihenentwickelungen gefunden werden. In derselben Arbeit ist der Zusammenhang der beiden Functionszweige beim Übergange über den Absonderungsschnitt festgestellt. — Gelänge es nun, die endliche Fläche G_2, welche diese geschlossene Absonderungslinie bildet, auf Null zu reduciren, so hätte man eine einzige in der ganzen Ebene mit Ausnahme einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie gültige Reihenentwickelung. Dieses führt eben auf die oben aufgeworfene Frage.

---

[1]) Abh. XIV, S. 361 ff. dieses Bandes. Sch.

Das Resultat unserer Untersuchung ist aber, dass unter den algebraischen Functionen die rationalen Functionen zweiten Grades allein eine ganze Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf die Fläche eines Kreises eindeutig abzubilden vermögen. — Dieser Satz lässt eine Erweiterung zu, bei welcher an die Stelle des Kreises eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche tritt, deren Begrenzung gewissen Voraussetzungen genügt.

340] Aus demselben Satze, in Verbindung mit den Resultaten meiner oben citirten Arbeit ergiebt sich demnach, dass auch das Zusammenziehen der Fläche G_1 auf Null im Allgemeinen, wenn die Function $f(z)$ mehr als drei singuläre Punkte besitzt, wenigstens vermittelst algebraischer Substitutionen nicht ausführbar ist, und nur geleistet werden kann, wenn zwischen den singulären Punkten derartige Relationen erfüllt sind, dass eine Substitution zweiten Grades hinreicht, um die in meiner Arbeit vorgenommene Zerlegung der z-Ebene zu erreichen.

1.

Eine algebraische Function z von w, durch welche die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer einen Flächentheil nicht einschliessenden Linie in derselben auf einen bestimmten Flächentheil F der w-Ebene eindeutig abgebildet wird, hat die Eigenschaft, dass jedem w innerhalb der Fläche F nur ein einziger Werth z entspricht. Es ist daher nothwendiger Weise z eine rationale Function von w. Die oben aufgestellte Aufgabe ist also mit der folgenden übereinstimmend:

Die rationalen Functionen z von w zu finden, vermittelst deren die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf einen Kreis in der w-Ebene eindeutig abgebildet werden kann.

2.

Es sei daher

$$z = \frac{Z(w)}{N(w)} = F(w) \tag{1.}$$

eine rationale Function von w, durch welche die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie Γ auf die Fläche eines

Kreises K in der w-Ebene eindeutig abgebildet wird. Wir setzen wie in meiner Arbeit (dieses Journ. Bd. 75 S. 178[1]))

$$\psi(w_1, w) = \frac{F(w_1) - F(w)}{w_1 - w} = 0, \tag{2.}$$

und bezeichnen wie dort (S. 180[2])) die Curvenzweige $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$, welche die Wurzeln w_1 dieser Gleichung beschreiben, während w die Peripherie von K durchläuft, als die mit dieser Peripherie zusammengehörigen Curvenzweige.

Wir wollen hier in einige Erörterungen eintreten, welche zwar theilweise für das Folgende nicht nöthig, aber für das Verständniss der hier betrachteten Abbildungsart nützlich sind:

a) Aus der Voraussetzung ergiebt sich: Jedem nicht auf Γ befindlichen [341 Punkte z entspricht ein und nur ein Punkt im Innern von K; und umgekehrt, jedem Punkte w entspricht nur ein Punkt z.

Jedem Punkte z auf Γ entsprechen Punkte auf der Peripherie von K, und umgekehrt jedem Punkte w auf dieser Peripherie ein Punkt z auf Γ.

b) Keine der Wurzeln der Gleichung:

$$F'(w) = 0, \tag{3.}$$

wo $F'(w)$ die Ableitung von $F(w)$ bedeutet, liegt im Innern von K. Denn läge eine solche Wurzel w', welche dem Werthe $z = z'$ zugehöre, im Innern von K, so würden bekanntlich jedem dem Punkte z' hinlänglich benachbarten Punkte z mindestens zwei dem Punkte w' beliebig benachbarte Wurzeln w der Gleichung (1.) entsprechen, was nach a) nicht möglich ist.

c) Keinem der Werthe z auf Γ entspricht ein Punkt w im Innern von K. Denn sei $z = \zeta$ ein beliebiger Punkt auf Γ, so entspricht demselben der Voraussetzung gemäss nach a) ein Punkt w' auf der Peripherie von K. Entspräche demselben auch ein Punkt w'' im Innern von K, so müsste die Gleichung (2.) für $w = w'$ die Wurzel $w_1 = w''$ haben. Demnach gehörte auch zu jedem Werthe w im Innern von K und in der Nähe von w' eine Wurzel w_1 in der Nähe von w'', d. h. es entspräche nicht auf Γ befindlichen Punkten z mehr als eine Wurzel der Gleichung (1.) innerhalb K, was nach a) nicht möglich ist.

---

[1]) S. 363 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 364 dieses Bandes. Sch.

d) Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich unmittelbar, dass kein Theil der Curven $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$ sich im Innern von K befindet. Es liegt daher überhaupt von den Wurzeln w_1 der Gleichung (2.) nur eine oder keine innerhalb K, je nachdem w ausserhalb K und nicht auf einer der Curven $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$, oder im Innern von K befindlich ist.

e) Jedem Punkte w der Peripherie von K entspricht nur ein Punkt z auf Γ, da z eine rationale Function von w ist. Dagegen entspricht jedem von den beiden Endpunkten von Γ verschiedenen Punkte z dieser Linie mehr als ein Punkt w auf der Peripherie von K.

Da nämlich, wenn w von einem bestimmten Punkte w_0 der Peripherie von K ausgehend auf derselben einen vollständigen Umlauf vollzieht, z vom entsprechenden Punkte z_0 auf Γ ausgehend, die ganze Curve Γ beschreibend 342] wieder zu z_0 zurückkehrt, so muss hierbei jeder Punkt z mindestens zweimal überschritten werden, also jedem nicht in einen der Endpunkte von Γ fallenden Punkte z dieser Linie mehr als ein Punkt w auf der Peripherie von K zugehören.

Die beiden Endpunkte von Γ sind Verzweigungspunkte der algebraischen Function w von z Gl. (1.)

f) Es sei ζ ein beliebiger Punkt der Linie Γ, für den nicht gleiche Wurzeln w der Gleichung (1.) auf der Peripherie von K liegen, und w', w'' zwei von einander verschiedene Punkte auf dieser Peripherie, welche $z = \zeta$ zugehören, so entsprechen stetigen Verrückungen von ζ auf Γ stetige Verrückungen von w' und w'' auf der Peripherie von K.

Durch Differentiation der Gleichung (2.) ergiebt sich, wenn

$$w = re^{\varphi i}, \quad w_1 = r_1 e^{\varphi_1 i} \tag{4.}$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} w \left[\frac{dr}{r} + i d\varphi\right] + \frac{\partial \psi}{\partial w_1} w_1 \left[\frac{dr_1}{r_1} + i d\varphi_1\right] = 0. \tag{5.}$$

Der Voraussetzung nach wird die Gleichung (2.) befriedigt für $w = w'$, $w_1 = w''$, und es ist für dieselben zusammengehörigen Punkte gleichzeitig

$$dr = 0 \quad \text{und} \quad dr_1 = 0.$$

Bezeichnet man demnach den Werth von

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} w : \frac{\partial \psi_1}{\partial w_1} w_1 \quad \text{für} \quad w = w', \quad w_1 = w''$$

mit A, so erhält man aus Gleichung (5.) für die Verrückungen der zusammengehörigen Punkte w' und w'' die Relation:

$$d\varphi_1 = -Ad\varphi. \tag{6.}$$

Diese Gleichung lehrt, dass A eine reale Grösse ist. Dieselbe ist auch wegen der über ζ gemachten Voraussetzung weder Null noch unendlich.

Bewegt sich w von w' aus nach einer beliebigen Richtung, so bewegt sich eine Wurzel w_1 der Gleichung (2.) von w'' ausgehend nach dem aus Gleichung (5.) sich ergebenden Gesetze:

$$\frac{dr_1}{R} + id\varphi_1 = -A\left(\frac{dr}{R} + id\varphi\right), \tag{7.}$$

eine Gleichung, welche in die beiden folgenden zerfällt:

$$dr_1 = -Adr, \tag{8.}$$

$$d\varphi_1 = -Ad\varphi \tag{8a.}$$

(vergl. meine Arbeit dies. Journ. Bd. 75 S. 184[1]).

Da nach d) keine der einem Punkte w im Innern von K entsprechenden [343 Wurzeln w_1 der Gleichung (2.) im Innern von K liegt, so muss $dr_1 > 0$ sein, wenn $dr < 0$, demnach ist nach Gleichung (8.) A positiv.

Hieraus folgt aber wiederum nach derselben Gleichung $dr_1 < 0$, wenn $dr > 0$, d. h., wenn w von w' ausgehend aus der Fläche K heraustritt, muss w_1 von w'' ausgehend in diese Fläche eintreten.

g) Wir können jetzt beweisen, dass keinem Punkte ζ der Linie Γ mehr als zwei Punkte w auf der Peripherie von K entsprechen.

Gehörten nämlich zu ζ drei verschiedene Punkte w', w'', w''' auf der Peripherie von K, so müsste nach f) jedem dem w' hinlänglich benachbarten Werthe w ausserhalb K eine Wurzel w_1 der Gleichung (2.) in der Nähe von w'' und eine Wurzel w_1 in der Nähe von w''', jede innerhalb K gelegen, entsprechen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, demselben Werthe von z in der Nähe von ζ müsste mehr als ein Werth w innerhalb K zugehören, was nach a) und c) nicht möglich ist.

Man kann auch beweisen, dass von den auf Γ befindlichen Verzweigungspunkten der algebraischen Function w von z es die beiden Endpunkte allein

[1]) S. 368 dieses Bandes. Sch.

sind, für welche Werthe w auf der Peripherie von K zu den gleichen Wurzeln der Gleichung (1.) gehören. Allein für unseren Zweck genügt es zu wissen, dass Verzweigungspunkte überhaupt nur in endlicher Anzahl vorhanden sind.

Wenn w die Peripherie von K beschreibt, so kann demnach gemäss dem eben festgestellten Satze kein noch so kleiner endlicher Theil der Linie Γ mehr als zweimal zurückgelegt werden. Es ergiebt sich also mit Rücksicht auf e) der Satz:

Jedem von den beiden Endpunkten von Γ verschiedenen Punkte z dieser Linie entsprechen zwei und nur zwei Punkte w auf der Peripherie von K. Diese beiden Punkte fallen für jeden der Endpunkte in einen einzigen zusammen.

h) Aus dem Vorhergehenden folgt, dass von den Curven $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$ eine mit der Peripherie von K coincidirt, während von den übrigen kein Theil innerhalb K oder auf der Peripherie von K gelegen ist. Dass kein Theil derselben innerhalb K liegen kann, ist durch d) bewiesen. Dass aber auch 344] kein Theil auf die Peripherie von K fallen kann, ergiebt sich daraus, dass sonst im Widerspruch zu dem Satze in g) Werthen von z auf Γ mehr als zwei Werthe w auf der Peripherie von K entsprechen müssten.

Man kann zeigen, dass die Curven $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$, mit Ausschluss derjenigen, welche mit der Peripherie von K zusammenfällt, diese Peripherie nirgends schneiden. Den Beweis dieses Satzes, welchen wir für unsern Zweck nicht brauchen, wollen wir jedoch hier unterdrücken.

i) Aus dem Satze in g) ergiebt sich Folgendes: Bewegt sich der Punkt w auf der Peripherie von K, so bewegt sich eine und nur eine Wurzel w_1 der Gleichung (2.) auf derselben Peripherie. Vollendet w seinen Umlauf, so hat w_1 ebenfalls einen vollständigen Umlauf vollzogen und umgekehrt. Denn sonst würden mehr als zwei Punkte der Peripherie von K demselben Werthe z entsprechen müssen.

Aus Gleichung (6.) ergiebt sich, dass sich w und w_1 in entgegengesetzter Richtung auf der Peripherie von K bewegen. Sie müssen sich deshalb während eines vollständigen Umlaufes zweimal begegnen. Es wird daher während eines Umlaufes die halbe Differenz der Argumente von w und w_1 alle Werthe zwischen Null und 2π und zwar jeden Werth nur einmal annehmen.

3.

Wir können den Mittelpunkt des Kreises K als Anfangspunkt der w betrachten. Ist nämlich m der zum Mittelpunkt gehörige complexe Werth, so würde die Substitution von v für $w-m$ eine rationale Function von v liefern, welche die z-Ebene mit Ausschluss von Γ auf eine um den Anfang der v beschriebene Kreisfläche abbildete.

Es sei

$$(1.)\qquad \begin{cases} Z(w) = a_0 + a_1 w + \cdots + a_n w^n, \\ N(w) = b_0 + b_1 w + \cdots + b_n w^n. \end{cases}$$

Setzt man

$$(2.)\qquad a_i b_k - a_k b_i = a_{ik},$$

so ist

$$(3.)\qquad \psi(w_1, w) = \sum_{k,l} a_{lk} \cdot (w_1 w)^k \frac{w_1^{l-k} - w^{l-k}}{w_1 - w},$$
$$(l > k;\ k = 0, 1, \ldots, n;\ l = 0, 1, \ldots, n).$$

Setzt man

$$(4.)\qquad w = Re^{\varphi i},\quad w_1 = Re^{\varphi_1 i},$$

so ist [345

$$(5.)\qquad \frac{w_1^\lambda - w^\lambda}{w_1 - w} = \left[Re^{\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi)i}\right]^{\lambda-1} \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(\varphi_1-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi)}.$$

Bezeichnen wir

$$(6.)\qquad \frac{\varphi_1-\varphi}{2} = \psi,\quad \frac{\varphi_1+\varphi}{2} = \psi_1,\quad Re^{\psi_1 i} = v,\quad \frac{\sin\lambda\psi}{\sin\psi} = S_\lambda,$$

so hat man:

$$(7.)\qquad \frac{w_1^\lambda - w^\lambda}{w_1 - w} = S_\lambda v^{\lambda-1}.$$

Es geht demnach die Gleichung (2.) voriger Nummer für die Werthe (4.) über in

$$(A.)\qquad \sum_{kl} a_{lk} S_{l-k} v^{l+k-1} = 0,$$
$$(l > k;\ k = 0, 1, \ldots, n;\ l = 0, 1, \ldots, n).$$

Nach dem Satze in i) voriger Nummer genügt jedem realen Werthe von ψ eine auf der Peripherie von K befindliche Wurzel v dieser Gleichung.

4.

Ist der Grad n höher als der zweite, so kann nicht die Wurzel v der Gleichung (A.) unabhängig sein von ψ.

Da nämlich nach No. 2, i) zu jeder Lage von w und w_1 während ihres Umlaufes auf der Peripherie von K nur ein bestimmter Werth von ψ gehört, so würde aus der Unabhängigkeit des v von ψ sich ergeben, dass v während des ganzen Umlaufes einen und denselben constanten Werth k hätte. Nun ist

$$(1.) \qquad w w_1 = R^2 e^{(\varphi+\varphi_1)i} = v^2,$$

demnach wäre für den ganzen Umlauf

$$(2.) \qquad w w_1 = k^2.$$

Es wäre danach längs der ganzen Peripherie von K

$$(3.) \qquad F(w) = F\left(\frac{k^2}{w}\right).$$

Da also $F(w) : F\left(\frac{k^2}{w}\right)$ längs dieser Peripherie den constanten Werth Eins hätte, so behielte dieser Quotient als rationale Function von w nach einem bekannten Satze denselben Werth in der ganzen w-Ebene, es wäre demnach die Gleichung (3.) allgemein gültig.

346] Da mod $k = R$, so ist für Werthe w ausserhalb K der Modul von

$$w_1 = \frac{k^2}{w}$$

kleiner als R. Sind daher $w_1', w_1'', \ldots, w_1^{(n-1)}$ die $n-1$ zu einem im Innern von K gelegenen Punkte w gehörigen Wurzeln der Gleichung (2.) No. 2, welche nach No. 2, d) sämmtlich ausserhalb K befindlich sind, so giebt es auch $n-1$ zu demselben Werthe w gehörige Wurzeln derselben Gleichung $\frac{k^2}{w_1'}, \frac{k^2}{w_1''}, \ldots, \frac{k^2}{w_1^{(n-1)}}$, die innerhalb K liegen.

Nach No. 2, d) ist dieses nur möglich, wenn $n-1 = 1$, also $n = 2$ und $\frac{k^2}{w_1'} = w$ ist. Q. e. d.

5.

Es ergiebt sich aus einer bekannten Formel:

$$(1.) \qquad S_\lambda = 2^{\lambda-1}\cos^{\lambda-1}\psi + A_{\lambda,\lambda-2}\cos^{\lambda-2}\psi + \cdots, \quad S_0 = 1, \quad S_1 = 1,$$

wo $A_{\lambda,\lambda-2}, \ldots$ numerische Grössen bedeuten.

Ordnet man daher die Gleichung (A.) nach Potenzen von $\cos\psi$, so erhält man:

$$(B.) \qquad H_0 + H_1(2v\cos\psi) + H_2(2v\cos\psi)^2 + \cdots + H_{n-1}(2v\cos\psi)^{n-1} = 0,$$

wo H_i eine ganze rationale Function von v bedeutet der Gestalt:

$$(2.) \qquad H_i = a_{i+1,0} + \cdots + a_{n,n-i-1}v^{2n-2i-2},$$

worin wir nur die Coefficienten der nullten und der höchsten Potenz von v angegeben haben.

Setzt man in Gleichung (B.) $-\sqrt{-1}$ für $\sqrt{-1}$ und bezeichnet die conjugirten Werthe der Constanten a_{ik} mit a'_{ik} und erwägt, dass $\frac{R^2}{v}$ der conjugirte Werth des complexen Werthes v auf der Peripherie von K ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$(B'.) \qquad H'_0 + H'_1(2v\cos\psi) + H'_2(2v\cos\psi)^2 + \cdots + H'_{n-1}(2v\cos\psi)^{n-1} = 0,$$

wo

$$(2^a.) \qquad H'_i = a'_{n,n-i-1}R^{2(2n-i-2)} + \cdots + a'_{i+1,0}R^{2i}v^{2n-2i-2},$$

worin wiederum nur der Coefficient der nullten und der höchsten Potenz von v angegeben ist.

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (B.) und (B'.) die Grösse $2v\cos\psi$, so müssen in dem Resultate der Elimination für $n > 2$ die [347 einzelnen Coefficienten von v verschwinden, da nach voriger Nummer v nicht von ψ unabhängig sein kann.

6.

Wir behandeln zunächst einen besonderen Fall. Es sei nämlich erstens $b_0 = 0$, zweitens $a_n = 0$, und es wird drittens vorausgesetzt, dass von den Wurzeln der Gleichung

$$(1.) \qquad a_0 + a_1 w + \cdots + a_{n-1}w^{n-1} = 0$$

keine im Innern von K, also sämmtliche auf der Peripherie von K und ausserhalb K befindlich sind.

In diesem Falle sind b_n und a_0 von Null verschieden, da sonst der Grad der rationalen Function $F(w)$ nicht, wie wir voraussetzen, der n^{te} wäre. Es ist ferner b_1 von Null verschieden. Denn sonst wäre $w = 0$ eine Wurzel der

Gleichung (3.) No. 2, und es enthielte im Widerspruch zu No. 2, b) die Fläche K in ihrem Mittelpunkte eine Wurzel dieser Gleichung.

Da in diesem Falle dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $w = 0$ im Innern von K entspricht, so liegen die Wurzeln der Gleichung:

$$b_1 + b_2 w + \cdots + b_n w^{n-1} = 0 \tag{2.}$$

ausserhalb K (No. 2, c) und d)).

Aus den beiden ersten Voraussetzungen ergiebt sich

$$a_{nk} = -a_k b_n, \quad a_{k0} = -a_0 b_k \tag{3.}$$

Setzen wir den Coefficienten von v^0 in dem für diesen Fall gebildeten Resultate der Elimination von $2v\cos\psi$ aus den beiden Gleichungen (B.) und (B'.) gleich Null und dividiren die entstehende Gleichung durch $a_0^n b_n'^n R^{2n(n-1)}$, wo b_n' der conjugirte Werth von b_n ist, so erhalten wir, wenn wir noch für die nach EULER und BÉZOUT gebildete Eliminationsresultante zweier Gleichungen:

$$p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n = 0, \quad q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n = 0$$

in der Determinantenform die Bezeichnung einführen

$$\begin{bmatrix} p_0, & p_1, & \cdots, & p_n \\ q_0, & q_1, & \cdots, & q_n \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} b_1, & b_2, & b_3, & \cdots, & b_n \\ a'_{n-1}R^{2(n-1)}, & a'_{n-2}R^{2(n-2)}, & a'_{n-3}R^{2(n-3)}, & \cdots, & a'_0 \end{bmatrix} = 0, \tag{4.}$$

wo a_i' den conjugirten Werth von a_i darstellt.

348] Die Resultante der Elimination von w zwischen der Gleichung (2.) und der folgenden:

$$a'_{n-1}r^{2(n-1)} + a'_{n-2}r^{2(n-2)}w + a'_{n-3}r^{2(n-3)}w^2 + \cdots + a'_0 w^{n-1} = 0 \tag{5.}$$

wird aus Δ erhalten, wenn in letzterer Determinante r für R gesetzt wird, sie ist also, wenn man das Resultat dieser Substitution mit D bezeichnet:

$$D = 0. \tag{6.}$$

Dieser Gleichung genügt nach Gleichung (4.) $r = R$. Demnach hätten die Gleichungen (2.) und (5.) für $r = R$ jedenfalls eine Wurzel w gemeinschaftlich. Bezeichnen wir den Modul derselben mit s und setzen in Gleichung (5.) $r = R$ und für w den ihr mit Gleichung (2.) gemeinsamen Wurzelwerth, dessen con-

jugirter Werth $\frac{s^2}{w}$ ist, und endlich $-\sqrt{-1}$ für $\sqrt{-1}$, so erhalten wir:

$$(7.) \qquad a_0 + a_1\left(\frac{R}{s}\right)^2 w + a_2\left(\frac{R}{s}\right)^4 w^2 + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{R}{s}\right)^{2(n-1)} w^{n-1} = 0.$$

Da die Wurzeln der Gleichung (2.) ausserhalb K liegen, so ist:

$$(8.) \qquad s > R,$$

demnach

$$(9.) \qquad \mathrm{mod}\left(\frac{R}{s}\right)^2 w = \frac{R^2}{s} < R,$$

deshalb sagt die Gleichung (7.) aus, dass die Gleichung (1.) eine Wurzel $w_0 = \left(\frac{R}{s}\right)^2 w$ hätte, die innerhalb K gelegen ist. Dieses ist aber wegen der dritten Voraussetzung nicht möglich.

Demnach ist unter den Voraussetzungen dieser Nummer die Abbildung der ganzen z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ durch die rationale Function $z = F(w)$ nicht möglich, wenn $n > 2$.

7.

Es sei nunmehr allgemein

$$(1.) \qquad z = \frac{Z(w)}{N(w)} = F(w)$$

eine reducirte rationale Function vom n^{ten} Grade, d. h. eine solche, in welcher der Zähler oder der Nenner oder beide zugleich vom n^{ten} Grade sind. Es werde vorausgesetzt, dass durch dieselbe die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie Γ auf die um den Anfang [349 der w als Mittelpunkt mit dem Radius R beschriebenen Kreisfläche K eindeutig abgebildet werde.

Es sei α ein Punkt auf der Peripherie von K, für den z weder Null noch unendlich, und

$$(2.) \qquad \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} = -\frac{p}{q}$$

gesetzt. Sind a_n und b_n die Coefficienten der höchsten Potenzen von w resp. im Zähler und Nenner von (1.), so kann nicht für jedes α auf der Peripherie

$$(3.) \qquad \frac{p}{q} = -\frac{a_n}{b_n}$$

sein, weil sonst die rationale Function $F(w)$ auf dieser Peripherie, also nach einem bekannten Satze überall constant wäre. Es werde nun vorausgesetzt, dass α ein Punkt sei, für den die Gleichung (3.) nicht erfüllt ist.

Alsdann ist

$$pN(w) + qZ(w) = Z_1(w) \tag{4.}$$

eine ganze rationale Function vom n^{ten} Grade, welche für $w = \alpha$ verschwindet.

Die Ebene $\mathfrak{z}$, welche mit der z-Ebene durch die Beziehung:

$$\mathfrak{z} = \frac{p + qz}{r + sz}, \tag{5.}$$

in welcher r und s noch zu bestimmende Grössen sind, verbunden ist, wird mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie $\mathfrak{G}$ auf die Kreisfläche K abgebildet durch die Substitution:

$$\mathfrak{z} = \frac{Z_1(w)}{N_1(w)}, \tag{6.}$$

wo

$$N_1(w) = rN(w) + sZ(w). \tag{7.}$$

Der Zähler $Z_1(w)$, welcher für den Punkt α der Peripherie von K verschwindet, kann nur noch in einem anderen Punkte der Peripherie Null werden (No. 2, g)). Ist daher $n > 2$, so giebt es noch ausserhalb K (No. 2, c)) im Endlichen befindliche Punkte, für welche $Z_1(w)$ verschwindet. Ein solcher sei γ. Nun bestimme man r und s so, dass

$$N_1\left(\frac{R^2}{\gamma'}\right) = 0 \tag{8.}$$

350] sei, wo γ' den conjugirten Werth von γ darstellt. Durch die Substitution:

$$w = \frac{\varrho\beta + \sigma\gamma\mathfrak{w}}{\varrho + \sigma\mathfrak{w}}, \tag{9.}$$

wo

$$\beta = \frac{R^2}{\gamma'} \tag{10.}$$

und ϱ und σ unbestimmte von Null verschiedene Grössen sind, wird die Kreisfläche K auf die Fläche des um den Anfang der $\mathfrak{w}$ als Mittelpunkt in der $\mathfrak{w}$-Ebene beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ abgebildet.

Es sei

$$(11.)\qquad \begin{cases} Z_1(w) = (w-\gamma)\prod_1^{n-1}(\alpha_i w - A_i), \\ N_1(w) = (w-\beta)\prod_1^{n-1}(\beta_i w - B_i), \end{cases}$$

so wird durch die Substitution (9.)

$$(12.)\qquad \mathfrak{z} = -\frac{\varrho}{\sigma}\,\frac{\prod_1^{n-1}[\varrho(\alpha_i\beta - A_i) + \sigma(\alpha_i\gamma - A_i)\mathfrak{w}]}{\mathfrak{w}\prod_1^{n-1}[\varrho(\beta_i\beta - B_i) + \sigma(\beta_i\gamma - B_i)\mathfrak{w}]}$$

eine rationale Function von $\mathfrak{w}$, welche den drei Voraussetzungen der vorigen Nummer genügt. Es ist erstlich der Coefficient von $\mathfrak{w}^0$ des Nenners Null, zweitens der Coefficient von $\mathfrak{w}^{n-1}$ des Zählers Null, drittens entspricht dem Punkte $\mathfrak{z} = 0$ der auf der Peripherie von $\mathfrak{K}$ liegende Werth

$$\mathfrak{w} = \frac{\varrho}{\sigma}\,\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma},$$

also kein Punkt innerhalb K (No. 2, c).

Da also aus der Abbildung der z-Ebene auf die Fläche K die der $\mathfrak{z}$-Ebene auf die Fläche $\mathfrak{K}$ (Gl. (12.)) folgt, die letztere aber nach voriger Nummer nicht möglich ist, so ergiebt sich der allgemeine Satz:

Es ist nicht möglich, durch eine rationale Function z von w höheren als zweiten Grades die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf eine Kreisfläche in der w-Ebene eindeutig abzubilden.

8.

Für $n = 2$ wird die Gleichung (2.) No. 2 nach Gleichung (3.) No. 3:

$$(1.)\qquad a_{10} + a_{20}(w_1 + w) + a_{21} w_1 w = 0.$$

Eine Abbildung der z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ auf die in der w-Ebene um den Anfang der w als Mittelpunkt mit dem Radius R [351 beschriebene Kreisfläche K wird stattfinden, wenn durch die Gleichung (1.) das Innere des Kreises K auf das Äussere desselben abgebildet wird.

Es beschreibe w die Peripherie von K, so beschreibt w_1 dieselbe Peripherie, wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$(2.)\qquad R^2 a'_{20} a_{21} - a'_{10} a_{20} = 0.$$

Dem Punkte $w = 0$ des Innern von K entspricht der Punkt

$$w_1 = -\frac{a_{10}}{a_{20}},$$

Demnach werden die Punkte w_1 des Äusseren von K den Punkten w im Innern von K entsprechen, wenn

$$\operatorname{mod} \frac{a_{10}}{a_{20}} > R,$$

oder

$$\frac{a_{10}a'_{10}}{a_{20}a'_{20}} > R^2. \tag{3.}$$

9.

Ein zweiter Beweis unseres Satzes am Schlusse der Nr. 7 könnte auf folgendem Wege geliefert werden.

Bringt man die Gleichung

$$z = F(w) \tag{1.}$$

auf die Form

$$(a_0 - b_0 z) + (a_1 - b_1 z)w + (a_2 - b_2 z)w^2 + \cdots + (a_n - b_n z)w^n = 0, \tag{2.}$$

setzt in derselben:

$$w = R\frac{iu - 1}{iu + 1}, \tag{3.}$$

und bezeichnet die dadurch entstehende Gleichung mit

$$P(u) = 0, \tag{4.}$$

so ist nach einem Satze, welchen ich in meiner Arbeit d. J., Bd. 75, S. 188[1]) aus der Abhandlung des Herrn HERMITE (Extrait d'une lettre à M. BORCHARDT, d. J. Bd. 52, S. 45) hergeleitet, die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung, in denen der Coefficient von i negativ ist, gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung (2.), die innerhalb des mit dem Radius R um den Anfang der w beschriebenen Kreises K liegen.

352] Es müsste demnach, wenn die ganze z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ auf die Kreisfläche K durch die Substitution (1.) abzubilden wäre, für jeden nicht Γ angehörigen Werth von z die Gleichung (4.) eine und nur eine

1) S. 373 dieses Bandes. Sch.

Wurzel haben, in welcher der Coefficient von i negativ ist. Die Anzahl der Wurzeln mit negativem Coefficienten von i der Gleichung (4.) ist aber, wie Herr HERMITE (l. c.) lehrt, gleich der Anzahl der negativen Quadrate, welche auftreten, wenn eine gewisse quadratische Form $\mathfrak{F}$ in eine Summe von Quadraten transformirt wird.

Ist $z = x + yi$, so sind die Coefficienten der Form $\mathfrak{F}$ Formen höherer Ordnung der Variabeln x und y. Ebenso die Coefficienten der Quadrate in der transformirten Form. Man hätte nun nachzuweisen, dass für $n > 2$ diese letzteren Formen nicht so beschaffen sein können, dass für jeden Werth von x und y stets eine und nur eine derselben negativ sei.

Wird umgekehrt unser Satz als bewiesen vorausgesetzt, so ergäben sich aus der eben angedeuteten Untersuchung interessante Eigenschaften jener quadratischen Formen.

Einen dritten Beweis unseres Satzes, welcher durch Zuhülfenahme der die algebraische Function w von z der Gleichung (1.) darstellenden RIEMANN-schen Fläche, deren Construction unter Berücksichtigung der Sätze in Nr. 2 leicht auszuführen ist, geliefert werden kann, behalten wir uns für eine andere Gelegenheit vor.

Greifswald, im Februar 1874.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde:

S. 459, Zeile 6 v. u. »nach« eingeschaltet,

„ 460, „ 2 liegt statt liegen gesetzt,

„ 464, „ 2 v. u. S_1 statt S gesetzt,

„ 471, „ 1 zwischen »Die« und »Anzahl« die Wendung »Entscheidung über die« unterdrückt.

2) Zu der No. 1 vergl. die folgende Abhandlung XVIII. SCH.

XVIII.

UBER DIE ABBILDUNG DURCH ALGEBRAISCHE FUNCTIONEN.

Anhang zur Abhandlung Bd. 77, S. 339 ff. dieses Journals [1]).

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1875, S. 338—339.)

In meiner Arbeit (Bd. 77 dieses Journals S. 339 ff. [1])) ist der Nach- [338
weis geliefert worden, dass unter den rationalen Functionen z von w die vom zweiten Grade allein die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf die Fläche eines Kreises in der w-Ebene eindeutig abzubilden vermögen.

In derselben Arbeit ist der Grund angegeben, warum unter den algebraischen Functionen z von w die rationalen allein in Bezug auf die Möglichkeit der Leistung einer solchen Abbildung durch dieselben untersucht worden (ebendaselbst S. 340 [2]), No. 1). Um Missverständnissen vorzubeugen, scheint es nöthig, diesen Grund etwas näher zu erörtern.

Die Abbildung der ganzen z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie Γ auf eine Kreisfläche K in der w-Ebene vermittelst einer algebraischen Function z von w kann in einem doppelten Sinne geschehen:

Erstlich könnte die Abbildung durch den gesammten Werthvorrath der algebraischen Function z von w erfolgen,

Zweitens könnte dieselbe durch einzelne Zweige derselben Function geleistet werden.

---

[1]) Abh. XVII, S. 457 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 458 dieses Bandes. Sch.

Ich habe daselbst die Abbildung im ersten Sinne genommen, und mich daher aus dem (S. 340, No. 1 daselbst[1]) angegebenen Grunde auf die rationalen Functionen z von w beschränkt, während ich die Möglichkeit der Abbildung im zweiten Sinne unerörtert liess, weil dieselbe unserem Zwecke nicht entspricht. Es sei mir gestattet, dieses hier etwas näher zu beleuchten.

Ist z eine m-werthige Function von w, so entsprechen jedem Werthe w aus dem gesammten Werthvorrathe der Function z m Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_m$ in der z-Ebene. Es sei daher ζ ein Zweig der Function z, welcher die ganze z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ auf die Kreisfläche K eindeutig abbildet, und w ein Punkt innerhalb K, welchem der Punkt z_1 des Zweiges ζ zugeordnet ist, so muss, da jedem nicht auf Γ befindlichen Punkte der 339] z-Ebene ein Punkt im Inneren von K entspricht, auch dem Punkte z_2 ein Punkt w' im Inneren von K zugehören. Es ist aber w' von w verschieden, da einem Punkte innerhalb K nur ein Punkt in der z-Ebene vermittelst des Zweiges ζ entsprechen darf. Es ergiebt sich hieraus, dass jedem nicht auf Γ befindlichen Punkte z in dem Gesammtwerthvorrath der algebraischen Function w von z mindestens zwei Punkte w und w' innerhalb K entsprechen.

Unsere Untersuchung zielt auf solche Abbildungen ab, durch welche in der ganzen z-Ebene gültige Darstellungen einer Function $f(z)$ ermöglicht werden (s. meine obengenannte Arbeit S. 339[2]), Einleitung). Ist nun nach den Principien meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 75, S. 203[3]) $f(z)$ als Function von w betrachtet innerhalb K definirt, so erforderte — bei einer Abbildung der z-Ebene auf K durch den Zweig ζ — die Determination von $f(z)$ als Function des Ortes in der z-Ebene, dass für jeden einzelnen Punkt der z-Ebene ermittelt werde, welcher von den Werthen $w, w', \ldots$ innerhalb K ihm entspricht, oder mit anderen Worten, da der Zweig schon durch die Zuordnung zweier entsprechenden Punkte w und z fixirt ist, sie erforderte die Kenntniss des Verlaufes des durch die Fläche K repräsentirten Zweiges der algebraischen Function w von z.

Diese Kenntniss wird überflüssig, wenn überhaupt jedem z nur ein Werth w innerhalb K entspricht. Dieses habe ich in meiner Notiz (dieses Journal

---

[1]) S. 458 dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 457 dieses Bandes. Sch.
[3]) S. 389 dieses Bandes. Sch.

Bd. 76, S. 175 f.[1]) in Bezug auf die in meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 75, S. 186 ff.[2]) geleistete Darstellung der Function $f(z)$ innerhalb der Fläche G_1 in der z-Ebene vermittelst der Abbildung von G_1 auf eine Kreisfläche E in der w-Ebene hervorgehoben. Da es nun unsere Absicht war, die Möglichkeit einer für die ganze z-Ebene gültigen Darstellung der Function $f(z)$ zu eruiren, unter Beibehaltung derselben Bedingung, nicht den Verlauf eines Zweiges einer algebraischen Function kennen zu müssen, so war die Auffassung der Abbildung im ersten Sinn für unseren Zweck geboten.

Göttingen, im Juni 1874.

---

[1]) Abh. XV, S. 413 f. dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 370 ff. dieses Bandes. Sch.

ANMERKUNG ZU DER ABHANDLUNG IV

»Über die aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen etc.« S. 69—109 dieses Bandes.

S. 70, Zeile 2 v. u. muss das Product rechter Hand noch zu einer Potenz erhoben werden, deren Exponent δ' in No. 2 (S. 72, Zeile 4) erklärt wird und zu den oben und in No. 4 erklärten Zahlen τ, Θ in der Beziehung

$$\tau = \delta' \Theta$$

steht (S. 85, Zeile 10).

S. 75, Zeile 7 ist c statt c_1 zu lesen.

S. 77, Zeile 13 ist p^{σ} statt p zu lesen.

S. 80, Zeile 14 v. u. — Die Wahl der primitiven Wurzeln $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ist nicht willkürlich, sondern gewissen Beschränkungen unterworfen, die man rückwärts aus den Gleichungen auf S. 81, Zeile 2 entnehmen kann.

S. 81, Zeile 10 ist rechts vom Gleichheitszeichen $\xi_1^{e_1'\delta_1'\operatorname{Ind}_1 q}$ statt $\xi_2^{e_1'\delta_1'\operatorname{Ind}_1 q}$ zu lesen.

S. 87, Zeile 6. — Die primitive Wurzel ω_1 ist nicht frei zu wählen, sie muss vielmehr, wie aus dem gleich folgenden Ausdrucke für das Integral hervorgeht, gleich

$$\cos\frac{2\pi}{n_1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n_1}$$

genommen werden, und hieraus folgen wieder gewisse Beschränkungen für die Wahl der weiter unten (Zeile 14) eingeführten Wurzeln z, z_1, z_2.

S. 87, Zeile 4 v. u. ist zwischen γ' und γ_1' ein Komma zu setzen (Druckfehler dieser Ausgabe).

S. 93, letzte Zeile ist das Wort »positive« zu streichen.

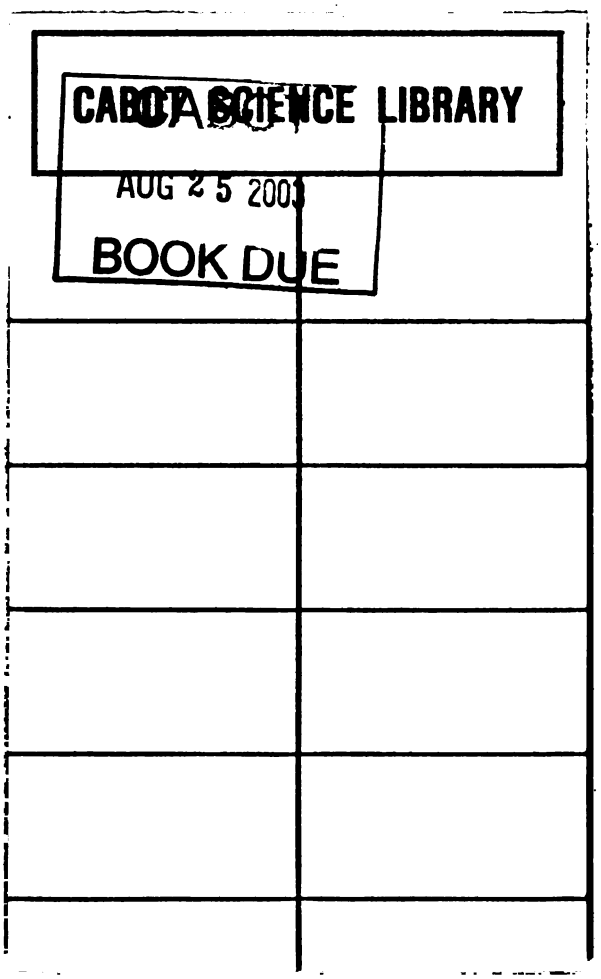
S. 98, Zeile 7 ist $-\pi$ und $+\pi$ statt $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu lesen.

S. 104, Zeile 12 v. u. ist in der Klammer links vom Gleichheitszeichen n_2 statt n zu lesen (Druckfehler dieser Ausgabe).

S. 107, Zeile 4 muss links vom Gleichheitszeichen der Nenner γ wegfallen.

Die vorstehenden Bemerkungen sind aus Mittheilungen hervorgegangen, die Herr DEDEKIND die grosse Güte hatte mir im Laufe der Correctur zu machen. SCH.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).


CABOT SCIENCE LIBRARY
AUG 25 2003
BOOK DUE

3 2044 070 899 794

DUE FEB 26 '41

JUL 16 '60 H

JUN 20 62 H